# Conjunto de Problemas 1

Nos problemas 1 a 4, calcule os primeiros seis termos de cada seqüência. Calcule também o 100.º.

**1** $\{n^2+1\}$ **2** $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right\}$ **3** $\left\{\frac{n}{n^2+5}\right\}$ **4** $\left\{2+\frac{1}{n}\right\}$

Nos problemas 5 a 8, encontre a expressão do termo geral ($n$-ésimo termo) de cada seqüência.

**5** $1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots$ **6** $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ **7** $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$ **8** $1, 9, 25, 49, 81, 121, \ldots$

Nos problemas 9 a 26, determine se cada seqüência converge ou diverge. Se convergir, calcule seu limite.

**9** $\left\{\frac{100}{n}\right\}$ **10** $\left\{\frac{n^2}{5n^2+1}\right\}$ **11** $\left\{\frac{n^3-5n}{7n^3+2n}\right\}$

**12** $\left\{\frac{2n^2+1}{9n^2+5}\right\}$ **13** $\left\{\frac{5n^2}{3n+1}\right\}$ **14** $\left\{\frac{(-1)^n}{10^n}\right\}$.

**15** $\left\{\frac{2n^2+n}{n+1}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}\right\}$ **16** $\left\{\frac{e^n+e^{-n}}{e^n-e^{-n}}\right\}$ **17** $\left\{\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right\}$

**18** $\{1+(\frac{1}{3})^n-(\frac{2}{3})^n\}$ **19** $\left\{\frac{\ln(1/n)}{\ln(n+4)}\right\}$ **20** $\{\ln(e^n+2)-\ln(e^n+1)\}$

**21** $\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}-n}\right\}$ **22** $\{\ln(e^n+2)-n\}$ **23** $\{n^{1/\sqrt{n}}\}$

**24** $\{n^{1/n^2}\}$ **25** $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ **26** $\left\{\left(1+\frac{5}{n}\right)^n\right\}$

Nos problemas 27 a 38, diga se cada seqüência é crescente, decrescente ou não-monótona e também se é limitada superiormente ou inferiormente. Indique se a seqüência é convergente ou divergente.

**27** $\left\{\frac{2n+1}{3n+2}\right\}$ **28** $\{\operatorname{sen} n\pi\}$ **29** $\{3^n-n\}$

**30** $\left\{\frac{3^n}{1+3^n}\right\}$ **31** $\{(-1)^{n^2}\}$ **32** $\left\{\frac{3n^4}{n+3^n}\right\}$

**33** $\left\{\frac{(-1)^n n}{n+1}\right\}$ **34** $\{\sqrt{n+4}-\sqrt{n+3}\}$ **35** $\left\{1-\frac{2^n}{n}\right\}$

**36** $\left\{\frac{n^n}{n!}\right\}$ **37** $\left\{\frac{\operatorname{sen}(n\pi/4)}{n}\right\}$ **38** $\left\{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{n!}\right\}$

**39** Dê um exemplo para mostrar que a soma $\{a_n+b_n\}$ de duas seqüências não-limitadas $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ pode ser uma seqüência limitada.

**40** (a) Calcule os primeiros seis termos da seqüência

$$\{n+(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)\}.$$

(b) Qual é o sétimo termo da seqüência na parte (a)?
(c) O que você pode concluir sobre a determinação do termo geral da seqüência através de um exame de uns primeiros poucos termos?

**41** Conclua sobre a convergência ou divergência da seqüência $\{a^n\}$ nos seguintes casos:

17

# Conjunto de Problemas 2

Nos problemas 1 a 6, calcule os primeiros cinco termos de cada série, e então calcule os cinco primeiros termos da seqüência $\{s_n\}$ de suas somas parciais. Encontre uma fórmula "simples" para $n$-ésima soma parcial $s_n$ em função de $n$, determine se a série converge ou diverge e, se convergir, encontre sua soma $S = \lim\limits_{n \to +\infty} s_n$.

**1** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ **2** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 - \dfrac{2}{2k+3}\right)$ **3** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k(k+1)$

**4** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2+2k}$ **5** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$ **6** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{3^{k-1}}{5^k}$

Nos problemas 7 a 12, encontre a série infinita com a seqüência de somas parciais dada, determine se a série converge ou diverge e, se convergir, encontre sua soma.

**7** $\{s_n\} = \left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ **8** $\{s_n\} = \left\{\dfrac{2n}{n+5}\right\}$ **9** $\{s_n\} = \left\{\dfrac{2n^2}{3n+5}\right\}$

**10** $\{s_n\} = \{n\}$ **11** $\{s_n\} = \{1 - (-1)^n\}$ **12** $\{s_n\} = \left\{2 - \dfrac{1}{2^{n-1}}\right\}$

Nos problemas 13 a 21, encontre o termo inicial $a$ e a razão $r$ de cada série geométrica, determine se a série converge e, se convergir, encontre sua soma.

**13** $1 + \dfrac{2}{7} + \dfrac{4}{49} + \dfrac{8}{343} + \cdots$ **14** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{9}{10}\right)^{k+1}$

**15** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{7}{6}\right)^{k}$ **16** $-\dfrac{5}{8} + \dfrac{25}{64} - \dfrac{125}{512} + \dfrac{625}{4096} - \cdots$

**17** $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ **18** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{1-k}$

**19** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{3^{k-1}}{4^{k+1}}$ **20** $0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + 0{,}0009 + \cdots$

**21** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 5^{-k}$

**22** A série $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n-1} + \ldots$ é geométrica com razão $r = -1$; daí, diverge. Assim, o cálculo $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n-1} + \ldots = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$ deve estar errado. O que há de errado nesse cálculo?

Nos problemas 23 a 26, expresse cada dízima periódica como razão de números inteiros pelo uso de séries geométricas apropriadas.

**23** 0,33333... **24** 1,11111... **25** 4,717171... **26** 15,712712712...

**27** É verdade que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$? Explique.

**28** Encontre $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^4} + \dfrac{1}{3^6} + \cdots + \dfrac{1}{3^{2n}}\right)$.

**29** No jogo de dados, a probabilidade de que o lançador vença (isto é, consiga 7 ou 11 na primeira jogada ou consiga um número diferente de 2, 3 ou 12, então, numa jogada sucessiva, consiga esse número antes conseguindo um 7) é dada pela dízima periódica 0,4929292929... Expresse essa probabilidade como a razão de dois números inteiros.

**30** Um recipiente contém originalmente 10 gramas de sal dissolvidos em 1000 centímetros cúbicos de água. O seguinte procedimento é feito repetidamente: 250 centímetros cúbicos de água salgada são derramados, substituídos por 250 centímetros cúbicos de água pura, e a solução é inteiramente agitada.

(a) Depois de se repetir esse procedimento $n$ vezes, quantos gramas de sal foram removidos do recipiente?

18

série converge se a seqüência $\{s_n\}$ das somas parciais $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k \cdot 2^k}$ for limitada. Observe que $\frac{k-1}{k} < 1$, assim

$$\frac{k-1}{k \cdot 2^k} = \frac{k-1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k < \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Portanto,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k \cdot 2^k} < \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1,$$

logo $\{s_n\}$ é limitada superiormente por $M = 1$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k \cdot 2^k}$ converge.

