TEORIA DOS CONJUNTOS

Turma: 0004105A - Licenciatura em Matemática
1° Semestre de 2014

Prof. Dr. Agnaldo José Ferrari

OS NÚMEROS NATURAIS

Os números naturais

Os números naturais

Em 1908 Ernst Zermelo (Alemanha / $1871 - 1953$) propôs usar a sequência

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \cdots$$

como sendo os números naturais.
Em seguida, John Von Neumann (Hungria / $1903 - 1957$) propôs uma alternativa que tem sido o padrão.

Os números naturais

Cada número natural é o conjunto de todos os números naturais menores do que ele.

Os números naturais

Cada número natural é o conjunto de todos os números naturais menores do que ele

$$
\begin{aligned}
&0 := \emptyset,\\
&1 := \{0\} = \{\emptyset\},\\
&2 := \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\\
&3 := \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\},\\
&4 := \{0, 1, 2, 3\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\},\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Os números naturais

Definição

Para um conjunto $\mathbf{a}$, seu **sucessor**, denotado por $\mathbf{a}^+$, é definido por

$$\mathbf{a}^+ = \mathbf{a} \cup \{\mathbf{a}\}$$

Os números naturais

Definição

Para um conjunto $\mathbf{a}$, seu **sucessor**, denotado por $\mathbf{a}^+$, é definido por

$$\mathbf{a}^+ = \mathbf{a} \cup \{\mathbf{a}\}$$

Definição

Um conjunto A é **indutivo** quando $\emptyset \in A$ e é fechado para a operação sucessor, isto é, se $a \in A$ então $a^+ \in A$.

Os números naturais

No conjunto dos números naturais definido anteriormente temos:

$$\begin{aligned}
&0^+ = 0 \cup \{0\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} = 1,\\
&1^+ = 1 \cup \{1\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = 2,\\
&2^+ = 2 \cup \{2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = 3,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Para todo conjunto a, $a^{++} = (a^+)^+$, $a^{+++} = (a^{++})^+$ e assim por diante.

Os números naturais

Teorema 1

Existe um conjunto cujos elementos são exatamente os números naturais.

Pelo Axioma do Infinito [$\exists a\ (\emptyset \in a \wedge \forall x\ (x \in a \rightarrow x^+ \in a))$] existe um conjunto indutivo A e pelo Axioma Esquema da Compreensão [$\forall y\ \exists a\ (x \in a \leftrightarrow x \in y \wedge P(x))$, onde $P(x)$ significa que x satisfaz a propriedade P] existe um conjunto w tal que para todo x,

$$x \in w \leftrightarrow x \in A \wedge \text{ (x pertence a todos os outros conjuntos indutivos)}$$

Portanto,

$$x \in w \leftrightarrow x \text{ pertence a todo conjunto indutivo.}$$

Os números naturais

Definição

Cada número natural é um conjunto que pertence a todo conjunto indutivo (ou $x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x$ pertence a todo conjunto indutivo)

Teorema 2

O conjunto $\mathbb{N}$ é indutivo e é um subconjunto de todos os outros conjuntos indutivos.

Os números naturais

Definição

Cada número natural é um conjunto que pertence a todo conjunto indutivo (ou $x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x$ pertence a todo conjunto indutivo)

Teorema 2

O conjunto $\mathbb{N}$ é indutivo e é um subconjunto de todos os outros conjuntos indutivos.

Demonstração: O conjunto $\emptyset$ pertence a $\mathbb{N}$, pois $\emptyset$ pertence a todo conjunto indutivo. Além disso, se $a \in \mathbb{N}$, por definição, a pertence a todo conjunto indutivo, logo a^+ pertence a todo conjunto indutivo, ou seja, $a^+ \in \mathbb{N}$. Portanto, $\mathbb{N}$ é indutivo e por definição $\mathbb{N}$ está contido em todos os outros conjuntos indutivos.

Os números naturais

Teorema 3

Todo número natural, com excessão do zero é sucessor de algum número natural.

Demonstração:

Vimos que $1 = 0^+$, $2 = 1^+$, $3 = 2^+$, $4 = 3^+$ e assim por diante. Mas, a afirmação: $\exists p \in \mathbb{N}$ tal que $0 = p^+$ é falsa, uma vez que não existe p cujo sucessor seja o conjunto $\emptyset$.

Principio da Indução

Todo subconjunto indutivo de $\mathbb{N}$ coincide com $\mathbb{N}$.
(Se $B \subseteq \mathbb{N}$, $0 \in B$ e se $a \in B$ implicar que $a^+ \in B$, então $B = \mathbb{N}$)

Demonstração:

Se B é um subconjunto indutivo de $\mathbb{N}$, então $B \subseteq \mathbb{N}$, e pelo Teorema 2 temos que $\mathbb{N} \subseteq B$, portanto $B = \mathbb{N}$.

