

4. (1.5) Seja R uma relação reflexiva sobre um conjunto E com as seguintes propriedades:

(i) $\text{Dom}(R) = E$.

(ii) $(\forall a, b, c \in E)(aRc \text{ e } bRc \Rightarrow aRb)$

Mostre que R é uma relação de equivalência.

(a) R é reflexiva (hipótese) e $\text{Dom}(R) = E$, então $\forall a \in E, aRa$

(b) Sejam $a, b \in E$ tais que aRb , como R é reflexiva, então bRb

Assim,

$$bRb \text{ e } aRb \xRightarrow{(i)} bRa \quad \therefore R \text{ é simétrica}$$

Portanto, $aRb \Rightarrow bRa$

(c) Sejam $a, b, c \in E$ tais que aRb e bRc , assim, como R é simétrica, temos que cRb , logo

$$aRb \text{ e } cRb \xRightarrow[\text{hip.}]{(ii)} aRc$$

Portanto, $aRb \text{ e } bRc \Rightarrow aRc \quad \therefore R \text{ é transitiva}$

De (a), (b) e (c), concluímos que R é uma relação de equivalência.