# Conjunto de Problemas 3

Nos problemas 1 a 8, mostre que cada série diverge mostrando que o termo geral não tem limite zero.

1 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{5k+7}$

2 $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{5k}{12k+5}\right)$

3 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2+5k}{7k^2+13k+2}$

4 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{3e^k+7}$

5 $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{\pi k}{4}$

6 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\cos k}$

7 $\sum_{k=1}^{\infty} k \operatorname{sen} \frac{1}{k}$

8 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2^k}$

Nos problemas 9 a 14, use as propriedades lineares das séries para calcular a soma de cada uma.

9 $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^k + \left(\frac{1}{4}\right)^k\right]$

10 $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1}\right]$

11 $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k(k+1)} - \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\right]$

12 $\sum_{k=0}^{\infty} \left[2\left(\frac{1}{3}\right)^k - 3\left(-\frac{1}{5}\right)^{k+1}\right]$

13 $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2^k+3^k}{6^k} - \frac{1}{7^{k+1}}\right)$

14 $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\operatorname{sen}\frac{1}{k} + 2^{-k} - \operatorname{sen}\frac{1}{k+1}\right)$

15 O fato de $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ garante a convergência da série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$?

16 Sabendo que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^k}{k!}$ converge para cada valor da constante $c$, calcule $\lim_{n \to +\infty} \frac{c^n}{n!}$.

17 Sabendo que $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \ln 2$, calcule a soma da série

$$-2 + 1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{4} - \frac{2}{5} + \frac{2}{6} - \frac{2}{7} + \cdots.$$

18 Faça a crítica do seguinte cálculo: seja $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1})$ uma série de encaixe convergente. Então

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k - \sum_{k=1}^{\infty} b_{k+1} \\ &= (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots) - (b_2 + b_3 + \cdots) = b_1? \end{aligned}$$

**19** Mostre que a série $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k(k+1)} - \ln\frac{k}{k+1}\right]$ diverge.

Nos problemas 20 a 23, reescreva cada série mudando o índice do somatório de $k$ para $j$ como indicado.

**20** $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}; j = k - 1$

**21** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}; j = k - 1$

**22** $\sum_{k=M}^{\infty} a_k; j = k - M + 1$

**23** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k; j = k + M - 1$

**24** Suponha que $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1})$ é uma série de encaixe convergente. Pelo Teorema 5,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - b_{k+1}) = \sum_{k=1}^{M}(b_k - b_{k+1}) + \sum_{k=M+1}^{\infty}(b_k - b_{k+1});$$

Isto é

$$b_1 - \lim_{n\to+\infty} b_n = b_1 - b_{M+1} + \sum_{k=M+1}^{\infty}(b_k - b_{k+1}), \text{ou} \sum_{k=M+1}^{\infty}(b_k - b_{k+1}) = b_{M+1} - \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Verifique a última equação diretamente sem usar o Teorema 5.

**25** Use o fato de $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} = 1$ e o fato de $\sum_{k=1}^{M}\frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{M+1}$ para encontrar a soma de $\sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$.

**26** (a) Use o Teorema 5 para mostrar que se duas séries concordam, termo a termo, exceto possivelmente pelos primeiros $M$ termos, então ou ambas convergem ou ambas divergem.
(b) Mostre que mudar, atrasar ou somar um único termo não afeta a convergência ou divergência de uma série.

**27** Sabendo que $e = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}$, encontre a soma da série $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$.

**28** Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é uma série convergente cujos termos são todos não-negativos, mostre que $\sum_{k=1}^{M} a_k \le \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ se verifica para todo inteiro positivo $M$. (*Sugestão:* Use o teorema 3 da seção 1.)

Nos problemas 29 a 34, todas as séries têm termos não-negativos. Em cada caso, estabeleça a convergência da série provando diretamente que a seqüência das somas parciais é limitada superiormente.

**29** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)\cdot 3^k}$

**30** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k-1)\ln 3}{4^{k-1}}$

**31** $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^{-k}k}{k^2+1}$

**32** $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{5^k}$

**33** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left[\textit{Sugestão: } \frac{1}{k^2} \le \frac{1}{(k-1)k} \text{ para } k \ge 2.\right]$

**34** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}$

**35** Complete a prova do Teorema 3 mostrando que se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ são convergentes, então também é $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - b_k)$ e

PASTA

20

**EXEMPLOS** Determine se a série dada converge ou diverge usando o teste adaptado da comparação no limite.

1 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^4}$

SOLUÇÃO

Usemos a série $p$ convergente $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ para o teste adaptado da comparação no limite. Se $a_n$ é o $n$-ésimo termo da série dada e $b_n$ é o $n$-ésimo termo da série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$, então

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(\ln n)/n^4}{1/n^3} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

onde usamos o Teorema 1 da Seção 1.1 e a regra de L'Hôpital para calcular o limite. Pela parte (i) do Teorema 5, a série dada converge.

2 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$

SOLUÇÃO

Usemos a série harmônica divergente $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ para o teste adaptado da razão no limite. Se $a_n$ é o $n$-ésimo termo da série dada e $b_n$ e o $n$-ésimo termo da série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, então

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1/\sqrt{2n+1}}{1/n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{\sqrt{2n+1}}$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \sqrt{n}\sqrt{\frac{n}{2n+1}} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{n}\sqrt{\frac{1}{2+(1/n)}} = +\infty.$$

Pela parte (ii) do Teorema 5, a série dada diverge.

# Conjunto de Problemas 4

Nos problemas 1 a 16, use o teste da integral para determinar se cada série converge ou diverge.

1 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt[3]{k}}$ 2 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+4}$ 3 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2}{k^3+16}$ 4 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{k}}$

5 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1000}{n}\right)^2$ 6 $\sum_{m=1}^{\infty} e^{-m}$ 7 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$ 8 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$

9 $\sum_{j=1}^{\infty} je^{-j}$ 10 $\sum_{n=1}^{\infty} \coth n$ 11 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{\ln k}}$ 12 $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k \ln k \ln (\ln k)}$

21

13 $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} m}{1+m^2}$ 14 $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{r}{2^r}$ 15 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(3k+1)}$ 16 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Nos problemas 17 a 30, use o teste da comparação direta ou com uma série $p$ ou com uma série geométrica para determinar se cada série converge ou diverge.

17 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^4+3k+1}$ 18 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3+2k+7}$ 19 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 5^k}$ 20 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(n+1)3^n}$

21 $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j+1}{(j+2)\cdot 7^j}$ 22 $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{5r}{\sqrt[3]{r^7+3}}$ 23 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\sqrt[3]{k+1}}$ 24 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k+6}$

25 $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^2}{j^3+4j+3}$ 26 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$ 27 $\sum_{q=1}^{\infty} \frac{\sqrt{q}}{q+2}$ 28 $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1+e^{-j}}{e^j}$

29 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+3}{k!}$ 30 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{3^n+n^2}$

Nos problemas 31 a 40, use o teste da comparação no limite com uma série $p$ ou com uma série geométrica para determinar se cada série converge ou diverge.

