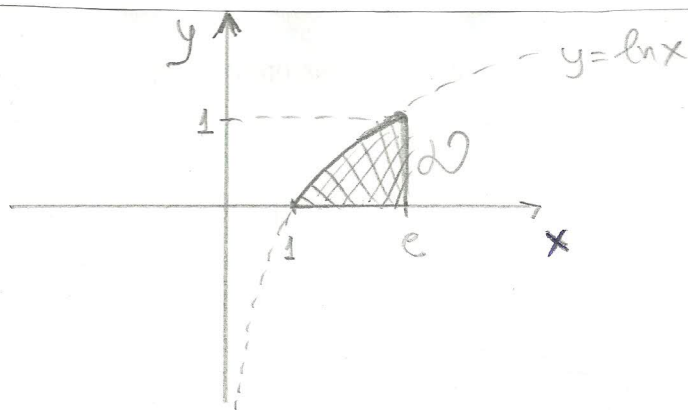


1. (2.0) Calcule $\int_D \int y \, dA$, onde D é a região delimitada pelas curvas $y = \ln x$, $x = e$ e $y = 0$.

$$y = \ln x$$

$$\begin{cases} x=1 \Rightarrow y = \ln 1 = 0 \\ x=e \Rightarrow y = \ln e = 1 \end{cases}$$



A integral foi montada levando-se em conta que a região foi descrita como uma região do tipo 1.

Porém,

$$\int_1^e \int_0^{\ln x} y \, dy \, dx = \int_1^e \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^{\ln x} dx = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{2} dx$$

Qual é a primitiva?

Descrevendo como região do tipo 2:

$$y = \ln x = \log_e x \Leftrightarrow x = e^y, \text{ assim}$$

$$D: \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ e^y \leq x \leq e \end{cases} \quad (\text{Tipo 2})$$

$$\begin{aligned} \text{Logo, } \int_1^e \int_0^{\ln x} y \, dy \, dx &= \int_0^1 \int_{e^y}^e y \, dx \, dy = \int_0^1 yx \Big|_{e^y}^e dy = \\ &= \int_0^1 ye - ye^y dy = \int_0^1 ye dy - \int_0^1 ye^y dy \stackrel{(*)}{=} \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 - (ye^y - e^y \Big|_0^1) = \\ &= \frac{e}{2} - \frac{1}{2}e(1e^1 - e^0) - (0e^0 - e^0) = \\ &= \frac{e}{2} - 1 \end{aligned}$$

Integração por partes:

$$\begin{cases} u = e^y \\ dv = dy \\ \Downarrow \\ v = y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int u dv = uv - \int v du \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^y dy = ye^y - \int ye^y dy \Rightarrow \int ye^y dy = ye^y - e^y + C \quad (*)$$