Os números naturais

Observação

Para se demonstrar que uma propriedade referente a $\mathbb{N}$ vale para todos eles, aplicamos o Princípio da Indução. Para provar que $\forall n \in \mathbb{N}$ vale a propriedade $Q(n)$ verifica-se:
(i) $Q(0)$ é válida;
(ii) Se vale $Q(n)$, para $n \in \mathbb{N}$, então vale $Q(n^+)$.

Exemplo 1

Para todo $n \in \mathbb{N}$, $9^n - 1$ é divisivel por 8.

(i) $Q(0)$ é válida, uma vez que $9^0 - 1 = 0$ e 0 é divisível por 8.
(ii) Suponhamos que $Q(n)$ é válida, isto é, $9^n - 1$ é divisivel por 8, logo, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $9^n - 1 = 8k$.
(iii) Mostremos agora que $Q(n^+)$ é válida.
$9^{n^+} - 1 = 9^{n+1} - 1 = 9^n 9 - 1 = 9^n 9 - 9 + 8 = 9(9^n - 1) + 8 =$
$= 9(8k) + 8 = 8(9k + 1)$. Portanto, $Q(n^+)$ é válida.

Os números naturais

Exemplo 2

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq n+1,\ \forall n\geq 1.$$

(i) $Q(1)$ é válida, uma vez que $\left(1+\frac{1}{1}\right)=1+1$.
(ii) Suponhamos que $Q(n)$ é válida, isto é,

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq n+1 \quad (\star)$$

(iii) Mostremos agora que $Q(n^+)$ é válida.

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\overset{(\star)}{\leq} n+1\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=(n+1)+1.$$

Exemplo 3

Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, então $A^n = 5^{n-1}A$, para todo $n \geq 1$.

(i) $Q(1)$ é válida, uma vez que $A^1 = A = 5^{1-1}A$.
(ii) Suponhamos que $Q(n)$ é válida, isto é, $A^n = 5^{n-1}A$.
(iii) Mostremos agora que $Q(n^+)$ é válida.

$$\begin{aligned} A^{n^+} &= A^{n+1} = A^nA = (5^{n-1}A)A = 5^{n-1}(AA) = \\ &= 5^{n-1}\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} = 5^{n-1}5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 5^{(n+1)-1}A. \end{aligned}$$

Portanto, $Q(n^+)$ é válida.

Postulados de Peano

Em 1889, Giuseppe Peano (Itália / $1858 - 1932$) publicou um trabalho em que os números naturais são apresentados através de um pequeno número de axiomas conhecidos como Postulados de Peano.

Postulados de Peano

Definição

Seja s uma função e $A \subseteq Dom(s)$. O conjunto A é fechado segundo s (ou para s) quando $x \in A$ implicar $s(x) \in A$.
(A fechado $\Rightarrow s(A) \subseteq A$)

Postulados de Peano

Definição

Seja s uma função e $A \subseteq Dom(s)$. O conjunto A é fechado segundo s (ou para s) quando $x \in A$ implicar $s(x) \in A$.
(A fechado $\Rightarrow s(A) \subseteq A$)

Definição

Um sistema de Peano é uma terna (N, s, c), em que N é um conjunto, s é uma função $s : N \to N$ e c é um elemento de N tal que:

(i) $c \notin Im(s)$;
(ii) s é injetiva;
(iii) Qualquer subconjunto A de N que contém c e é fechado segundo s coincide com o conjunto N.

A condição (iii) é conhecida como Postulado da indução de Peano.

Postulados de Peano

Definição

Um conjunto A é transitivo quando todo elemento de um elemento de A é também elemento de A, isto é,

$$x \in a \ \wedge \ a \in A \Rightarrow x \in A$$

Exemplo

O conjunto $\emptyset$ é transitivo.

Demonstração:

Para provarmos tal afirmação, devemos ter

$$x \in a \ \wedge \ a \in \emptyset \Rightarrow x \in \emptyset$$

Como a sentença acima não pode ser verificada, podemos afirmar que o conjunto $\emptyset$ não contraria a definição de ser transitivo. Portanto, $\emptyset$ é transitivo.

Postulado de Peano

Exercício resolvido

(i) Se A é um conjunto transitivo, então $\cup A \subseteq A$.
(ii) Se $\cup A \subseteq A$ e $a \in A$, então $a \subseteq A$.
(iii) Se $a \in A$ implicar que $a \subseteq A$ então $A \subseteq \mathcal{P}(A)$.

Solução:

(i) Se $x \in \cup A \Rightarrow (\exists b \in A)(x \in b) \Rightarrow x \in b \ \wedge \ b \in A \stackrel{\text{Hip}}{\Longrightarrow} x \in A$.
Portanto, $\cup A \subseteq A$.

(ii) Se $x \in a$ e $a \in A \Rightarrow x \in \cup A \stackrel{\text{Hip}}{\Longrightarrow} x \in A$.
Portanto, $a \subseteq A$.

(iii) Se $x \in A \stackrel{\text{Hip}}{\Longrightarrow} x \subseteq A \Rightarrow x \in \mathcal{P}(A)$.
Portanto, $A \subseteq \mathcal{P}(A)$