31 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2+5}}$ 32 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3\cdot 2^k+2}$ 33 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k^2}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$

34 $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1+e^j}{j+5^j}$ 35 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{1+k^3}$ 36 $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j\sqrt{2j^3+5}}$

37 $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{7^j - \cos j}$ 38 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2+4}$

39 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$ 40 $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j!}{(2j)!}$

41 Suponha que $f$ é uma função contínua e decrescente no intervalo $[k-1, k]$.
(a) Use o teorema do valor médio para integrais (Teorema 9 da Seção 3 do Cap. 6) para mostrar que existe um número $c$ com $k-1 \le c \le k$ tal que

$$\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx = f(c).$$

(b) Explique por que $f(k) \le f(c) \le f(k-1)$.

(c) Conclua que $f(k) \le \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \le f(k-1)$.

42 Suponha que a função $f$ é uma função contínua e decrescente no intervalo $[1, n+1]$ onde $n$ é um inteiro positivo.

(a) Use a parte (c) do problema 41 para mostrar que $\sum_{k=2}^{n} f(k) \le \int_{1}^{n} f(x)\,dx$.

(b) Use a parte (c) do problema 41 para mostrar que $\int_{1}^{n+1} f(x)\,dx \le \sum_{k=2}^{n+1} f(k-1)$.

(c) Conclua que $\int_{1}^{n+1} f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{n} f(k) \le f(1) + \int_{1}^{n} f(x)\,dx$.

**43 Suponha que a função $f$ é contínua, decrescente e não-negativa no intervalo $[1,\infty)$ e que a integral imprópria $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge. Pelo teste da integral $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ converge. Usando a parte (c) do problema 42, mostre que**

$$\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \le f(1) + \int_{1}^{\infty} f(x)\,dx.$$



32

SOLUÇÃO

Aqui $a_n = \dfrac{(-1)^n}{[\ln(n+1)]^n}$. Portanto,

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{[\ln(n+1)]^n}\right|} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1,$$

assim a série dada converge absolutamente pelo teste da razão e, daí, converge.

# Conjunto de Problemas 5

Nos problemas 1 a 14, determine se a série dada converge ou diverge. Use o teste de Leibniz para séries alternadas para estabelecer a convergência sempre que este se aplicar.

1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ 2 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}$ 3 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}k}{k^3+2}$ 4 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\cos k\pi}{k^3}$

5 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{\sqrt{k^5+7}}$ $\left[\textit{Sugestão: } \text{Primeiro considere } \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}k}{\sqrt{k^5+7}}.\right]$

6 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2-10k+26}$ $\left[\textit{Sugestão: } \text{Primeiro considere } \displaystyle\sum_{k=5}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2-10k+26}.\right]$

7 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\sqrt{k}}{k+3}$ $\left[\textit{Sugestão: } \text{Primeiro considere } \displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k\sqrt{k}}{k+3}.\right]$

8 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \ln k \cos k\pi$ 9 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{k+1}{k+7}$ 10 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{3k^2}{4k^2+1}$ 11 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln(k+2)}$

12 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{\ln(k+1)}{k\sqrt{k}}$ 13 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\operatorname{sen}\frac{\pi}{k}$ 14 $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{k}{\ln k}$

Nos problemas 15 a 20, aproxime a soma de cada série encontrando a soma parcial dos seus primeiros $n$ termos para o valor indicado de $n$. Também, dê um limite em valor absoluto para o erro envolvido nessa aproximação e determine se a aproximação é por cima ou por baixo.

15 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{3k-1}, n = 5$ 16 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k}, n = 100$ 17 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}, n = 4$

18 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3+1}, n = 4$ 19 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \cdot 5^k}, n = 3$ 20 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(k+\frac{1}{2})\pi}{2k!}, n = 3$

Nos problemas 21 e 22, encontre a soma de cada série com um erro não maior que $5 \times 10^{-4}$ em valor absoluto e escreva sua resposta com três casas decimais.

21 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k \cdot 2^k}$ 22 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{(2k)!}$

Nos problemas 23 a 28, aplique o teste da razão para determinar se cada série converge absolutamente ou diverge.

23 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}5^k}{k \cdot 4^k}$ 24 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(k^3+1)}{k!}$ 25 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{7^k}{(3k)!}$

26 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k-1)!}{e^k}$ 27 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}k^4}{(1,02)^k}$ 28 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k\frac{1+e^k}{2^k}$

23

Nos problemas 29 a 32, aplique o teste da raiz para determinar se cada série converge ou diverge.

**29** $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\left(\frac{k}{3k+1}\right)^k$ **30** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k k^k}{(\ln k)^k}$ **31** $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k} - 1)^k$ **32** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{(2k + 1/k)^k}$

Nos problemas 33 a 42, determine se cada série é divergente, condicionalmente convergente ou absolutamente convergente. Use qualquer teste ou teorema que pareça mais apropriado para justificar sua resposta.

**33** $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{3^k}{k!}$ **34** $\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{3}{5}\right)^k$ **35** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\ln(k+1)}$ **36** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}k^2}{k^3+10}$

**37** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n}$ **38** $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k!}{(2k+1)!}$ **39** $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j^2+1}$ **40** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2k)}{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3k-2)}$

**41** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$ **42** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$

**43** Suponha que a seqüência $s_2, s_4, s_6, s_8, \ldots$ converge para o limite $S$ e que a seqüência $s_1, s_3, s_5, s_7, \ldots$ converge para o mesmo limite $S$. Prove: A seqüência $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, \ldots$ converge para o limite $S$.

**44** (a) Se $|a_{n+1}| < |a_n|\, r$ se verifica para todo inteiro $n \geq N$, onde $r$ é uma constante positiva, prove que $|a_{N+j}| < |a_N| r^j$ se verifica para todo inteiro positivo $j$. (Use indução matemática.)

(b) Se $|a_n|\, r < |a_{n+1}|$ se verifica para todo inteiro $n \geq N$, onde $r$ é uma constante positiva, prove que $|a_N| r^j < |a_{N+j}|$ se verifica para todo inteiro positivo $j$.

**45** É verdade que se a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolutamente, então a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{1+a_k^2}$ também converge? Por quê?

**46** Refaça em detalhes a prova do teste da raiz (Teorema 5).

**47** *Se a série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge absolutamente, mostre que* $\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

# 6 Séries de Potências

Uma série infinita da forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots$$

é chamada uma *série de potências em x* ou simplesmente *série de potências*. As constantes $c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots$ são chamadas de *coeficientes* da série de potências e a constante $a$ é chamada de seu *centro*. Uma série de potências em $x$ com centro $a = 0$ toma a forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

e assim generaliza a idéia de um polinômio em $x$.

Na série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ nós usualmente vemos $x$ como uma quantidade que pode ser variada à vontade. A série pode convergir para alguns valores de $x$ mas divergir para outros. Naturalmente, quando $x = a$ nós vemos que a série converge e sua soma é $c_0$. Os três exemplos seguintes

24

Assim, $R = 0$ pela parte (iii) do Teorema 1, e assim $I$ consiste no único número 0.

