

# O Fazer Matemático

## The mathematical way

Hércules de Araujo Feitosa<sup>1</sup>  
Valter Locci

FEITOSA, Hércules de Araujo; LOCCI, Valter. O fazer matemático. *Mimesis*, Bauru, v. 22, n. 3, p. 63-81, 2001.

### RESUMO

*Este artigo mostra uma análise do trabalho matemático. Faz um estudo do desenvolvimento da geometria, suas contribuições para os fundamentos da matemática e termina por apresentar a Matemática como um sistema axiomático dado pela teoria dos conjuntos*

**Unitermos:** sistemas axiomáticos, geometria, dedução, teoria dos conjuntos, fundamentação matemática.

### INTRODUÇÃO

A meta deste trabalho é fazer uma breve reflexão sobre a natureza do trabalho matemático e entender alguns reflexos desta forma organizacional no desenvolvimento atual da Matemática. Desde que estamos tentando refletir sobre o trabalho matemático é prudente deixarmos claro o que estamos considerando, aqui, por matemático. Não vamos iniciar com uma definição de Matemática, mas apenas refletir sobre aqueles temas que a literatura, em geral, tem considerado como matemáticos. Três abordagens bastante gerais e nem sempre excludentes têm sido consideradas. A *educação matemática*, que se ocupa, preponderantemente, com questões didático-pedagógicas da Matemática. A *matemática aplicada*, para interesses centrados na resolução de problemas, usando a Matemática como ferramenta de trabalho. E a *matemática pura* ou matemática, para o trabalho destinado a desenvolver e refinar, intrinsecamente, a Matemática. A reflexão tratada neste texto é sobre o trabalho de criação e desenvolvimento da Matemática enquanto ciência dedutiva, portanto, referente à última vertente mencionada.

1. Departamento de  
Matemática –  
UNESP – Campus  
de Bauru – Av.  
Eng. Luiz Edmun-  
do Carrijo Coube,  
s/nº. – 17033-360 –  
Bauru – SP. –  
haf@fc.unesp.br -  
valocci@fc.unesp.br

Durante a antiguidade clássica, os gregos organizaram e apresentaram, pela primeira vez, a *geometria* construída a partir de algumas primeiras sentenças consideradas evidentes. A obra que consagrou esta abordagem foi escrita por Euclides e é denominada “Os Elementos”, um trabalho constituído de treze livros versando sobre números e geometria. Desde então, a geometria que contempla os princípios estabelecidos em “Os Elementos” tem sido denominada *euclidiana*. Esta forma seqüencial e dedutiva de tratar a geometria passou a ser almejada para todas as “outras matemáticas” e mesmo por outras áreas do conhecimento. Certamente, a geometria euclidiana estabeleceu um novo paradigma para a Matemática, o qual tem propiciado motivações para profundo e intenso desenvolvimento matemático. Assim, na primeira seção deste ensaio, revisamos um pouco desta fascinante história.

Como decorrência deste anseio de se fazer matemática de maneira semelhante ao que os gregos fizeram com a geometria, na segunda metade do século XIX, surgiu uma nova sub-área da matemática, denominada *fundamentos da matemática*, particularmente preocupada em entender esta ação do fazer matemático numa versão moderna, onde subjacente a cada tema matemático está um sistema formal. Na segunda seção, vemos o que é um sistema formal, quais são suas propriedades fundamentais e como este se relaciona com os tópicos matemáticos.

Avançando na construção matemática e sob a ótica de modernos resultados originados no final do século XIX e no início do século XX, dentro dos fundamentos da Matemática, podemos uniformizar as matemáticas produzindo um único sistema formal capaz de tratar toda a matemática conhecida em nossos dias e com o rigor pretendido pelos gregos, na *teoria dos conjuntos*. Desta maneira, na última seção, são apresentadas, de forma rápida, as conquistas da teoria dos conjuntos através de uma das alternativas conhecidas, a de Zermelo-Fraenkel. São apresentados os axiomas e feitos alguns comentários gerais sobre a construção matemática a partir deste sistema.

## A MOTIVAÇÃO DA GEOMETRIA EUCLIDIANA

Os carpinteiros e topógrafos egípcios e babilônicos criaram uma certa matemática primitiva nos quatro mil anos que precederam a era cristã. Mas foram os filósofos gregos clássicos que, entre os anos de 600 e 300 a. C., deram à Matemática sua arquitetura definitiva de abstração e demonstração dedutiva, levantaram a extensa estrutura da geometria euclidiana e aplicaram este campo ao entendimento e compreensão do universo.

A matemática dos gregos clássicos procurava deduzir verdades sobre a natureza, por isto deveria estar fundamentada sobre verdades. As verdades aparentemente evidentes eram chamadas de *axiomas*.

Euclides, matemático grego que viveu por volta de 300 a.C., está entre os primeiros a apresentar, de maneira sistemática, a Matemática como

FEITOSA, Hércules de Araujo; LOCCI, Valter. O fazer matemático. *Mimesis*, Bauru, v. 22, n. 3, p. 63-81, 2001.

ciência dedutiva. Isto significa que toda afirmação deveria ser deduzida logicamente de outras afirmações mais simples, e assim sucessivamente. É claro que no começo desta cadeia deveriam existir algumas afirmações não demonstradas, que Euclides chamou de *postulados* (aquilo que se pode). A Matemática moderna não faz distinção entre as palavras postulado e axioma. Porém, para os gregos, axiomas eram afirmações tais que todos os seres pensantes deveriam admitir como verdadeiras, como, por exemplo, a soma das partes coincide com o todo; enquanto postulados eram verdades particulares da geometria como: dados dois pontos existe uma única reta que os contém. Euclides procurou escolher como postulados afirmações que, por sua simplicidade, seriam aceitas por qualquer pessoa de bom senso e que eram, em um certo sentido, evidentes por si mesmas. Sua obra “Os Elementos” consiste de treze livros. O livro I é composto de três partes distintas (embora Euclides não as tenha separado formalmente). A primeira parte, constituída pelas primeiras 26 proposições, trata quase exclusivamente da teoria elementar de triângulos. A segunda parte trata da teoria das paralelas. A terceira trata das relações entre áreas de paralelogramos, triângulos e quadrados e culmina com o famoso Teorema de Pitágoras (Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos) e de sua forma recíproca (Se um triângulo possui lados medindo  $a$ ,  $b$  e  $c$ , com  $a^2 = b^2 + c^2$ , então o triângulo é retângulo e sua hipotenusa é o lado que mede  $a$ ).

