

Lista de exercícios.

AL. 1º sem. 2015

Prof. Fabiano Borges da Silva

1 Matrizes

Notações:

- $\mathbf{0}$ para matriz nula;
- $\mathbf{I}$ para matriz identidade;

1. Conhecendo-se somente os produtos AB e AC , calcule

- $A(B + C)$
- $B^t A^t$
- $C^t A^t$
- $(ABA)C$

2. Mostre que as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha} \\ \alpha & 1 \end{pmatrix},$$

em que α é um número real não nulo, verificam a equação

$$X^2 = 2X.$$

3. Mostre que se A e B são matrizes que comutam com a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

então $AB = BA$.

4. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Calcule os membros da sequência $A, A^2, \dots, A^k, \dots$. A sequência parece estar convergindo para alguma matriz? Se estiver, para qual?

5. Se $A^2 = \mathbf{0}$ então $A = \mathbf{0}$? Justifique.
6. Mostre que se A e B são matrizes simétricas, então $A + B$ e αA são matrizes simétricas para todo escalar α .
7. Mostre que se A e B são matrizes simétricas, então AB é simétrica se, e somente se, $AB = BA$.
8. Mostre que para toda matriz A , $A + A^t$ é simétrica e $A - A^t$ é anti-simétrica.
9. Mostre que toda matriz A pode ser escrita como soma de uma matriz simétrica e uma anti-simétrica.
10. Seja $\mathfrak{O}$ conjunto das matrizes X , tais que $XX^t = I$. Sabendo que $A, B \in \mathfrak{O}$ mostre que $AB \in \mathfrak{O}$. Dê exemplo de 4 matrizes deste conjunto $\mathfrak{O}$.
11. Seja $\mathfrak{A}$ o conjunto das matrizes X tais que $X + X^t = \mathbf{0}$. Sabendo que $A, B \in \mathfrak{A}$ mostre que $A + B \in \mathfrak{A}$. Dê exemplo de 4 matrizes deste conjunto $\mathfrak{A}$.
12. Sendo

$$J = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$
 Calcule $J^2, J^3, J^4, J^5 e J^{1000}$.
13. Seja Sp o conjunto das matrizes X tais que $XJ + JX^t = \mathbf{0}$. Sabendo que $A, B \in \text{Sp}$ mostre que $A + B \in \text{Sp}$. Dê exemplo de 4 matrizes deste conjunto Sp .
14. Mostre que $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ para matrizes 2×2 .
15. Mostre que $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$. E que $\text{tr}(A^t) = \text{tr}(A)$.
16. Use o traço para mostrar que se $AA^t = \mathbf{0}$ então $A = \mathbf{0}$.

1.1 Matrizes invertíveis.

1. Suponha que A é uma matriz tal que $A^3 = \mathbf{0}$. Mostre que a inversa de $\mathbf{I} - A$ é a matriz $\mathbf{I} + A + A^2$.

2. Mostre que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

é invertível se, e somente se, $ad - bc \neq 0$ e neste caso

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3. Mostre que se $A + B$ e A são matrizes (quadradas) invertíveis, então

$$(A + B)^{-1} = A^{-1}(\mathbf{I} + BA^{-1})^{-1}.$$

4. Seja A uma matriz $n \times n$, cujas entradas são iguais a 1. Mostre que se $n > 1$ então

$$(\mathbf{I} - A)^{-1} = \mathbf{I} - \frac{1}{n-1}A.$$

Sugestão: observe que $A^2 = nA$.

5. Determine A^{-1} se

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha^2 \\ 2 & 2 & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

2 Espaço Vetorial

1. Considere o conjunto $V = (0, +\infty)$. Verifique que V com as operações usuais para a soma e multiplicação por escalar não é um espaço vetorial. Considere agora a soma entre x e y dada por $x \oplus y = xy$ e o produto de x pelo escalar a dada por $a \otimes x = x^a$. Verifique que $(V, \oplus, \otimes)$ é um espaço vetorial. Note que neste caso 1 é o elemento neutro para a adição.

2. Verifique se em cada um dos itens o conjunto V com as operações indicadas é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

(a) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5x - 7y = 0\}$, operações usuais de $\mathbb{R}^2$.

(b) $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(-x) = f(x)\}$, operações usuais de funções.

(c) $V = \mathbb{R}^2$,

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (3x_1 - 3y_1, y_1 - x_1),$$

$$a(x, y) = (3ax, -ax).$$

(d) $V = \mathbb{R}^2$,

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 - y_2),$$

$$a(x, y) = (ax, 0).$$

(e) $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y = x, z = w^4\}$, operações usuais de $\mathbb{R}^4$.

(f) $V = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$,

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 y_2),$$

$$a(x, y) = (ax, x^a).$$

3. Verifique que o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ com as operações usuais é um espaço vetorial.
4. Seja X um conjunto qualquer. Verifique que o conjunto de todas as funções $F(X, \mathbb{R}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é função}\}$ com a soma e produto por escalar usuais (visto em sala de aula) é espaço vetorial.
5. Verifique que o subconjunto das funções contínuas $C(X, \mathbb{R}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é função contínua}\}$ é um subespaço vetorial de $F(X, \mathbb{R})$.
6. Verifique que o conjunto das matrizes reais $M(m \times n)$ é um espaço vetorial com a soma e produto por escalar usuais.
7. Quais dos seguintes subconjuntos são subespaços vetoriais de $M(n \times n)$?
- (a) O conjunto das matrizes de traço nulo.
- (b) O conjunto das matrizes simétricas.