5 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k(x-4)^{2k}}{k^2}$

SOLUÇÃO
A série de potência é centrada em $a = 4$. Não podemos usar o Teorema 1, já que $3^k/k^2$ não é o coeficiente da $k$-ésima potência de $x - 4$. Assim, recorremos ao teste da razão original (Teorema 4, da Seção 5). O $n$-ésimo *termo* (não o coeficiente!) da série é

$$a_n = \frac{3^n(x-4)^{2n}}{n^2}, \quad \text{assim como} \quad a_{n+1} = \frac{3^{n+1}(x-4)^{2(n+1)}}{(n+1)^2} = \frac{3^{n+1}(x-4)^{2n+2}}{(n+1)^2}$$

Portanto,

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{3^{n+1}(x-4)^{2n+2}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{3^n(x-4)^{2n}}\right|$$
$$= \lim_{n\to+\infty} 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 |x-4|^2 = 3|x-4|^2.$$

Segue-se que a série converge absolutamente quando $3|x-4|^2 < 1$ ou seja, quando $|x-4| < 1/\sqrt{3}$. Diverge quando $3|x-4|^2 > 1$, ou seja quando $|x-4| > 1/\sqrt{3}$. Portanto $R = 1/\sqrt{3}$. Quando $x = 4 - 1/\sqrt{3}$, a série torna-se $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, que converge absolutamente. (Por quê?) Da mesma forma, quando $x = 4 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ a série torna-se $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, que converge absolutamente. Segue-se que a série converge absolutamente em todo seu intervalo de convergência $I = \left[4 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}, 4 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

# Conjunto de Problemas 6

Nos problemas 1 a 25, encontre o centro $a$, o raio de convergência $R$ e o intervalo de convergência $I$ da série de potências dada. Confira também a divergência, convergência absoluta ou convergência condicional da série de potências nos pontos extremos de $I$.

1 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 7^k x^k$

2 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{\sqrt{k+1}}$

3 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

4 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(x-1)^k}{k+1}$

5 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}x^{2k-1}}{(2k-1)!}$

6 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}k(x+3)^{k-1}}{7^{k-1}}$

7 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{k-1}}{k^2}$

8 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{k\sqrt{k+1}}$

9 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+5)^k}{(2k-1)(2k)}$

10 $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(x-1)^{2k-2}}{(2k-4)!}$

11 $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j 2^j x^j}{(j+1)^3}$

12 $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sqrt{j}\, x^j}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2j+1)}$

13 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+2)!}$

14 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k}{2k+1}\right| \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$

15 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-x)^k}{(k+1)\cdot 3^k}$

16 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+1)^{5k}}{(k+1)\cdot 5^k}$

17 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{x}{4} - 1\right)^k$

18 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n-1}\left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}\right)^n$

19 $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(3-x)^{j-1}}{\sqrt{j}}$

20 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k (x-5)^{2k}}{k^3}$

25

21 $\sum_{k=1}^{\infty} (5^k + 5^{-k})(x+1)^{3k-2}$ 22 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} x^k$ 23 $\sum_{k=1}^{\infty} (\tan^{-1} k)(x-1)^k$ 24 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{4k}}{\sqrt[k]{k}}$

25 $(x-8) + (x-8)^2 + 2!(x-8)^3 + 3!(x-8)^4 + 4!(x-8)^5 + \cdots$.

26 Se $R$ é o raio de convergência da série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$, $0 < R < +\infty$, e $p$ é um inteiro positivo, mostre que o raio de convergência da série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^{pk}$ é $\sqrt[p]{R}$.

27 Se $R$ é o raio de convergência da série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$, e $p$ é um inteiro positivo, ache o raio de convergência da série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^{p+k}$.

28 Seja $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ uma série de potências dada.

(a) Se $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = +\infty$, prove que o raio de convergência da série de potências é zero.

(b) Se $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$, prove que a série de potências tem um raio de convergência infinita.

(c) Se $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L \neq 0$, prove que o raio de convergência da série de potência é dado por $R = 1/L$.

29 Suponha que $b$ é uma constante maior que 1. Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série de potências

30 Complete a prova do Teorema 1 demonstrando as partes (ii) e (iii).

31 Se $a > b \geq 0$, encontre o raio de convergência da série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{a^k + b^k}$.

# 7 Continuidade, Integração e Diferenciação de Séries de Potências

Nessa seção estudamos funções da forma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k,$$

onde $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ é uma série de potências dada.

Fica subentendido que o domínio de $f$ é o intervalo de convergência da série de potências.

Já que uma soma finita pode ser diferenciada termo a termo e já que

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots,$$

poderíamos suspeitar que a derivada $D_x f(x)$ pode ser obtida pela diferenciação termo a termo; ou seja

$$\begin{aligned} D_x f(x) &= D_x c_0 + D_x c_1(x-a) + D_x c_2(x-a)^2 + D_x c_3(x-a)^3 + \cdots \\ &= 0 + c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots. \end{aligned}$$

Da mesma forma, poderíamos suspeitar que a integral $\int f(x)\,dx$ pode ser obtida pela integração termo a termo; isto é

260

Nos problemas 29 a 32, aplique o teste da raiz para determinar se cada série converge ou diverge.

**29** $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\left(\frac{k}{3k+1}\right)^k$ **30** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k k^k}{(\ln k)^k}$ **31** $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k} - 1)^k$ **32** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{(2k + 1/k)^k}$

Nos problemas 33 a 42, determine se cada série é divergente, condicionalmente convergente ou absolutamente convergente. Use qualquer teste ou teorema que pareça mais apropriado para justificar sua resposta.

**33** $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{3^k}{k!}$ **34** $\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{3}{5}\right)^k$ **35** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\ln (k+1)}$ **36** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}k^2}{k^3+10}$

**37** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n}$ **38** $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k!}{(2k+1)!}$ **39** $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j^2+1}$ **40** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3k-2)}$

**41** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$ **42** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$

**43** Suponha que a seqüência $s_2, s_4, s_6, s_8, \ldots$ converge para o limite $S$ e que a seqüência $s_1, s_3, s_5, s_7, \ldots$ converge para o mesmo limite $S$. Prove: A seqüência $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, \ldots$ converge para o limite $S$.

**44** (a) Se $|a_{n+1}| < |a_n|\, r$ se verifica para todo inteiro $n \geq N$, onde $r$ é uma constante positiva, prove que $|a_{N+j}| < |a_N| r^j$ se verifica para todo inteiro positivo $j$. (Use indução matemática.)

(b) Se $|a_n|\, r < |a_{n+1}|$ se verifica para todo inteiro $n \geq N$, onde $r$ é uma constante positiva, prove que $|a_N| r^j < |a_{N+j}|$ se verifica para todo inteiro positivo $j$.

**45** É verdade que se a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolutamente, então a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{1+a_k^2}$ também converge? Por quê?