Os cinco postulados adotados por Euclides em “Os elementos”, escritos em termos atuais, são:

- (1) Uma linha reta pode ser traçada ligando dois pontos quaisquer.
- (2) Qualquer segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente.
- (3) Uma circunferência pode ser traçada com qualquer centro e qualquer raio.
- (4) Todos os ângulos retos são iguais.
- (5) Se duas retas, em um mesmo plano, são cortadas por uma outra reta e se a soma dos ângulos internos de um lado é menor do que dois retos, então as retas se encontram, se prolongadas suficientemente, do lado em que a soma dos ângulos é menor do que dois ângulos retos.

Desde a época de Euclides, há uma tendência natural de representar um espaço 1-dimensional pela reta usual e um espaço 2-dimensional pelo plano usual, conforme representado na FIGURA 1.

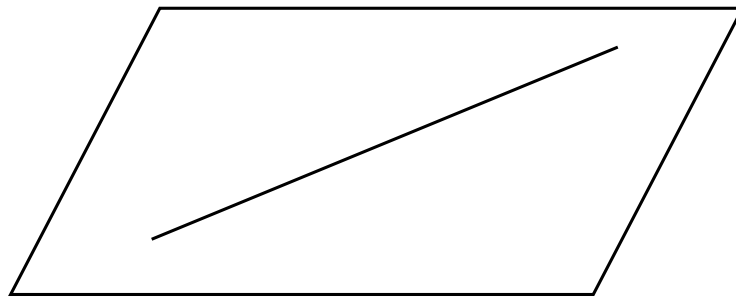


FIGURA 1: Plano e reta.

Uma ilustração desta tendência natural pode ser observada na FIGURA 2 no esboço de uma representação geométrica do V postulado de Euclides.

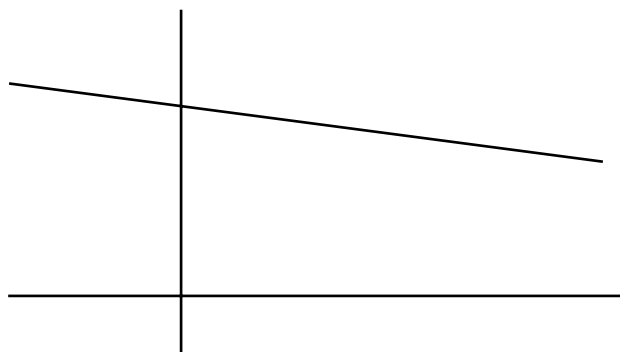


FIGURA 2: Sobre o V postulado de Euclides

O quinto postulado não foi utilizado por Euclides na obtenção de qualquer das 26 primeiras proposições do livro I. Além disto, comparando os cinco postulados euclidianos, percebemos que os quatro primeiros parecem de enunciados fáceis e evidentes por si próprios. O quinto postulado é bastante diferente e tornou-se, de imediato, alvo de críticas dos matemáticos da época. O seu enunciado é relativamente complicado e menos evidente por si mesmo, parece mais uma proposição que um axioma. Além disso, sua tardia utilização por Euclides levantou suspeitas de que ele poderia ser simplesmente uma proposição demonstrável a partir dos outros axiomas, mas que o geômetra não conseguira demonstrar.

Inúmeras tentativas foram feitas para se mostrar o quinto postulado de Euclides a partir dos demais, comumente mudando-se a definição de retas paralelas. Dentre os nomes famosos que tentaram podemos citar Lambert [1728-1777], Bertrand [1731-1812] e Gauss [1777-1855]. Surgiram várias afirmativas equivalentes ao quinto postulado de Euclides, entre as quais citamos as seguintes:

- (i) se uma reta intercepta uma das paralelas, interceptará a outra;
- (ii) retas que são paralelas a uma reta são paralelas entre si;
- (iii) duas retas que se interceptam não podem ser paralelas a uma mesma reta;
- (iv) sejam dados, em um plano, uma reta e um ponto P que não está em. Então existe uma e só uma paralela a passando por P.

A formulação (iv) é conhecida como *Axioma de Playfair*, devido ao inglês John Playfair [1748-1819] e com o passar dos anos tornou-se a forma padrão da afirmação do quinto postulado de Euclides, passando a ser chamado de Postulado das Paralelas de Euclides.

Saccheri [1667-1733], ao invés de tentar demonstrar o postulado de Euclides a partir dos outros, considerou a questão da seguinte forma: aceitemos os primeiros postulados de Euclides, excetuando-se o das paralelas. De acordo com eles, podemos construir as perpendiculares

FEITOSA, Hércules de Araujo; LOCCI, Valter. O fazer matemático. *Mimesis*, Bauru, v. 22, n. 3, p. 63-81, 2001.

em A e B a um segmento , no plano. Sejam C e D dois pontos situados, respectivamente, sobre cada uma dessas perpendiculares, do mesmo lado de e tais que  $AC = BD$ . Construída a reta CD, demonstramos que os ângulos em C e D, no quadrilátero obtido (quadrilátero de Saccheri), são necessariamente iguais, mas, nada podemos afirmar quanto ao seu valor comum. Sobre este valor, há três hipóteses possíveis e distintas: os dois ângulos são ambos agudos, retos ou obtusos, mas o sistema de postulados não nos permite decidir entre as três suposições. A FIGURA 3 mostra o quadrilátero de Saccheri.

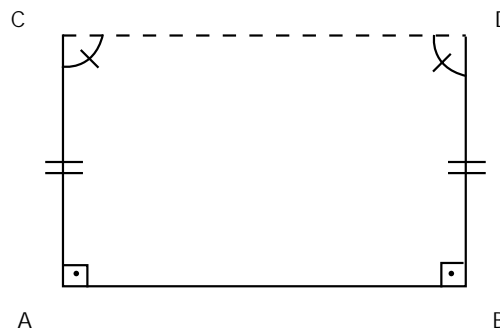


FIGURA 3: Quadrilátero de Saccheri.

Saccheri provou que a hipótese dos ângulos retos equívale a admitir o postulado das paralelas; e como os dois outros casos lhe pareceram contrários à evidência, ele concluiu que o postulado de Euclides é verdadeiro. Trata-se, como podemos ver, de uma redução ao absurdo, mas, na sua demonstração, Saccheri introduz inconscientemente um postulado, quando rejeita as duas hipóteses por inconcebíveis.

A conclusão de que o quinto postulado não era demonstrável a partir dos outros quatro só foi obtida na primeira metade do século XIX com Gauss [1777-1855], Lobatchewski [1793-1856] e Bolyai [1802-1860]. Isto ocorreu com a descoberta das chamadas geometrias não-euclidianas em que o quinto postulado de Euclides é substituído por outra afirmação que lhe é contraditória.

