Primeira Lista de Exercícios – Geometria Analítica e Álgebra Linear (Sem 1/2014)

(1) Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n. Prove que

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \text{ e que } (A^{-1})^{-1} = A.$$

(2) Determine m de modo que a matriz dos coeficientes do sistema abaixo seja inversível. A seguir, resolvá-o.

$$\begin{cases} x & -y & +z & = & 2 \\ x & & +2z & = & 1 \\ x & +2y & +mz & = & 0. \end{cases}$$

(3) Se X_0 é solução de $AX = 0$ e X_1 é solução de $AX = B$, mostre que $X_0 + X_1$ é solução de $AX = B$.

(4) Verifique se a matriz abaixo é inversível e determine a sua inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

(5) Responda se o sistema abaixo é compatível, incompatível, determinado ou indeterminado. A seguir resolva o sistema.

$$\begin{cases} kx & -y & +kz & = & k \\ x & & +kz & = & 3 \\ kx & +ky & & = & 2. \end{cases}$$

(6) Dizemos que uma matriz quadrada A, de ordem n, é **simétrica** se $A = A^t$. Caso $A = -A^t$, dizemos que A é **anti-simétrica**. Prove que os elementos da diagonal principal de uma matriz anti-simétrica são todos iguais a zero.

(7) Pesquise na bibliografia a **Regra de Chió** para obtenção do determinante de matrizes. Com esta regra, calcule o determinante da

seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 5 & 6 \\ 1 & 10 & -4 & 5 \\ 3 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(8) Mostre que toda matriz anti-simétrica de ordem ímpar formada por números reais possui determinante nulo.

(9) Encontre todas as matrizes $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ que comutam com $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e com $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(10) Prove que $\begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$ é uma matriz ortogonal, isto é, $A^t = A^{-1}$.

(11) Resolva o sistema:

$$\begin{cases} x+y+z+t & = & 1 \\ 2x-y+z & = & 2 \\ -x+y-z-t & = & 0 \\ 2x+2z+t & = & -1. \end{cases}$$

pela regra de Cramer e também por escalonamento (escalonamento direto do sistema ou da matriz aumentada). Resposta: $(4, 1/2, -11/2, 2)$.

(12) Resolva o sistema:

$$\begin{cases} 2x-y-z+3t & = & 1 \\ x-z & = & 0 \\ -x+2y+z-t & = & 1 \\ 2x-y+2z-t & = & -2. \end{cases}$$

pela regra de Cramer e também por escalonamento (escalonamento direto do sistema ou da matriz aumentada).

Observação: Não se limite a estes exercícios. Tente fazer outros exercícios da bibliografia sugerida.