**46** Refaça em detalhes a prova do teste da raiz (Teorema 5).

**47** Se a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolutamente, mostre que $\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

# 6 Séries de Potências

Uma série infinita da forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots$$

é chamada uma *série de potências em x* ou simplesmente *série de potências*. As constantes $c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots$ são chamadas de *coeficientes* da série de potências e a constante $a$ é chamada de seu *centro*. Uma série de potências em $x$ com centro $a = 0$ toma a forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

e assim generaliza a idéia de um polinômio em $x$.

Na série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ nós usualmente vemos $x$ como uma quantidade que pode ser variada à vontade. A série pode convergir para alguns valores de $x$ mas divergir para outros. Naturalmente, quando $x = a$ nós vemos que a série converge e sua soma é $c_0$. Os três exemplos seguintes

24

Assim, $R = 0$ pela parte (iii) do Teorema 1, e assim $I$ consiste no único número 0.

5 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k(x-4)^{2k}}{k^2}$

SOLUÇÃO
A série de potência é centrada em $a = 4$. Não podemos usar o Teorema 1, já que $3^k/k^2$ não é o coeficiente da $k$-ésima potência de $x - 4$. Assim, recorremos ao teste da razão original (Teorema 4, da Seção 5). O $n$-ésimo *termo* (não o coeficiente!) da série é

$$a_n = \frac{3^n(x-4)^{2n}}{n^2}, \quad \text{assim como} \quad a_{n+1} = \frac{3^{n+1}(x-4)^{2(n+1)}}{(n+1)^2} = \frac{3^{n+1}(x-4)^{2n+2}}{(n+1)^2}$$

Portanto,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{3^{n+1}(x-4)^{2n+2}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{3^n(x-4)^{2n}}\right|$$
$$= \lim_{n\to+\infty} 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^2|x-4|^2 = 3|x-4|^2.$$

Segue-se que a série converge absolutamente quando $3|x-4|^2 < 1$ ou seja, quando $|x-4| < 1/\sqrt{3}$. Diverge quando $3|x-4|^2 > 1$, ou seja quando $|x-4| > 1/\sqrt{3}$. Portanto $R = 1/\sqrt{3}$. Quando $x = 4 - 1/\sqrt{3}$, a série torna-se $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$, que converge absolutamente. (Por quê?) Da mesma forma, quando $x = 4 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ a série torna-se $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$, que converge absolutamente. Segue-se que a série converge absolutamente em todo seu intervalo de convergência $I = \left[4 - \frac{1}{\sqrt{3}}, 4 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

# Conjunto de Problemas 6

Nos problemas 1 a 25, encontre o centro $a$, o raio de convergência $R$ e o intervalo de convergência $I$ da série de potências dada. Confira também a divergência, convergência absoluta ou convergência condicional da série de potências nos pontos extremos de $I$.

1 $\sum_{k=0}^{\infty} 7^k x^k$

2 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{\sqrt{k+1}}$

3 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

4 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(x-1)^k}{k+1}$

5 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}x^{2k-1}}{(2k-1)!}$

6 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}k(x+3)^{k-1}}{7^{k-1}}$

7 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{k-1}}{k^2}$

8 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{k\sqrt{k+1}}$

9 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+5)^k}{(2k-1)(2k)}$

10 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(x-1)^{2k-2}}{(2k-4)!}$

11 $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j 2^j x^j}{(j+1)^3}$

12 $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sqrt{j}\, x^j}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2j+1)}$

13 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+2)!}$

14 $\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k}{2k+1}\right|\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$

15 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-x)^k}{(k+1)\cdot 3^k}$

16 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+1)^{5k}}{(k+1)\cdot 5^k}$

17 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{x}{4}-1\right)^k$

18 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n-1}\left(\frac{x}{3}+\frac{2}{3}\right)^n$

19 $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(3-x)^{j-1}}{\sqrt{j}}$

20 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k (x-5)^{2k}}{k^3}$



25

21 $\sum_{k=1}^{\infty} (5^k + 5^{-k})(x+1)^{3k-2}$ 22 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} x^k$ 23 $\sum_{k=1}^{\infty} (\tan^{-1} k)(x-1)^k$ 24 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{4k}}{\sqrt[k]{k}}$

25 $(x-8) + (x-8)^2 + 2!(x-8)^3 + 3!(x-8)^4 + 4!(x-8)^5 + \cdots$.

26 Se $R$ é o raio de convergência da série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$, $0 < R < +\infty$, e $p$ é um inteiro positivo, mostre que o raio de convergência da série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^{pk}$ é $\sqrt[p]{R}$.

27 Se $R$ é o raio de convergência da série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$, e $p$ é um inteiro positivo, ache o raio de convergência da série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^{p+k}$.

28 Seja $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ uma série de potências dada.

(a) Se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = +\infty$, prove que o raio de convergência da série de potências é zero.

(b) Se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$, prove que a série de potências tem um raio de convergência infinita.

(c) Se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L \neq 0$, prove que o raio de convergência da série de potência é dado por $R = 1/L$.

29 Suponha que $b$ é uma constante maior que 1. Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série de potências

30 Complete a prova do Teorema 1 demonstrando as partes (ii) e (iii).

31 Se $a > b \geq 0$, encontre o raio de convergência da série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{a^k + b^k}$.

# 7 Continuidade, Integração e Diferenciação de Séries de Potências

Nessa seção estudamos funções da forma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k,$$

onde $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ é uma série de potências dada.

Fica subentendido que o domínio de $f$ é o intervalo de convergência da série de potências.

Já que uma soma finita pode ser diferenciada termo a termo e já que

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots,$$

poderíamos suspeitar que a derivada $D_x f(x)$ pode ser obtida pela diferenciação termo a termo; ou seja

$$\begin{aligned} D_x f(x) &= D_x c_0 + D_x c_1(x-a) + D_x c_2(x-a)^2 + D_x c_3(x-a)^3 + \cdots \\ &= 0 + c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots. \end{aligned}$$

Da mesma forma, poderíamos suspeitar que a integral $\int f(x)\, dx$ pode ser obtida pela integração termo a termo; isto é

260

geométrica para obter uma série infinita que represente cada expressão. Em cada caso especifique os valores de $x$ para os quais a representação é correta.

**1** $\dfrac{1}{1-x^4}$ **2** $\dfrac{x}{1-x^4}$ **3** $\dfrac{1}{1-4x}$ **4** $\dfrac{x^3}{(1-x^4)^2}$

**5** $\dfrac{x}{1-x^2}$ **6** $\displaystyle\int_0^x \frac{t\,dt}{1-t^2}$ **7** $\dfrac{1}{2+x}$ **8** $\dfrac{1-x^2}{(1-x^2)^2}$

**9** $\ln(1-x)$ **10** $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ **11** $\displaystyle\int_0^x \ln(1-t)\,dt$ **12** $\tanh^{-1} x$

**13** $\displaystyle\int_0^x \tanh^{-1} t\,dt$ **14** $\dfrac{1}{6-x-x^2}$ **15** $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{6-t-t^2}$

**16** Encontre a soma da série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$. (*Sugestão*: Use a expansão da série infinita de $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ obtida no Exemplo 3(a) na Seção 7.)

**17** Calcule:

(a) $D_x\left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \dfrac{x^9}{9!} - \dfrac{x^{11}}{11!} + \cdots\right)$.