Em 1829, o russo Lobatchewski publicou um artigo, “On the Principles of Geometry”, que marca oficialmente o nascimento das geometrias não-euclidianas. O quinto postulado foi substituído pelo seguinte: “por um ponto P fora de uma reta podemos traçar mais de uma reta do plano que não encontra ”.

Com este novo postulado, Lobatchewski deduziu uma geometria sem contradições lógicas inerentes, mas tão contrária ao senso comum que ele mesmo a chamou de “geometria imaginária”. Na sua geometria, por exemplo, a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor do que  $180^\circ$  e não igual, como válido na geometria euclidiana.

Por volta de 1829, o húngaro Bolyai obteve a mesma conclusão que Lobatchewski, mas suas conclusões só foram publicadas em 1832. Em vez de tentar provar o impossível, substituiu o quinto postulado de Euclides pela se-

guinte afirmação: “por um ponto fora de uma reta podem ser traçadas infinitas retas do plano, não uma só, cada uma delas paralela à reta dada”.

As geometrias não-euclidianas continuaram, por algum tempo, a ser tópicos da matemática um tanto marginal, até serem completamente integradas através de idéias bastante gerais introduzidas por Riemann [1826-1866]. Riemann apresentou uma profunda e ampla concepção de todo o espectro da geometria. A seguir, sugeriu uma visão global da geometria, como um estudo de variedades de uma quantidade qualquer de dimensões em qualquer tipo de espaço. Suas geometrias eram não-euclidianas num sentido mais geral do que as de Lobatchewski ou Bolyai, onde a questão é simplesmente a de quantas paralelas a uma reta são possíveis serem traçadas por um ponto dado fora da mesma.

Riemann percebeu que entre os conceitos mais importantes em qualquer geometria está o de “métrica” que é uma função para determinar a distância entre dois pontos que podem estar infinitesimalmente próximos um do outro. Na geometria euclidiana ordinária, por exemplo, o espaço com a métrica usual (fórmula da distância) é chamado de espaço euclidiano. Um espaço com uma métrica formulada por Riemann passou a ser chamado de espaço riemanniano e o espaço euclidiano é, localmente, apenas um caso especial deste.

Hoje, temos uma concepção mais restrita para o termo geometria riemanniana, a qual não revela integralmente a mudança fundamental nas concepções geométricas introduzidas por Riemann. Este sugeriu uma abordagem mais geral para os espaços métricos com curvaturas, o que mais tarde possibilitou a teoria geral da relatividade.

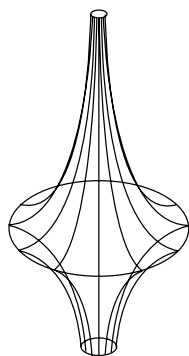


FIGURA 4: Pseudo-esfera.

Beltrami [1835-1900] tem o crédito de ter produzido a primeira demonstração da consistência das geometrias não-euclidianas. Beltrami apresentou, em 1868, um modelo, pseudo-esfera, ver FIGURA 4, em que a geometria de Lobatchewski-Bolyai podia ser representada sobre uma superfície no espaço euclidiano de três dimensões e tal que os postulados da geometria euclidiana fossem válidos. Como consequência, qualquer inconsistência que pudesse existir nas geometrias não-euclidianas seria também uma inconsistência na geometria euclidiana.

FEITOSA, Hércules de Araujo; LOCCI, Valter. O fazer matemático. *Mimesis*, Bauru, v. 22, n. 3, p. 63-81, 2001.

Modificando convenientemente os postulados de Euclides e reinterpretando os conceitos primitivos de reta e plano, obtemos um modelo para a geometria de Riemann: devemos considerar o “plano” como uma superfície de uma esfera e uma “reta” como um círculo máximo sobre a esfera, conforme ilustrado na FIGURA 5. Neste modelo da geometria esférica, podemos constatar, por exemplo, que a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior do que  $180^{\circ}$ . Outro modelo similar é o da geometria elíptica, obtido ao considerarmos uma esfera com os pontos antípodas identificados (plano projetivo real).

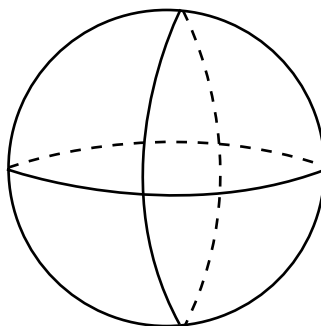


FIGURA 5: Esfera.

É interessante observarmos que os modelos adotados devem permitir o deslocamento de triângulos sem deformação (Postulado da Congruência). Assim é necessário que os modelos para as geometrias tenham “curvatura”  $k$  constante, como ocorre com o plano ( $k = 0$ ), a esfera ( $k = +1$ ) e a pseudo-esfera ( $k = -1$ ).

Com relação aos modelos para cada uma destas geometrias, usamos atualmente as seguintes denominações:

- Geometria plana (ou de Euclides).
- Geometria hiperbólica (ou de Lobatchewski-Bolyai).
- Geometria elíptica (ou de Riemann).

Ao analisarmos atentamente o sistema de postulados sobre os quais Euclides construiu “Os Elementos”, identificamos a sua insuficiência. Muitas das demonstrações de Euclides apelam fortemente à intuição e, desta maneira, escondem alguns postulados admitidos intrinsecamente.

A preocupação com a fundamentação da geometria em bases sólidas culminou com a reestruturação da geometria Euclidiana por Hilbert [1862-1943], em 1899, evitando todas as ambigüidades e lacunas que se encontravam naquele trabalho. Hilbert considerou, para a geometria plana, duas noções primitivas: ponto e reta (e também plano, no caso da geometria espacial). Mais ainda, supôs que entre estas noções primitivas existiam três relações primitivas:

- um ponto está numa reta.
- um ponto está entre dois pontos.
- relação de congruência (entre segmentos, ângulos e triângulos).

Hilbert considerou que estas noções e relações primitivas deveriam satisfazer um sistema de postulados ou axiomas divididos em cinco grupos:

- (1) Axiomas de incidência (noção de estar em).
- (2) Axiomas de ordem (noção de ocorrer primeiro).
- (3) Axiomas de congruência (noção de congruência).
- (4) Axioma de continuidade.
- (5) Axioma das paralelas.

Com relação ao axioma das paralelas, se escolhermos o axioma de Euclides, estamos tratando da geometria euclidiana, escolhendo uma negação do axioma das paralelas de Euclides, obtemos a geometria hiperbólica ou a geometria elíptica.

Existem vários outros sistemas de postulados para a geometria, sendo que cada autor adota um sistema diferente de noções/relações primitivas e de postulados (sistema de Pash, Peano, Pieri, Veblen, Pogorelov etc.).

