Quarta Lista de Exercícios – Geometria Analítica e Álgebra Linear (Transformações Lineares)

1. Determinar um operador linear em $\mathbb{R}^4$ cujo núcleo é gerado pelos vetores $(1,1,0,0)$ e $(0,0,1,0)$.

2. Mostre que as transformações lineares de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$, $T_1(x,y,z)=(0,y,z)$ e $T_2(x,y,z)=(0,z+y,z+2y)$ têm os mesmos núcleo e imagem.

3. Verifique se a aplicação T é transformação linear:

$$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, T(x,y)=(2x-y,0)$$

4. Determine a matriz associada a cada uma das seguintes transformações lineares, considerando a base canônica:

   a)$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, T(x,y)=(2x-y,0)$

   b)$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, T(x,y)=(2x-y,x)$

   c)$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, T(x,y,z)=(2x-y,0,y+z)$

   d)$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, T(x,y,z)=(0,0,y)$

5. Considere o espaço de matrizes reais quadradas de ordem 2, $M_2(\mathbb{R})$. Verifique quais das seguintes transformações são lineares:

   a) $T:M_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ tal que $T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d\end{vmatrix}$

   b) $T:M_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ tal que $T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}=2a+3b+c-d$

6. Seja T uma transformação linear em $\mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y,z)=(z,x-y,-z)$.

   a) Indique o núcleo de T, a sua dimensão e uma base.

   b) Determine a dimensão da imagem de $\mathbb{R}^3$ dada por T.

   c) T é sobrejetora? Justifique.

7. Seja T uma transformação linear do espaço P_2 dos polinômios reais de grau menor ou igual a 2 na variável x em $\mathbb{R}^3$, definida da seguinte forma:

$$T[p(x)]=(p(-1),p(0),p(1))$$

   a) Calcule $T(x^2+5x+6)$.

   b) Determine, se existir, $T^{-1}(0,3,0)$.

8. Seja T uma transformação linear do espaço P_2 em si próprio, definida por:

$$T(1)=1+x; T(x)=3-x^2; T(x^2)=4+2x-3x^2$$

   a) Calcule $T(2-2x+3x^2)$.

   b) A transformação T tem inversa? Justifique.

9. Seja T uma transformação linear em $\mathbb{R}^3$ definida por:
$T(x_1, x_2, x_3) = (a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3), a_i \in \mathbb{R}$ e $i = 1, 2, 3$ fixos.
Determine as condições que a_1, a_2 e a_3 devem satisfazer para T admitir inversa, e obtenha a expressão de T^{-1}.

10. Seja T uma transformação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$ definida por:

$$T(x) = (T_1(x), T_2(x))$$

com T_1 e T_2 transformações lineares de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}$. Mostre que T é transformação linear se e só se T_1 e T_2 são transformações lineares.

11. Seja P_2 o espaço vetorial dos polinômios de coeficientes reais de grau menor ou igual a 2. Considere a transformaçãp linear T, de P_2 em si mesmo, definida por

$$T[p(x)] = p(x + 1) - p(x).$$

a) Indique, justificando, uma base para a imagem de T.

b) Determine o núcleo da transformação linear T, a sua dimensão e uma base.

12. Determinar uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tal que a dimensão do núcleo é 2 e a dimensão da imagem é 3. É possível construir uma aplicação $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tal que a dimensão do núcleo é 2 e a dimensão da imagem é 2 ?

13. Considere o espaço vetorial real $M_n(\mathbb{R})$, das matrizes quadradas de ordem n. Seja T uma transformação definida em $M_n(\mathbb{R}) : T(A) = A - A^t, \forall A \in M_n(\mathbb{R})$, onde A^t é a transposta da matriz A.

a) Mostre que T é uma transformação linear.

b) Determine o núcleo de T, a sua dimensão e uma base.

c) Considere $n = 2$. Determine a matriz que representa a transformação linear T, supondo fixada a base canônica no espaço $M_2(\mathbb{R})$.

14. Seja T uma transformação linear em $\mathbb{R}^3$, onde
$T(1, 0, 0) = (10, 3, -1), T(0, 1, 0) = (5, 3, -4)$ e $T(0, 0, 1) = (4, 6, -10)$. Determine $T(v)$ onde $v = (9, -4, 9)$. Esta aplicação é um isomorfismo ?

15. O conjunto $U = \mathbb{R}^3$ é isomorfo ao conjunto $V = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^t = A\}$?

16. Dados $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$, e $v = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

u e v são autovetores de A?

17. Encontre o polinômio característico, autovalores e auto vetores de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

18. Verifique se 5 é um autovalor da matriz $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$?

19. Determine os autovalores, autoespaços e as multiplicidades algébrica e geométria de $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$

20. Se possível, diagonalize a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

21. Verifique se a matriz B é diagonalizável:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

22. Determine $T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2)$, onde T é a transformação linear de $\mathbb{P}_2$ em $\mathbb{P}_2$ cuja matriz relativa à base $B = (1, t, t^2)$ é $[T]_B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$

23. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

    Calcule A^8 usando autovalores e autovetores.

24. Seja

    $A = \begin{bmatrix} -3 & 12 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$, $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, e $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

    Suponha que seja dito que v_1 e v_2 são autovalores de A. Use a informação para diagonalizar A.

25. Seja A uma matriz 4×4 com atovalores $5, 3$ e -2 e suponha que você saiba que o auto-espaço para $\lambda = -2$ é bidimensional. Você tem informação suficiente para determinar se A é diagonalizável ? Justifique.