(b) $D_x^2\left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \dfrac{x^9}{9!} - \dfrac{x^{11}}{11!} + \cdots\right)$.

**18** Em probabilidade é necessário calcular $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1}$, onde $0 \le p \le 1$, como o objetivo de encontrar o valor médio de uma variável randônica geométrica. Calcule esta soma infinita.

Nos problemas 19 a 24, seja a função $f$ definida pelas séries de potências dadas. Escreva uma série de potências para $f'(x)$ e encontre seu raio de convergência.

**19** $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k^2x^k$ **20** $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}k^2(x-2)^k$ **21** $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

**22** $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ **23** $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k/2}(x+1)^{2k}$ **24** $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k^3}$

Nos problemas 25 a 28, seja a função $f$ definida pelas séries de potências dadas. Escreva uma série de potências para $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ e encontre seu raio de convergência.

**25** $f(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!}$ **26** $f(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{2^{k+1}}$ **27** $f(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$ **28** $f(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k^3}$

**29** Dado $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$, encontre

(a) $f(0)$ (b) $f'(0)$ (c) $f''(0)$ (d) $f'''(0)$

**30** Use a identidade $\pi/4 = \tan^{-1} 1/7 + 2\tan^{-1} 1/3$ e a conhecida expansão em série de potências $\tan^{-1} x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \ldots$ do Exemplo 3(e) da Seção 7 para aproximar o valor de $\pi$ com quatro casas decimais.

# 8 Séries de Taylor e Maclaurin

Vimos na Seção 7 que uma série de potências $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ com um raio

27

Portanto,

$$\int_0^{1/2} \sqrt[3]{1+x^3}\,dx = \int_0^{1/2} 1\,dx + \int_0^{1/2} \tfrac{1}{3}x^3\,dx - \int_0^{1/2} \tfrac{1}{9}x^6\,dx + \int_0^{1/2} \tfrac{5}{81}x^9\,dx - \cdots$$
$$= \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{3})(\tfrac{1}{4})(\tfrac{1}{2})^4 - (\tfrac{1}{9})(\tfrac{1}{7})(\tfrac{1}{2})^7 + (\tfrac{5}{81})(\tfrac{1}{10})(\tfrac{1}{2})^{10} - \cdots.$$

Fora o primeiro termo, esta última série é alternada e os termos decrescem em valor absoluto (veja os Problemas 21 e 22). Daí, o teorema de Leibniz se aplica; assim, usando (digamos) os primeiros três termos da série, temos

$$\int_0^{1/2} \sqrt[3]{1+x^3}\,dx \approx \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{3})(\tfrac{1}{4})(\tfrac{1}{2})^4 - (\tfrac{1}{9})(\tfrac{1}{7})(\tfrac{1}{2})^7 = 0{,}505084\ldots$$

com um erro cujo valor absoluto não excede $(5/81)(1/10)(1/2)^{10} < 0{,}000007$. Portanto, aproximando para quatro casas decimais, temos $\int_0^{1/2} \sqrt[3]{1+x^3}\,dx \approx 0{,}5051$.

# Conjunto de Problemas 9

Nos problemas 1 a 8, use a expansão em série binomial (Teorema 1) para encontrar um desenvolvimento em série de Maclaurin para cada expressão. Especifique o intervalo de valor de $x$ para os quais a expansão é correta.

**1** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$ **2** $\sqrt{1+x^2}$ **3** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ **4** $\sqrt[3]{27+x}$

**5** $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}}$ **6** $\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ **7** $\dfrac{x}{(1+2x)^2}$ **8** $(9+x)^{3/2}$

Nos problemas 9 a 12, use os três primeiros termos de uma série binomial apropriada para estimar cada número. Dê uma cota superior para o valor absoluto do erro.

**9** $\sqrt{1{,}03}$ **10** $\sqrt[5]{33}$ **11** $\sqrt[4]{17}$ **12** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{100}}$

Nos problemas 13 a 16, estime cada quantidade aproximada para 3 casas decimais. (Considere um número de termos o suficiente para que o valor absoluto do erro não exceda $5 \times 10^{-4}$.)

**13** $\sqrt{101}$ **14** $\sqrt{99}$ **15** $\int_0^{2/3} \sqrt{1+x^3}\,dx$ **16** $\int_0^{1/2} \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$

**17** Dada a seqüência $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots$ tal que $c_0 = 1$ e $c_{n+1} = \dfrac{p-n}{n+1} c_n$ para $n \geq 0$, onde $p$ é uma constante, prove por indução matemática que

$$c_n = \frac{1}{n!} p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1) \quad \text{para } n \geq 1.$$

**18** Seja $p$ uma constante dada e defina-se $c_0 = 1$ e

$$c_n = (1/n!)p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1) \quad \text{para} \quad n \geq 1.$$

(a) Prove que $c_{n+1} = \frac{p-n}{n+1} c_n$ para $n \geq 0$.

(b) Prove que $(1+x)D_x \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = p \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, $|x| < 1$.

19 Compare a expansão da série binomial de $(1 + x)^{-1}$ com a expansão da série geométrica da mesma expressão.

20 Se $a$ é uma constante positiva e $p$ é uma constante qualquer, mostre que

$$(a+x)^p = a^p + pa^{p-1}x + \frac{p(p-1)}{2!} a^{p-2}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!} a^{p-3}x^3 + \cdots$$

$$= a^p + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!} a^{p-k}x^k$$

para $|x| < a$.

21 (Seja $(1+x)^p = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ para $|x| < 1$ uma expansão em série binomial. Mostre que, se $0 \leq x < 1$ e $n > p$, então $\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k x^k$ é uma série alternante. $\left(\textit{Sugestão: } c_{n+1} = \frac{p-n}{n+1} c_n.\right)$

22 No problema 21, suponha que $p > -1$ e prove que os termos na série $\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k x^k$ são decrescentes em valor absoluto (assim o teorema de Leibniz se aplica).

23 O que acontece na expansão em série binomial quando o expoente $p$ é um inteiro positivo? A expansão ainda está correta? Para que valores de $x$ ela é correta? Por quê?

24 Da expansão em série binomial de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e do fato de $\operatorname{sen}^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, encontre uma expansão em série de potências para $\operatorname{sen}^{-1} x$.

# Conjunto de Problemas de Revisão

Nos problemas 1 a 12, determine se cada seqüência converge ou diverge, se a seqüência convergir, encontre seu limite.

1 $\left\{\frac{n(n+1)}{3n^2+7n}\right\}$

2 $\left\{\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right\}$

3 $\left\{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{3n+1}}\right\}$

4 $\left\{\frac{7n^3+3n^2-n^3(\frac{1}{2})^n}{3n^2+n^2(\frac{3}{4})^n}\right\}$

5 $\left\{\frac{1+(-1)^n}{n}\right\}$

6 $\left\{\left(50+\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^{50}\right\}$

7 $\left\{\frac{\cos(n\pi/2)}{\sqrt{n}}\right\}$

8 $\{n[1+(-1)^n]\}$

9 $\{n^2+(-1)^n 2n\}$

10 $\left\{\frac{1}{(n+1)+(-1)^n(1-n)}\right\}$

11 $\left\{1-\frac{3^n}{n!}\right\}$

12 $\left\{\frac{2^n n!}{(2n+1)!}\right\}$

Nos problemas 13 a 16, indique se cada seqüência é crescente, decrescente ou não monótona.