Pogorelov, por exemplo, organiza o seu sistema de postulados para a geometria plana em seis grupos:

- (1) Postulados de incidência.
- (2) Postulados de separação.
- (3) Postulados de medida de segmentos e de ângulos.
- (4) Postulados de continuidade.
- (5) Postulado de congruência (de triângulos).
- (6) Postulado das paralelas.

Uma importante consequência do surgimento das geometrias não-euclidianas é a sua influência na concepção matemática do século XX. A existência de tais geometrias mostrou a necessidade de se raciocinar usualmente com rigor e manter a intuição sobre controle. Nem sempre o que parece é.

## O MÉTODO DEDUTIVO

A lógica tem servido como ferramenta para o estudo e compreensão do fazer matemático e como originadora de idéias outras. Devido ao nosso interesse sobre o entendimento do trabalho matemático, vamos ver a lógica matemática como um dispositivo no auxílio desta análise.

Bem, quando iniciamos os estudos sobre um novo tema, a primeira questão que se apresenta é conhecer qual o objeto de estudo desta área do conhecimento. Com relação à lógica, não temos uma definição explícita dos seus objetos de estudo, mas, grosseiramente, podemos dizer que a lógica estuda os raciocínios que podem ser admitidos como corretos, ou melhor, as formas válidas de inferência. A lógica matemática, em particular, estuda o tipo de raciocínio desenvolvido pelos matemáticos e para tal, devemos conhecer e analisar os métodos empregados pelos matemáticos para a construção das teorias matemáticas, edificadas como sistemas dedutivos.

FEITOSA, Hércules de Araujo; LOCCI, Valter. O fazer matemático. *Mimesis*, Bauru, v. 22, n. 3, p. 63-81, 2001.



A dinâmica do trabalho matemático é distinta de todas as demais ciências; pois, enquanto todas as outras se apóiam em observações ou, em última análise, objetivam um modelo para a realidade física, a matemática se desenvolve, intrinsecamente, como um modelo dedutivo, sendo validada quando apresentada como uma demonstração. Esta característica não nega o fato de o matemático usar a intuição e a observação em sua atividade, porém, a forma última de seu trabalho é dedutiva e abstrata.

Contudo, não é possível demonstrarmos todas as leis matemáticas. Algumas primeiras leis ou sentenças não podem ser demonstradas, desde que não existem leis anteriores a partir das quais estas possam ser conseqüências. Estas leis iniciais, aceitas como verdadeiras sem demonstração, são denominadas *axiomas*; as leis remanescentes, deduzidas a partir dos axiomas, são denominadas *teoremas*. Um sistema assim desenvolvido é denominado *sistema axiomático* ou *teoria*. É uma convenção, para maior elegância do sistema, que o número de axiomas seja o menor possível. Nos primeiros sistemas axiomáticos desenvolvidos, como, por exemplo, na geometria grega, houve uma grande preocupação com que os axiomas fossem sentenças evidentes por elas mesmas, mas na visão moderna, a escolha pode ser bastante arbitrária, de acordo com a conveniência do pesquisador e da área em questão. Com isto, buscamos reduzir um grande número de sentenças, ou seja, toda uma teoria, a um pequeno número de leis, os axiomas.

Quando, no desenvolvimento de uma certa teoria, surge um conceito notável, no sentido de ser importante e com presença freqüente, então damos um nome ou batizamos este conceito de maneira a caracterizar exatamente quando este conceito está presente e quando não está. Neste caso, fornecemos uma *definição* para o conceito abordado. De maneira semelhante aos teoremas, buscamos definir um conceito a partir de outros já conhecidos e, analogamente nesta regressão, têm que surgir alguns primeiros conceitos sem definição, pois não podem ser obtidos de nenhum anterior. Estes são denominados *conceitos primitivos* e os remanescentes são denominados *conceitos derivados*. Os conceitos primitivos surgem nos axiomas.

O estudo dos axiomas e teoremas de um sistema, vistos como expressões, sem que lhes sejam atribuídos qualquer significado, caracteriza o *aspecto sintático* do sistema axiomático, enquanto que o estudo do significado destas expressões caracteriza o seu *aspecto semântico*. Esta distinção entre sintaxe e semântica é relevante, não só para os fundamentos da matemática, mas para a compreensão e resolução de muitos problemas matemáticos. Gostaríamos de que, para cada sentença obtida por meios puramente sintáticos, houvesse uma correspondente semântica e vice-versa. Contudo, isto usualmente não ocorre.

Com estas considerações, podemos discorrer sobre os *sistemas formais*, que caracterizam o componente sintático de uma teoria, ou ainda, de um sistema axiomático.

A primeira parte de um sistema formal é sua *linguagem*, caracterizada por um conjunto de símbolos, denominado o seu *alfabeto*. Como desejamos contemplar o rigor no trato de sistemas formais, é conveniente que utilizemos linguagens artificiais ou formais, que evitem ao máximo as ambigüidades das linguagens naturais. Conhecido o alfabeto, podemos obter o conjunto das *expressões* possíveis nesta linguagem, que é constituído de todas as seqüências finitas de símbolos do alfabeto. A seguir, devemos evidenciar um conjunto de regras gramaticais que permitam, por meio de um procedimento finito, dito efetivo, gerar e distinguir as expressões que têm interesse ao sistema formal, denominadas *expressões bem formadas*, das expressões desprovidas de interesse. Cada vez que um símbolo do alfabeto aparece em uma expressão, temos uma *ocorrência* do símbolo. O número de ocorrências de símbolos em uma expressão é denominado o seu *comprimento*. Assim, na língua portuguesa, a expressão “matemática” tem comprimento 10 e 3 ocorrências do símbolo “a”.

Uma linguagem é um ente estritamente sintático e fica bem determinada quando conhecidos os seus símbolos e regras gramaticais. Denotamos uma linguagem formal por  $\mathbf{L} = (\mathbf{A}, \mathbf{E})$ , onde  $\mathbf{A}$  é o alfabeto de  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{E}$  é um conjunto de expressões de  $\mathbf{L}$ , denominadas *expressões bem formadas*. Um subconjunto fundamental de sentenças bem formadas  $\mathbf{E}$  é o das *fórmulas* de  $\mathbf{L}$ , denotado por  $\mathbf{F}$ .

A segunda parte necessária a um sistema formal é um conjunto  $\mathbf{P}$ , possivelmente vazio, de postulados ou axiomas, constituído por fórmulas da linguagem  $\mathbf{L}$ .

A terceira e última parte é o conjunto  $\mathbf{R}$  de *regras de inferência* sobre o conjunto das fórmulas de  $\mathbf{L}$ , que tem a finalidade de possibilitar a dedução na teoria, ou seja, obter novos fatos da teoria a partir de informações dadas.

