Lista de exercícios. GA e AL. 1° **sem. 2016**
Prof. Fabiano Borges da Silva

1 Matrizes

Notações:

- $\mathbf{0}$ para matriz nula;
- $\mathbf{I}$ para matriz identidade;

1. Mostre que as matrizes
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha} \\ \alpha & \mathbf{1} \end{pmatrix},$$
em que α é um número real não nulo, verificam a equação
$$X^2 = 2X.$$

2. Mostre que se A e B são matrizes que comutam com a matriz
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$
então $AB = BA$.

3. Considere a matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$
Calcule os membros da sequência $A, A^2, ..., A^k, ...$ A sequência parece estar convergindo para alguma matriz? Se estiver, para qual?

4. Se $A^2 = \mathbf{0}$ então $A = \mathbf{0}$? Justifique.

5. Mostre que se A e B são matrizes simétricas, então $A + B$ e αA são matrizes simétricas para todo escalar α.

6. Mostre que se A e B são matrizes simétricas, então AB é simétrica se, e somente se, $AB = BA$.

7. Mostre que para toda matriz A, $A + A^t$ é simétrica e $A - A^t$ é anti-simétrica.

8. Mostre que toda matriz A pode ser escrita como soma de uma matriz simétrica e uma anti-simétrica.

9. Seja $\mathfrak{A}$ o conjunto das matrizes X tais que $X + X^t = \mathbf{0}$. Sabendo que $A, B \in \mathfrak{A}$ mostre que $A + B \in \mathfrak{A}$. Dê exemplo de 4 matrizes deste conjunto $\mathfrak{A}$.

10. Sendo
$$J = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$
Calcule $J^2, J^3, J^4, J^5 e J^{1000}$.

11. Seja Sp o conjunto das matrizes X tais que $XJ + JX^t = \mathbf{0}$. Sabendo que $A, B \in \mathrm{Sp}$ mostre que $A + B \in \mathrm{Sp}$. .

12. Mostre que $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$. E que $tr(A^t) = tr(A)$.

13. Mostre que se $AA^t = \mathbf{0}$ então $A = \mathbf{0}$. (Dica: analise $tr(AA^t)$).

1.1 Matrizes invertíveis.

1. Suponha que A é uma matriz tal que $A^3 = \mathbf{0}$. Mostre que a inversa de $\mathbf{I} - A$ é a matriz $\mathbf{I} + A + A^2$.

2. Mostre que
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
é invertível se, e somente se, $ad - bc \neq 0$ e neste caso
$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3. Mostre que se $A + B$ e A são matrizes (quadradas) invertíveis, então
$$(A + B)^{-1} = A^{-1}(\mathbf{I} + BA^{-1})^{-1}.$$

4. Seja A uma matriz $n \times n$, cujas entradas são iguais a 1. Mostre que se $n > 1$ então
$$(\mathbf{I} - A)^{-1} = \mathbf{I} - \frac{1}{n-1} A.$$
Sugestão: observe que $A^2 = nA$.

5. Determine A^{-1} se
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha^2 \\ 2 & 2 & \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

6. Calcule o determinante da matriz
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$
usando as propriedades vistas em sala de aula. Diga se A tem inversa (obs: não precisa determinar a inversa!!!).