13 $\{2^n\}$

14 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$

15 $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$

16 $\{(-1)^n\}$

17 A seqüência $\left\{n - \frac{2^n}{n}\right\}$ é monótona? Por quê?

18 Para cada inteiro positivo $n$, seja $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$.

# RESPOSTAS DOS PROBLEMAS SELECIONADOS

Capítulo 13

**Conjunto de problemas 1** pág. 615

**1** 2, 5, 10, 17, 26, 37; 10.001 **3** $\frac{1}{6}, \frac{2}{9}, \frac{3}{14}, \frac{4}{21}, \frac{5}{30}, \frac{6}{41}; \frac{100}{10.005}$ **5** $\frac{n+1}{2}$ **7** $\frac{1}{n+1}$

**9** 0 **11** $\frac{1}{7}$ **13** Diverge **15** $\pi$ **17** 0 **19** $-1$ **21** Diverge **23** 1

**25** $e$ **27** Crescente, limitada, convergente
**29** Crescente, limitada inferiormente mas não superiormente, divergente
**31** Não-monótona, limitada, divergente
**33** Não-monótona, limitada, divergente
**35** Decrescente, limitada superiormente mas não inferiormente, divergente
**37** Não-monótona, limitada, convergente
**39** $a_n = n, b_n = -n$
**41** (a) Diverge (b) diverge; (c) converge; (d) converge; (e) diverge

**45** (a) $1, 3, 2, \frac{5}{2}, \frac{9}{4}, \frac{19}{8}, \frac{37}{16}, \frac{75}{32}$; (c) $\frac{7}{3}$ **47** $\left\{\frac{1}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{2}\right\}$ **49** $\frac{A}{1-B}$

**Conjunto de problemas 2** pág. 624

**1** $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} + \cdots; \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \ldots; s_n = \frac{n}{2n+1}$; converge para $\frac{1}{2}$

**3** $2 + 6 + 12 + 20 + 30 + \cdots; 2, 8, 20, 40, 70, \ldots; s_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$; diverge

**5** $\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \frac{9}{400} + \frac{11}{900} + \cdots; \frac{3}{4}, \frac{8}{9}, \frac{15}{16}, \frac{24}{25}, \frac{35}{36}, \ldots; s_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$; converge para 1

**7** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$ **9** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(3k^2 + 7k - 5)}{(3k+2)(3k+5)}$, diverge **11** $\sum_{k=1}^{\infty} 2(-1)^{k+1}$, diverge

**13** $a = 1, r = \frac{2}{7}$, converge para $\frac{7}{5}$ **15** $a = \frac{7}{6}, r = \frac{7}{6}$, diverge **17** $a = 1, r = -1$, diverge **19** $a = \frac{1}{16}, r = \frac{3}{4}$, converge para $\frac{1}{4}$ **21** $a = \frac{1}{5}, r = \frac{1}{5}$, converge para $\frac{1}{4}$ **23** $\frac{1}{3}$

**25** $\frac{467}{99}$ **27** Sim, se convergir **29** $\frac{244}{495}$ **31** 8 metros

**Conjunto de problemas 3** pág. 631

**9** $\frac{5}{6}$ **11** $-3$ **13** $\frac{31}{21}$ **15** No **17** $-2 \ln 2$ **21** $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)}$

**23** $\sum_{j=M}^{\infty} a_{j-M+1}$ **25** $\frac{1}{M+1}$ **27** $e - 1$

# RESPOSTAS DOS PROBLEMAS SELECIONADOS

**Capítulo 13**

**Conjunto de problemas 1** pág. 615

**1** 2, 5, 10, 17, 26, 37; 10.001 **3** $\frac{1}{6}, \frac{2}{9}, \frac{3}{14}, \frac{4}{21}, \frac{5}{30}, \frac{6}{41}; \frac{100}{10.005}$ **5** $\frac{n+1}{2}$ **7** $\frac{1}{n+1}$

**9** 0 **11** $\frac{1}{7}$ **13** Diverge **15** $\pi$ **17** 0 **19** $-1$ **21** Diverge **23** 1

**25** $e$ **27** Crescente, limitada, convergente
**29** Crescente, limitada inferiormente mas não superiormente, divergente
**31** Não-monótona, limitada, divergente
**33** Não-monótona, limitada, divergente
**35** Decrescente, limitada superiormente mas não inferiormente, divergente
**37** Não-monótona, limitada, convergente
**39** $a_n = n, b_n = -n$
**41** (a) Diverge (b) diverge; (c) converge; (d) converge; (e) diverge

**45** (a) $1, 3, 2, \frac{5}{2}, \frac{9}{4}, \frac{19}{8}, \frac{37}{16}, \frac{75}{32};$ (c) $\frac{7}{3}$ **47** $\left\{\frac{1}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{2}\right\}$ **49** $\frac{A}{1-B}$

**Conjunto de problemas 2** pág. 624

**1** $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} + \cdots; \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \ldots; s_n = \frac{n}{2n+1}$; converge para $\frac{1}{2}$

**3** $2 + 6 + 12 + 20 + 30 + \cdots; 2, 8, 20, 40, 70, \ldots; s_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$; diverge

**5** $\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \frac{9}{400} + \frac{11}{900} + \cdots; \frac{3}{4}, \frac{8}{9}, \frac{15}{16}, \frac{24}{25}, \frac{35}{36}, \ldots; s_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$; converge para 1

**7** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$ **9** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(3k^2 + 7k - 5)}{(3k+2)(3k+5)}$, diverge **11** $\sum_{k=1}^{\infty} 2(-1)^{k+1}$, diverge

**13** $a = 1, r = \frac{2}{7}$, converge para $\frac{7}{5}$ **15** $a = \frac{7}{6}, r = \frac{7}{6}$, diverge **17** $a = 1, r = -1$, diverge **19** $a = \frac{1}{16}, r = \frac{3}{4}$, converge para $\frac{1}{4}$ **21** $a = \frac{1}{5}, r = \frac{1}{5}$, converge para $\frac{1}{4}$ **23** $\frac{1}{3}$

**25** $\frac{467}{99}$ **27** Sim, se convergir **29** $\frac{244}{495}$ **31** 8 metros

**Conjunto de problemas 3** pág. 631

**9** $\frac{5}{6}$ **11** $-3$ **13** $\frac{31}{21}$ **15** No **17** $-2 \ln 2$ **21** $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)}$

**23** $\sum_{j=M}^{\infty} a_{j-M+1}$ **25** $\frac{1}{M+1}$ **27** $e - 1$

**Conjunto de problemas 4** pág. 641

**1** Converge **3** Diverge **5** Converge **7** Diverge **9** Converge **11** Diverge **13** Converge **15** Converge **17** Converge por comparação com $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ **19** Converge por comparação com $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k}$ **21** Converge por comparação com $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{7^j}$ **23** Diverge por comparação com $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/3}}$ **25** Diverge por comparação com $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{5j}$ **27** Diverge por comparação com $\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{3q^{1/2}}$ **29** Converge por comparação com $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{10}{2^k}$ **31** Diverge $\left(\text{use } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2/3}}\right)$ **33** Converge $\left(\text{use } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)$ **35** Diverge $\left(\text{use } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\right)$ **37** Converge $\left(\text{use } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{7^k}\right)$ **39** Converge $\left(\text{use } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}\right)$ **45** Seja $a_k = \frac{1}{k^2}$.