Para uma teoria matemática  $\mathbf{T}$  qualquer, o seu conjunto de teoremas é definido indutivamente da seguinte maneira:

Um *teorema* de um sistema axiomático ou teoria  $\mathbf{T}$  é uma fórmula que:

- (i) é um dos axiomas de  $\mathbf{T}$  ou
- (ii) dada uma regra de inferência, se todas as premissas (ou hipóteses) são teoremas de  $\mathbf{T}$ , então a conclusão obtida pela aplicação desta regra a estas premissas também é um teorema de  $\mathbf{T}$ .

Analisando o trabalho do matemático, percebemos que este profissional, basicamente, desenvolve sistemas axiomáticos. Avança em uma certa teoria quando produz fatos novos, define conceitos emergentes, resolve problemas ainda não solucionados, propõe novos resultados, sugere e desenvolve novas teorias, ou ainda, quando apresenta formas alternativas às já existentes ou possibilita aplicações onde se façam necessárias. De qualquer forma, está gerando conhecimento matemático. Esta elaboração matemática, denominada teoria ou sistema axiomático, consiste, basicamente, de conceitos primitivos, conceitos derivados, axiomas e teoremas.

FEITOSA, Hércules de Araujo; LOCCI, Valter. O fazer matemático. *Mimesis*, Bauru, v. 22, n. 3, p. 63-81, 2001.

Em textos matemáticos, é usual vermos expressões tais como: definição, proposição, teorema, lema e corolário. O conceito de definição já comentamos. Os quatro outros conceitos devem ser entendidos como os teoremas mencionados acima. A variação nos nomes serve para destacarmos uma possível hierarquia de importância destes teoremas, bem como a ordem em que são enunciados. Quando estamos desenvolvendo uma certa teoria, demonstramos muitos teoremas, mas alguns são mais relevantes que outros. Em geral, chamamos de proposições os resultados mais elementares e reservamos o nome teorema para os feitos mais relevantes como “teorema de Pitágoras”, “teorema fundamental da álgebra” ou “teorema fundamental da aritmética”. Lema é uma proposição que antecede e auxilia um teorema; muito da demonstração de um teorema já está no lema. E corolário é uma consequência do teorema, segue do teorema.

Resumindo, um *sistema formal*  $S$  é uma quádrupla  $S = (A, F, P, R)$ , onde:

(i)  $A$  é um conjunto qualquer (frequentemente enumerável) de símbolos, denominado o alfabeto de  $S$ . Uma seqüência finita de símbolos de  $A$  é denominada uma expressão de  $S$ .

(ii)  $F$  é um subconjunto de expressões bem formadas, determinadas pelos símbolos de  $A$ . Existem regras sintáticas para a geração destas expressões. A complexidade da linguagem tratada pode ser de ordem zero, também chamada proposicional, de primeira ordem ou de ordem superior. Numa linguagem proposicional, as únicas expressões bem formadas são as fórmulas, mas nas linguagens não proposicionais, termos e fórmulas são expressões bem formadas. Em geral, existe um procedimento efetivo para determinar se uma dada expressão é ou não uma fórmula ou um termo.

(iii)  $P$  é um subconjunto, possivelmente vazio, de  $F$ , dito o conjunto dos postulados ou axiomas de  $S$ . Também aqui existem procedimentos efetivos para se estabelecer se uma fórmula é ou não um axioma. No caso afirmativo, temos uma teoria axiomatizada.

(iv)  $R$  é um conjunto finito de regras, dado por relações pelo menos binárias entre fórmulas, que são denominadas *regras de inferência*. Se  $R(a_1, a_2, \dots, a_n, b) \in R$ , dizemos que  $b$  é obtida a partir de  $a_i, 1 \leq i \leq n$ , pela regra  $R$ .

Uma *demonstração* de  $b$  em  $S$  é uma seqüência  $a_1, a_2, \dots, a_n, b$  de fórmulas tais que, para cada  $i$ ,  $a_i$  é um axioma de  $S$  ou  $a_i$  é uma consequência direta de algumas das fórmulas precedentes através de alguma das regras de inferência. Um *teorema* de  $S$  é a última fórmula de uma seqüência que se constitui em uma demonstração, no nosso caso,  $b$  é o teorema.

Uma fórmula  $b$  de  $S$  é *deduzida* ou *derivada* de um conjunto  $G$  de fórmulas, se existe uma seqüência  $a_1, a_2, \dots, a_n$  de fórmulas tal que,  $a_n$  é  $b$  e, para cada  $1 \leq i \leq n$ ,  $a_i$  é um axioma, ou  $a_i$  está em  $G$ , ou ainda,  $a_i$  é uma consequência direta de  $G$  através de alguma das regras de inferência de  $S$ , para algumas das fórmulas precedentes. Esta seqüência é uma

*dedução* de  $b$  a partir de  $G$ . Os membros de  $G$  são denominados *premissas* ou *hipóteses* e  $b$  é a *conclusão* da dedução.

Para denotarmos que  $b$  é uma consequência direta de  $G$ , escrevemos  $G \vdash b$ . Se  $G$  é finito, podemos escrever, alternativamente,  $a_1, a_2, \dots, a_n \vdash b$ . No caso em que  $G$  é o conjunto vazio, escrevemos  $\vdash b$  e dizemos que  $b$  é um teorema.

A seguir, vamos, informalmente, entender como *procedimento* uma seqüência de passos, como num algoritmo, ou numa receita de bolo, que nos indicam como atuar em cada etapa.

Após estes comentários iniciais sobre a formalização, podemos ressaltar algumas características relevantes para um sistema formal:

**(1) Consistência:** um sistema formal  $S$  é *consistente* quando não existe qualquer fórmula, de maneira que esta fórmula e a sua negação sejam teoremas de  $S$ .

**(2) Efetividade:** um sistema formal  $S$  é *efetivo* quando existe um procedimento, com um número finito de etapas, que nos permite saber se uma certa expressão é uma fórmula de  $S$  e se uma seqüência de fórmulas se constitui numa dedução em  $S$ .

**(3) Decidibilidade:** um sistema formal  $S$  é *decidível* quando existe um procedimento efetivo que permite verificar se uma fórmula qualquer do sistema é ou não um teorema de  $S$ .

**(4) Completamento:** um sistema formal  $S$  é *completo* se é possível demonstrar, para qualquer fórmula, que esta fórmula ou sua negação é um teorema do sistema  $S$ .

**(5) Independência:** um axioma ou uma regra de um sistema formal  $S$  é *independente* se a supressão deste axioma ou regra diminui a quantidade de informações que podem ser deduzidas no sistema.

**(6) Modelos:** um *modelo* para  $S$  é um ambiente semântico onde todo teorema de  $S$  é uma sentença verdadeira. O modelo é *adequado* quando todo teorema é verdadeiro e toda sentença verdadeira é um teorema.

