Terceira Lista de Exercícios $-$ Geometria Analítica e Álgebra Linear (Espaços Vetoriais)

1. Verifique se $V = \{f(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; y = x; z = w^2\}$ com as operações usuais de $\mathbb{R}^4$ é um espaço vetorial.

2. Considere $\mathbb{R}^2$ com a adição usual e amultiplicação por escalar dada por $c * (x_1, x_2) = (c.x_1, 0)$. O conjunto $\mathbb{R}^2$, com esta adição e esta multiplicação, é um espaço vetorial ?

3. Em $\mathbb{R}^3$, o conjunto dos vetores cuja soma das 3 coordenadas é zero, é um espaço vetorial ? E o conjunto dos vetores com terceira coordenada igual a 1 ?

4. Encontre o subespaço vetorial de $P_3(\mathbb{R})$ gerado por $S = \{1, t, t^2, 1 + t^3\}$.

5. Encontre o subespaço vetorial de $M_2(\mathbb{R})$ gerado por:
$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \right\}$$

6. Determine se os vetores dados são ou não linearmente independentes em $\mathbb{R}^2$.

   a) $v_1 = (2, 1)$ e $v_2 = (3, 2)$

   b) $v_1 = (-2, 1), v_2 = (1, 3)$ e $v_3 = (2, 4)$

7. Seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base de $\mathbb{R}^n$. Prove que $\{Av_1, \ldots, Av_n\}$ também é base de $\mathbb{R}^n$, onde A é uma matriz quadrada invertível de ordem n.

8. Dados $V = \mathbb{M}_{2\times 2}$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Os vetores v_1, v_2 e v_3 são linearmente independentes?

9. Indique se os vetores dados no exercício anterior formam ou não uma base para $\mathbb{R}^2$.

10. Determine uma base para o plano $x - 2y + 3z = 0$ em $\mathbb{R}^3$. A seguir, determine uma base para a intersecção deste plano com o plano xy. Por fim, determine uma base para o conjunto de todos os vetores perpendiculares ao primeiro plano.

11. Encontre a dimensão do subespaço de P_3 , gerado pelos vetores dados:

    $S = [x, -1 + x, 1 + x^2] \subset P_3$.

12. Dados $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é uma base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$

13. Verifique se os conjuntos dados, com as operações dadas formam um espaço vetorial sobre os reais. Justifique a sua resposta e, em caso positivo, exiba uma base e a dimensão:

    a) O conjunto da matrizes $M_{2\times 2}$, com a soma usual e a multiplicação dada por:

    $$m.\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ma & mb \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

    b) O conjunto dos polinômios de grau ≤ 3 cujos gráficos "passam por $(0,0)$"; com as operações usuais.

14. Considere $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\}$ e $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 5x\}$ Determine uma base para $V + W$ e uma para $V \cap W$.

15. Considere $B_1 = \{x, x^2, x^3\}$ e $B_2 = \{x - 3x^3, 2x^2 + x^3, x - x^2\}$, bases de um Espaço Vetorial P. Encontre a matriz que serve para mudar as coordenadas de um polinômio em P, de B_1 para B_2 .

16. Mostre que:

    a) $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + t = 0 \text{ e } z - t = 0\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^4$.

    b) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

17. Explique se$S = \{(x,y,z) \mid x = z^2\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

18. Mostre que $p(x) = x^3 - 5x^2 + 1, q(x) = 2x^4 + 5x - 6$ e $r(x) = x^2 - 5x + 2$ são vetores linearmente independentes.

19. Mostre que $B = \{1, x-1, x^2 - 3x + 1\}$ é base para P_2 e exprima $v = 2x^2 - 5x + 6$ como combinação linear dos elementos de B.

20. $S_1 = \{(a,b,c,d) \mid a + b + c + d = 0\}$ encontre $Dim(S_1)$.

21. Mostrar que o conjunto $\{1, sen^2x, cos^2x\}$ de vetores de $\mathbb{C}([-\pi, \pi])$ é L.D.

22. Achar a matriz mudança de base $B = \{(1,1,0),(0,1,0),(0,0,3)\}$ para a base canônica do $\mathbb{R}^3$.

23. Sejam $S = \{(-1,2,1);(0,1,1);(-2,2,1)\}$ e $T = \{(-1,1,0);(0,1,0);(0,1,1)\}$. Verifique que S e T são bases de $\mathbb{R}^3$ e se $v = (2,0,1)_S$, escreva as coordenadas de v em relação à base T. Resposta:$(4,-1,3)_T$

24. Considere o subconjunto de $\mathbb{P}_3$ dado por $S = \{t^3+t^2-2t+1, t^2+1, t^3-2t, 2t^3+3t^2-4t+3\}$. Encontre uma base para o espaço $W = [S]$. Qual a dimensão de W ? Resposta: dimensão de $W = 2$.