**Conjunto de problemas 5** pág. 652

**1** Converge **3** Converge **5** Converge **7** Converge **9** Diverge **11** Converge **13** Converge **15** $\frac{1249}{3080}$ estimado por cima com erro $< \frac{1}{17}$ **17** $\frac{115}{144}$ estimado por baixo com erro $< \frac{1}{25}$ **19** $-\frac{137}{750}$ estimado por baixo com erro $< \frac{1}{2500}$ **21** 0,406 **23** Diverge **25** Converge absolutamente **27** Converge absolutamente **29** Converge absolutamente **31** Converge **33** Converge absolutamente **35** Converge condicionalmente **37** Converge condicionalmente **39** Converge absolutamente **41** Diverge **45** Verdade

**Conjunto de problemas 6** pág. 658

**1** $a = 0, R = \frac{1}{7}, I = \left(-\frac{1}{7}, \frac{1}{7}\right)$ **3** $a = 0, R = +\infty, I = (-\infty, \infty)$ **5** $a = 0, R = +\infty, I = (-\infty, \infty)$ **7** $a = -2, R = 1, I = [-3, -1]$ **9** $a = -5, R = 1, I = [-6, -4]$ **11** $a = 0, R = \frac{1}{2}, I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ **13** $a = 1, R = +\infty, I = (-\infty, \infty)$ **15** $a = 1, R = 3, I = (-2, 4]$ **17** $a = 4, R = 4, I = [0, 8)$ **19** $a = 3, R = 1, I = (2, 4]$ **21** $a = -1, R = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}, I = \left(-1 - \frac{1}{\sqrt[3]{5}}, -1 + \frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)$ **23** $a = 1, R = 1, I = (0, 2)$ **25** $a = 8, R = 0, I = \{8\}$ **27** $R$ **29** $R = b; I = (-b, b)$ **31** $R = a; I = (-a, a)$

**Conjunto de problemas 7** pág. 667

**1** $\sum_{k=0}^{\infty} x^{4k}, |x| < 1$ **3** $\sum_{k=0}^{\infty} (4x)^k, |x| < \frac{1}{4}$ **5** $\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1}, |x| < 1$ **7** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{2^{k+1}}, |x| < 2$ **9** $-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}, |x| < 1$ **11** $-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{(k+1)(k+2)}, |x| < 1$ **13** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+2}}{(2k+1)(2k+2)}, |x| < 1$ **15** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(-1)^k 2^{k+1} + 3^{k+1}]}{5(k+1)6^{k+1}} x^{k+1}, |x| < 2$ **17** (a) $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$; (b) $-x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \frac{x^9}{9!} + \cdots$ **19** $\sum_{k=1}^{\infty} k^3 x^{k-1}, R = 1$ **21** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, R = +\infty$ **23** $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot 2^{(k+2)/2}(x+1)^{2k-1}, R = 2^{-1/4}$



31

**25** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $R = +\infty$ **27** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}$, $R = +\infty$ **29** (a) 1; (b) 0; (c) $-1$; (d) 0

**Conjunto de problemas 8** pág. 674

**1** $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2(2!)}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2(3!)}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + \frac{1}{2(4!)}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4 + \cdots$

**3** $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x-2)^k}{2^{k+1}}$ **5** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^4 (x-4)^k}{k!}$

**7** $1 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 1 \cdot 3 \cdots (2k-3)}{k!\, 2^k}(x-2)^k$

**9** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ **11** $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!}$ **13** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}$ **15** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k+1}$

**17** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2^{2k-1} x^{2k}}{(2k)!}$ **19** 0,9802 **21** $f^{(n)}(0) = 0$ se $n$ é par; $f^{(n)}(0) = (-1)^{(n+3)/2}(n-1)$ se $n$ é ímpar **23** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!}$ para todo $x$ **25** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{4^{k+1}}$, $|x| < 4$

**27** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^k x^k}{k!}$ para todo $x$ **29** 0 **31** $\frac{16!}{8!}$ **33** $(-2)19!$

**Conjunto de problemas 9** pág. 681

**1** $1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k [1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)]}{3^k k!} x^k$ para $|x| < 1$

**3** $1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)}{3^k k!} x^{2k}$ para $|x| < 1$ **5** $1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2^k k!} x^{3k}$ para $|x| < 1$ **7** $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k 2^{k-1} k x^k$ para $|x| < \frac{1}{2}$ **9** 1,0148875, $|\text{erro}| \le 1{,}7 \times 10^{-6}$

**11** 2,030518, $|\text{erro}| \le 2{,}7 \times 10^{-5}$ **13** 10,050 **15** 0,690 **19** São iguais.
**23** A série torna-se uma soma finita, correta para todo valor de $x$.

**Conjunto de problemas de revisão** pág. 682

**1** Converge; limite $\frac{1}{3}$ **3** Converge; limite $\sqrt{\frac{1}{3}}$ **5** Converge; limite 0
**7** Converge; limite 0 **9** Diverge **11** Converge; limite 1 **13** Crescente
**15** Não monótona **17** Não; crescente depois decrescente. **19** Limitada; não monótona; convergente; limite $\frac{4}{5}$ **23** 1 **25** sen 1 **27** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{15}{(2k+3)(2k+5)}$; converge; soma é $\frac{3}{2}$ **29** $\frac{1}{3}$ **31** $\frac{23}{6}$ **33** $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ não garante que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é convergente. **35** Converge **37** Converge **39** Converge **41** Diverge
**43** Condicionalmente convergente **45** Absolutamente convergente **47** Diverge
**49** Absolutamente convergente **51** Absolutamente convergente **53** (a) 0,4058; (b) 0,0332
**55** $a = 1$; $R = \sqrt{5}$; $I = [1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}]$ **57** $a = -2$; $R = 1$; $I = (-3, -1)$
**59** $a = 10$; $R = 0$; $I = \{10\}$ **61** $a = -\pi$; $R = +\infty$; $I = (-\infty, \infty)$ **63** $a = 3$; $R = \frac{1}{2}$; $I = \left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right]$ **65** $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(x-1)^k}{k}$ para $0 < x < 2$

**67** $\frac{1}{e} + \frac{1}{e}(x+1) + \frac{1}{2!\,e}(x+1)^2 + \frac{1}{3!\,e}(x+1)^3$

**69** $1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2!\,2^2}(x-1)^2 + \frac{3}{3!\,2^3}(x-1)^3$ **71** $1 + 0 - \frac{4}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + 0$

32