Como vimos, para o conjunto de axiomas, pode existir um procedimento efetivo, ou seja, mecânico, para testar se uma dada fórmula é ou não um axioma. Isto caracteriza a efetividade do sistema.

Outra característica que gostaríamos que fosse mecânica é a decidibilidade, ou seja, a possibilidade de obtermos procedimentos algorítmicos ou mecânicos para podermos decidir se uma fórmula qualquer do sistema é ou não um teorema. Contudo, para a maioria dos sistemas axiomáticos, os quais caracterizam as teorias matemáticas mais relevantes, não existe um procedimento mecânico, implementado por uma máquina, que seja capaz de verificar se uma fórmula qualquer é ou não um teorema do sistema. Assim, as mais importantes teorias matemáticas são não decidíveis. Esta é uma das notáveis contribuições do lógico germânico Gödel, apresentada no início do século XX. Caracterizada a limitação da decidibilidade de um sistema formal e considerando que, de fato, autômatos são sistemas formais, muitos filósofos contemporâneos não crêem na construção de uma máquina capaz de tomadas de decisões semelhan-

FEITOSA, Hércules de Araujo; LOCCI, Valter. O fazer matemático. *Mimesis*, Bauru, v. 22, n. 3, p. 63-81, 2001.

tes aos seres humanos, pelo menos com os recursos disponíveis neste momento.

## TEORIA DOS CONJUNTOS: A MATEMÁTICA COMO UM SISTEMA FORMAL

Na busca por uma fundamentação da Matemática, encontramos um período apogístico entre o final do século XIX e o início do século XX. Neste período, conseguiu-se não apenas tratar algumas teorias matemáticas com o rigor pretendido a partir da geometria grega e à luz dos sistemas formalizados, mas também estabelecer alguns sistemas onde toda a Matemática contemporânea possa ser tratada. Estamos atingindo o que tem sido denominado a *Matemática moderna* e nos distanciando das matemáticas de até então. Com estes sistemas, podemos dar alguns passos na compreensão do que é Matemática e, principalmente, desenvolver aquelas reflexões sobre as propriedades dos sistemas formais como, por exemplo, a consistência para a Matemática.

A primeira tentativa de unificação da Matemática se deu no monumental trabalho "*Principia Mathematica*" de Russel e Whitehead (Whitehead, Russel, 1910-1913), onde é advogada a tese logicista de que a Matemática é em essência lógica. Apesar do grande avanço na direção pretendida, a teoria dos tipos, proposta para dar conta dos problemas surgidos pelo caminho, não foi suficiente e a tese logicista foi perdendo forças.

Conforme os trabalhos contemporâneos sobre fundamentação matemática, podemos dizer que toda a Matemática conhecida pode ser construída na teoria dos conjuntos. Isso significa que objetos matemáticos tais como números e as mais diversas funções e relações, podem ser definidos como conjuntos. Desta forma, os teoremas da matemática devem ser vistos como afirmações sobre conjuntos e demonstrados como afirmações da teoria dos conjuntos.

Iniciada a partir dos trabalhos de Cantor (Dauben, 1979) do final do século XIX, a teoria dos conjuntos pretendia ser erigida a partir de dois princípios básicos: (i) a extensionalidade que afirma que dois conjuntos são iguais se têm exatamente os mesmos elementos e (ii) a abstração, que afirma que para cada propriedade existe o conjunto dos elementos que satisfazem a propriedade dada. Esta abordagem mais intuitiva dos conjuntos logo apresentou problemas com o princípio da abstração pois, por exemplo, não existe "o conjunto de todos os conjuntos". Parece um pouco severo dizer que algumas coleções não são conjuntos, mas de fato, existem tais coleções. Esses "conjuntos ilegais" podem ser chamados de classes. Uma *classe* deve ser identificada com uma condição ou uma extensão de uma condição.

Estes paradoxos da teoria ingênua dos conjuntos, dentre os quais podemos citar o famoso paradoxo de Russel, forçaram o desenvolvimento da axiomatização da teoria dos conjuntos, mostrando que, sem dúvida,

suposições aparentemente aceitáveis, eram inconsistentes e, portanto, totalmente insustentáveis na matemática.

O paradoxo de Russel mostra a impossibilidade da existência do conjunto de todos os conjuntos e põe limites sobre o princípio da abstração. Pois, suponhamos que existe o conjunto de todos os conjuntos e consideremos o conjunto  $u = \{x \mid x \notin x\}$ , ou seja,  $u$  é conjunto de todos os objetos que não são elementos deles mesmos. Desde que existe o conjunto de todos os conjuntos, é lícito perguntar se  $u \in u$ . Assim, se  $u \in u$ , então  $u$  admite a propriedade que o define e, portanto,  $u \in u$ . Agora, se  $u \notin u$ , então pela definição de  $u$  temos que  $u \in u$ . Desta forma, temos que  $u \in u$  se, e somente se,  $u \notin u$ , o que é claramente uma contradição.

Como então contornar o problema que resulta da proibição de se falar da coleção de todos os conjuntos? A coleção não pode ser um conjunto, por isso algumas alternativas têm sido oferecidas, sendo as duas mais conhecidas (Enderton, 1977):

(i) a de Zermelo-Fraenkel que diz: nunca precisamos falar da coleção de todos os conjuntos; toda vez que tentarmos falar dela procuraremos outra frase para evitá-la.

(ii) a de Neuman-Bernays: a coleção de todos os conjuntos pode ser chamada de classe. Ainda, alguma outra coleção de conjuntos pode ser chamada de classe. Em particular, qualquer conjunto é uma classe, mas algumas classes são grandes demais para serem conjuntos. Assim, existem classes que não são conjuntos e, também, não podem ser membros de conjuntos.

Até mesmo sem a fundamental crise colocada pelos paradoxos da teoria ingênua dos conjuntos, a axiomatização, provavelmente, teria sido desenvolvida para enfrentar, mais tarde, as controvérsias sobre a veracidade ou a falsidade de certos princípios, tais como o axioma da escolha (enunciado abaixo).

Com isto, vemos que a teoria de conjuntos é um campo natural onde se pode tomar contato com o desenvolvimento axiomático da Matemática e, ainda, que esta é uma teoria poderosa o bastante para o desenvolvimento de todos os temas matemáticos usualmente tratados. Devemos deixar claro que não estamos preocupados com objetos tais como árvores, cavalos, moléculas e outros do gênero, mas com entes matemáticos tais como números, figuras, funções, pontos de um certo espaço. Assim, conjuntos não são objetos do mundo real, porém são criados em nossas mentes e não em nossas mãos. Aqui talvez resida um caráter altamente abstrato dos conjuntos e da Matemática o que os tornam nem sempre muito evidentes e intuitivos.

