

5. (2.0) Seja $*$ uma operação sobre $\mathbb{R}$ tal que dados $x, y \in \mathbb{R}$, temos que

$$x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

- (i) Mostre que a operação $*$ satisfaz a propriedade associativa.
- (ii) Encontre o elemento neutro da operação $*$.
- (iii) Determine o conjunto dos elementos simetrizáveis segundo a operação $*$.

$$(i) \quad x * (y * z) = \sqrt[3]{x^3 + (y * z)^3} = \sqrt[3]{x^3 + (\sqrt[3]{y^3 + z^3})^3} = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3} = \\ = \sqrt[3]{(\sqrt[3]{x^3 + y^3})^3 + z^3} = \sqrt[3]{(x * y)^3 + z^3} = (x * y) * z.$$

$$(ii) \quad x * e = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3 + e^3} = x \Leftrightarrow x^3 + e^3 = x^3 \Leftrightarrow e^3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{e = 0}$$

elemento neutro: 0

$$(iii) \quad x * x' = e = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3 + (x')^3} = 0 \Leftrightarrow x^3 + (x')^3 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x')^3 = -x^3 \Leftrightarrow x' = \sqrt[3]{-x^3} = \sqrt[3]{(-x)^3} = -x$$

Portanto, dado $x \in \mathbb{R}$, x é simetrizável e $x' = -x$.

Assim, o conjunto S (dos elementos simetrizáveis) é dado por:

$$S = \{x; x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.$$