- (c) O conjunto das matrizes anti-simétricas.
- (d) O conjunto das matrizes $X \in M(2m \times 2m)$ tal que $XJ + JX^t = \mathbf{0}$, onde J é escrita em blocos $m \times m$ como

$$J = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -I \\ I & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

- (e) O conjunto das matrizes cujo determinante é igual a 1.
- (f) O conjunto das matrizes cujo determinante é igual a 0.

8. Quais dos seguintes subconjuntos são subespaços vetoriais?

- (a) O conjunto $X \subset \mathbb{R}^3$ formado pelos vetores $v = (x, y, z)$ tais que $z = 2y$ e $x = 5y$.
- (b) O conjunto $Y \subset \mathbb{R}^3$ formado pelos vetores $v = (x, y, z)$ tais que $xy = 0$.
- (c) O conjunto $F \subset F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ formado pelas funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(x+2) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- (d) O conjunto dos vetores de $\mathbb{R}^7$ que têm duas coordenadas nulas.
- (e) O conjunto dos vetores de $\mathbb{R}^n$ cujas coordenadas formam uma progressão aritmética.
- (f) O conjunto dos vetores de $\mathbb{R}^n$ cujas coordenadas formam uma progressão geométrica.

Abaixo segue os primeiros exercícios da seção 4.8 do Livro de A.L. (Boldrini, S. Costa, Figueiredo e Wetzter).

9. Mostre que os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^4$ são subespaços:

(a) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y = 0, z - t = 0\}$

(b) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | 2x + y - t = 0, z = 0\}$

10. Responda se os subconjuntos abaixo são subespaços de $M(2, 2)$. Em caso afirmativo, exiba os geradores:

(a) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ com } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } b = c \right\}$

(b) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ com } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } b = c + 1 \right\}$

11. Verifique se os conjuntos abaixo são espaços vetoriais reais, com as operações usuais. No caso afirmativo, exiba a base e dê a dimensão:

(a) matrizes diagonais $n \times n$

(b) matrizes escalares $n \times n$

(c) $\left\{ \begin{bmatrix} a & a+b \\ a & b \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \right\}$

(d) $V = \{(a, a, \dots, a) \in \mathbb{R}^n; a \in \mathbb{R}\}$

(e) $\{(1, a, b); a, b \in \mathbb{R}\}$

(f) a reta $\{(x, x+3); x \in \mathbb{R}\}$

(g) $\{(a, 2a, 3a); a \in \mathbb{R}\}$

12. Considere o subespaço de $\mathbb{R}^4$,

$$S = [(1, 1, -2, 4), (1, 1, -1, 2), (1, 4, -4, 8)].$$

(a) O vetor $\left(\frac{2}{3}, 1, -1, 2\right)$ pertence a S ?

(b) O vetor $(0, 0, 1, 1)$ pertence a S ?

13. Seja W o subespaço de $M(3, 2)$ gerado por $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. O vetor $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ pertence a W ?
14. Mostre que $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é base de $M(2, 2)$.
15. Escreva uma base para o espaço vetorial das matrizes $n \times n$. Qual a dimensão deste espaço?
16. Quais são as coordenadas de $x = (1, 0, 0)$ em relação à base $\beta = \{(1, 1, 1), (-1, 1, 0), (1, 0, -1)\}$?
17. Qual seria uma base "natural" para P_n ? Qual a dimensão deste espaço?
18. Mostre que os polinômios $1 - t^3$, $(1 - t)^2$, $1 - t$ e 1 geram o espaço P_3 .
19. Considere $[-a, a]$ um intervalo simétrico e $C^1[-a, a]$ o conjunto das funções reais definidas no intervalo $[-a, a]$ que possuem derivadas contínuas no intervalo. Sejam ainda os subconjuntos $V_1 = \{f(x) \in C^1[-a, a]; f(-x) = f(x), \forall x \in [-a, a]\}$ e $V_2 = \{f(x) \in C^1[-a, a]; f(-x) = -f(x), \forall x \in [-a, a]\}$.
- Mostre que $C^1[-a, a]$ é um espaço vetorial real
 - Mostre que V_1 e V_2 são subespaços de $C^1[-a, a]$
 - Mostre que $V_1 \oplus V_2 = C^1[-a, a]$
20. Seja V o espaço das matrizes 2×2 sobre $\mathbb{R}$, e seja W o subespaço gerado por
- $$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$
- Encontre uma base e a dimensão de W .
21. Seja P o conjunto de todos os polinômios (de qualquer grau) com coeficientes reais. Existe uma base finita para este espaço? Encontre uma "base" para P .

22. Considere o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, -1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 0, 1, 1)$, $v_3 = (-2, 2, 1, 1)$ e $v_4 = (1, 0, 0, 0)$.
- (a) O vetor $(2, -3, 2, 2) \in [v_1, v_2, v_3, v_4]$? Justifique.
 - (b) Exiba uma base para $[v_1, v_2, v_3, v_4]$. Qual é a dimensão?
 - (c) $[v_1, v_2, v_3, v_4] = \mathbb{R}^4$? Por quê?