Comentaremos, a seguir, a axiomática de Zermelo-Fraenkel, possivelmente a mais usual. Este sistema axiomático se apresenta com duas noções primitivas, os conceitos de “conjunto” e “pertinência”. Em cima destes conceitos são definidos todos os outros e são construídos os conjuntos numéricos dos naturais, inteiros, racionais e reais e todos os demais conceitos matemáticos com os quais o matemático moderno trabalha.

FEITOSA, Hércules de Araujo; LOCCI, Valter. O fazer matemático. *Mimesis*, Bauru, v. 22, n. 3, p. 63-81, 2001.

Não vamos fazer um tratado de teoria dos conjuntos, mas apenas introduzir os axiomas com algumas observações. Os livros (Enderton, 1977), (Hrbacek, Jech, 1984) e (Halmos, 1970) são bons textos introdutórios sobre o tema. A teoria dos conjuntos pode ser edificada como um sistema formal sobre uma lógica de primeira ordem, tendo como único símbolo não lógico  $\in$ , para a relação de pertinência. Mas, aqui não vamos especificar muito a sua estrutura sintática subjacente. Vamos nos restringir ao sistema axiomático.

Para cada um dos axiomas, vamos apresentar o seu significado intuitivo e, a seguir, damos a sua formalização. Apesar da pouca intuição presente nas expressões formais, não precisamos nos assustar com isto, deixemos estas complicações para os conjuntistas:

**Axioma da extensionalidade:** se dois conjuntos têm exatamente os mesmos elementos, então são iguais.

$$(\forall u \forall v)(\forall x(x \in u \leftrightarrow x \in v)) \rightarrow u = v.$$

**Axioma do conjunto vazio:** existe um conjunto que não tem elementos. O conjunto vazio é denotado por  $\emptyset$ .

$$(\exists v)(\forall x)(x \notin v).$$

**Axioma esquema da compreensão:** Seja  $P(x)$  uma propriedade de  $x$ . Para qualquer conjunto  $y$  existe  $u$  tal que  $x$  pertence a  $u$  se, e somente se,  $x$  pertence a  $y$  e vale  $P(x)$ .

$$(\forall y)(\exists u)(\forall x)(x \in u \leftrightarrow x \in y \wedge P(x))$$

Este é um axioma esquema porque cada propriedade  $P(x)$  determina um conjunto. É uma forma de contemplar algo do princípio da abstração sem ser tão liberal quanto na abordagem intuitiva. Aqui  $x$  deve satisfazer uma propriedade mas também estar em algum conjunto que já tenha sido construído.

**Axioma da união:** para qualquer conjunto  $u$ , existe um conjunto  $v$  cujos elementos são exatamente os elementos dos membros de  $u$ .

$$(\forall x)(x \in v \leftrightarrow (\exists y \in u)(x \in y)).$$

**Axioma do conjunto das partes:** para qualquer conjunto  $u$ , existe um conjunto cujos membros são exatamente os subconjuntos de  $u$ . O conjunto  $x$  é um subconjunto de  $u$  ou  $x \subseteq u$  se e somente se  $(\forall z)(z \in x \rightarrow z \in u)$ .

$$(\forall u \exists y \forall x)(x \in y \leftrightarrow x \subseteq u).$$

**Axioma da infinidade:** existe um conjunto indutivo. Se  $a$  é um conjunto o seu sucessor é definido por  $a^+ = a \cup \{a\}$ .

$$(\exists y)(\emptyset \in y \wedge (\forall a \in y)(a^+ \in y)).$$

**Axioma esquema da substituição:** Seja  $P(x, y)$  uma propriedade tal que para todo  $x$  existe um único  $y$  para os quais vale  $P(x, y)$ . Para qualquer conjunto  $v$ , existe  $u$  tal que para todo  $x \in v$  existe  $y \in u$  tal que vale  $P(x, y)$ .

Estes axiomas constituem o que usualmente denominamos de sistema de Zermelo-Fraenkel. Um outro axioma importante na construção dos conjuntos numéricos é o axioma da escolha que indicamos a seguir.

**Axioma da escolha:** para todo conjunto  $I$  e toda função  $H$  com domínio em  $I$ , se  $H(i) \neq \emptyset$ , para todo  $i \in I$ , então  $\prod_{i \in I} H(i) \neq \emptyset$ .

O conjunto  $\prod_{i \in I} H(i)$  é o produto cartesiano dos conjuntos  $H(i)$ . Se  $I$  é finito, não é necessário o axioma da escolha, mas para  $I$  infinito o axioma é essencial. O axioma da escolha tem muitas formas equivalentes, normalmente tratadas nos textos de teoria dos conjuntos.

Também, este sistema de axiomas não é independente, pois, por exemplo, o axioma do conjunto vazio pode ser derivado a partir dos demais. Este é mantido no sistema devido a um caráter seqüencial da teoria, pois onde é utilizado ainda não foram introduzidos os outros axiomas dos quais ele deriva.

A experiência tem mostrado que todos os teoremas cujas demonstrações são aceitas pela comunidade matemática podem, pelo menos em princípio, serem feitas a partir de ZFC, Zermelo-Fraenkel com o axioma da escolha (choice axiom). Mas, podem todos os teoremas matemáticos verdadeiros, incluindo aqueles que ainda não tenham sido demonstrados, ser obtidos em ZFC? Certamente não! A partir dos teoremas de incompletude de Gödel, sabemos que isto não ocorre. Mas, mesmo conectados com a teoria de conjuntos são conhecidos resultados que são independentes de ZFC como a hipótese do contínuo  $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ , que afirma que a cardinalidade do conjunto das partes de um conjunto infinito enumerável é não enumerável. De uma forma mais intuitiva, o conjunto das partes de um conjunto equipotente a  $\mathbb{N}$  (Naturais) é equipotente a  $\mathbb{R}$  (Reais)?

Para o desenvolvimento de tópicos matemáticos um pouco mais avançados e específicos, podemos necessitar ainda de outros axiomas da teoria de conjuntos. O axioma da construtibilidade: “todo conjunto deve ser construído” tem este caráter. Contudo, a aceitação ou não de novos axiomas é sempre um tanto polêmica. Um novo axioma deveria respeitar pelo menos os seguintes dois princípios: (i) deve ser intuitivamente razoável que os conjuntos, com o entendimento que temos deles, tenham a propriedade postulada pelo axioma. (ii) o axioma deve ter consequências importantes tanto para a teoria dos conjuntos como para outras áreas da Matemática. Por serem, em geral, sentenças independentes, as propostas interessantes para novos axiomas, freqüentemente, produzem divergências sobre a aceitação do axioma ou sua negação. Isto ocorre, por exemplo, com a hipótese do contínuo que sabemos ser independente de

FEITOSA, Hércules de Araujo; LOCCI, Valter. O fazer matemático. *Mimesis*, Bauru, v. 22, n. 3, p. 63-81, 2001.



FEITOSA, Hércules de Araujo; LOCCI, Valter. O fazer matemático. *Mimesis*, Bauru, v. 22, n. 3, p. 63-81, 2001.

ZFC. A aceitação da hipótese do contínuo gera uma teoria de conjuntos cantoriana, por estar em acordo com as concepções de Cantor, enquanto que, se considerada a negação da hipótese do contínuo, temos uma teoria de conjuntos não cantoriana.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nestas considerações finais, gostaríamos de refletir sobre o papel deste fazer matemático. Entender este processo de criação matemática não parece ter sido um passo fácil e evidente, tanto que tratamos com temas matemáticos desde a Antiguidade, mas apenas nos dois últimos séculos conseguimos dar respostas mais significativas para as questões dos fundamentos da Matemática. Também vimos que a abordagem mais aceita para tal fundamentação, a teoria dos conjuntos, não é um tópico completamente elementar, mas pelo contrário, traz junto a si uma enorme complexidade abstrata.

No início do século XX, à medida que as abordagens fundamentacionais da Matemática foram se solidificando, houve uma acentuada interferência sobre o ensino da Matemática. À medida que se foi entendendo que a Matemática podia ser arquitetada na teoria dos conjuntos, foi-se, também, considerando que, para ensinar Matemática, bastaria ensinar conjuntos. Isto gerou e tem gerado uma série de controvérsias entre matemáticos que geram e ensinam Matemática sobre o que passou a ser denominado Matemática moderna. Entendemos que parte destes problemas se originam no equívoco de achar que, ao se tratar com os conjuntos, está-se contribuindo significativamente para as questões de ensino-aprendizagem da Matemática. Historicamente, não foi assim que o homem apreendeu Matemática e não parece ser esta a melhor maneira de comunicá-la às novas gerações.

Os pesquisadores dos fundamentos da Matemática estão interessados em entendê-la: o que é esta ciência, como se organiza, quais são os seus limites, o que dizer sobre sua consistência, saber se todos os seus problemas são solúveis, quais são os seus métodos. Se nos concentramos nos objetivos da fundamentação, certamente, encontramos um valor e uma beleza ímpar nos seus resultados. Neste caminho, buscamos entender o trabalho matemático, mas ao mesmo tempo novos problemas são criados e novos procedimentos de abordagem matemática são introduzidos. Podemos e devemos, nesta ótica, entender trabalhos como o do grupo Bourbaki, que trouxe para si a tarefa de mostrar que a Matemática contemporânea pode ser edificada a partir da teoria dos conjuntos e, portanto, esta é uma fundamentação aceitável para a Matemática. Contudo, o fazer matemático é muito dinâmico e, a cada momento, novas questões estão sendo coladas e outras respondidas.

## ABSTRACT

*This article aims at analysing the mathematical work. After showing a study of the development of geometry and its contributions to the foundations of mathematics, it presents the mathematics as an axiomatic system given by set theory.*

**Key Words:** axiomatic systems, geometry, deduction, set theory, mathematical foundation.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

- 1 ENDERTON, H. B. *Elements of set theory*. San Diego: Academic Press, 1977.
- 2 FRAENKEL, A. A.; Y. BAR-HILLEL; LEVY A. *Foundations of set theory*. 2ª Ed. Amsterdam: North-Holland, 1984.
- 3 HALMOS, P. *Teoria ingênua dos conjuntos*. São Paulo: Polígono/Edusp, 1970.
- 4 HRBACEK, K.; JECH, T. *Introduction to set theory*. 2ª ed. New York: Marcos Dekker, 1984.
- 5 WHITEHEAD, A. N.; RUSSEL, B. *Principia mathematica*. v. 1, 2 e 3. Cambridge: Cambridge University Press, 1910-1913.

## BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

- 1 BARBOSA, J. L. M. *Geometria euclidiana plana*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática/IMPA, 1995. (Coleção Professor de Matemática).
- 2 BELL, J. L.; MACHOVER, M. *A course in mathematical logic*. Amsterdam: North-Holland, 1977.
- 3 BOYER, C. B. *História da matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.
- 4 CARMO, M. P. Geometrias não-euclidianas. *Matemática Universitária*, Rio de Janeiro, n. 6, p. 25-48, 1987.
- 5 CHENIQUE, F. *Compreendre la logique moderne*. Tome 1. Paris: Dunod. 1974.
- 6 CORBEILLER, P. La curvatura del espacio. In: KLINE, M. (Ed.) *Matematicas en el Mundo Moderno*. Tradução de Miguel de Guzman Ozamis. Madrid: Blume, 1974. p. 144-150, 1954.

FEITOSA, Hércules de Araujo; LOCCI, Valter. O fazer matemático. *Mimesis*, Bauru, v. 22, n. 3, p. 63-81, 2001.

FEITOSA, Hércules de Araujo; LOCCI, Valter. O fazer matemático.

*Mimesis*, Bauru, v. 22, n. 3, p. 63-81, 2001.

- 7 COSTA, M. A. *As idéias fundamentais da matemática e outros ensaios*. São Paulo: Convívio, 1981. (Biblioteca do Pensamento Brasileiro; Textos; 4).
- 8 DAUBEN, J. W. *Georg Cantor: his mathematics and philosophy of the infinite*. Princeton: Princeton University Press, 1979.
- 9 DAVIS, P.J.; HERSH, R. *The mathematical experience*. Boston: Birkhauser, 1981.
- 10 EBBINGHAUS, H. D.; FLUM, J.; THOMAS, W. *Mathematical logic*. New York: Springer-Verlag, 1984.
- 11 HAMILTON, A. G. *Logic for mathematicians*. Cambridge: Cambridge University Press, 1978.
- 12 KLEENE, S. C. *Introduction to metamathematics*. Amsterdam: North-Holland, 1952.
- 13 KLINE, M. Geometria. In: KLINE, M. (Ed.) *Matemáticas en el Mundo Moderno*. Tradução de Miguel de Guzman Ozamis. Madrid: Blume, 1974. p. 126-136.
- 14 MENDELSON, E. *Introduction to mathematical logic*. Princeton: D. Van Nostrand, 1964.
- 15 ROCHA, L.F.C. Introdução à geometria hiperbólica plana. *16<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática*. Rio de Janeiro: IMPA, 1987.
- 16 SHOENFIELD, J. R. *Mathematical logic*. Reading: Addison-Wesley, 1967.