Teorema (11.6)(i), $\lim_{n \to \infty} I_n = 0$ e as autoridades sanitárias já não precisam preocupar-se. O caso $r = 1$ resulta na seqüência constante $I_1, I_1, ..., I_1, ...$.

EXERCÍCIOS 11.1

Exercs. 1-16: A expressão é o n^{mo} termo a_n de uma seqüência $\{a_n\}$. Ache os quatro primeiros termos e $\lim_{n \to \infty} a_n$, se existir.

1 $\dfrac{n}{3n + 2}$

2 $\dfrac{6n - 5}{5n + 1}$

3 $\dfrac{7 - 4n^2}{3 + 2n^2}$

4 $\dfrac{4}{8 - 7n}$

5 -5

6 $\sqrt{2}$

7 $\dfrac{(2n - 1)(3n + 1)}{n^3 + 1}$

8 $8n + 1$

9 $\dfrac{2}{\sqrt{n^2 + 9}}$

10 $\dfrac{100n}{n^{3/2} + 4}$

11 $(-1)^{n+1} \dfrac{3n}{n^2 + 4n + 5}$

12 $(-1)^{n+1} \dfrac{\sqrt{n}}{n + 1}$

13 $1 + (0,1)^n$

14 $1 - \dfrac{1}{2^n}$

15 $1 + (-1)^{n+1}$

16 $\dfrac{n + 1}{\sqrt{n}}$

Exercs. 17-42: Determine se a seqüência converge ou diverge; se convergir, ache o limite.

17 $\left\{6\left(-\frac{5}{6}\right)^n\right\}$

18 $\left\{8 - \left(\frac{7}{8}\right)^n\right\}$

19 $\{\text{arctg } n\}$

20 $\left\{\dfrac{\tan^{-1} n}{n}\right\}$

21 $\{1.000 - n\}$

22 $\left\{\dfrac{(1,0001)^n}{1.000}\right\}$

23 $\left\{(-1)^n \dfrac{\ln n}{n}\right\}$

24 $\left\{\dfrac{n^2}{\ln (n + 1)}\right\}$

25 $\left\{\dfrac{4n^4 + 1}{2n^2 - 1}\right\}$

26 $\left\{\dfrac{\cos n}{n}\right\}$

27 $\left\{\dfrac{e^n}{n^4}\right\}$

28 $\{e^{-n} \ln n\}$

29 $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$

30 $\{(-1)^n n^3 3^{-n}\}$

31 $\{2^{-n} \text{ sen } n\}$

32 $\left\{\dfrac{4n^3 + 5n + 1}{2n^3 - n^2 + 5}\right\}$

33 $\left\{\dfrac{n^2}{2n - 1} - \dfrac{n^2}{2n + 1}\right\}$

34 $\left\{n \text{ sen } \dfrac{1}{n}\right\}$

35 $\{\cos \pi n\}$

36 $\left\{4 + \text{sen } \frac{1}{2}\pi n\right\}$

37 $\{n^{1/n}\}$

38 $\left\{\dfrac{n^2}{2^n}\right\}$

39 $\left\{\dfrac{n^{-10}}{\sec n}\right\}$

40 $\left\{(-1)^n \dfrac{n^2}{1 + n^2}\right\}$

41 $\{\sqrt{n + 1} - \sqrt{n}\}$

42 $\{\sqrt{n^2 + n} - n\}$

43 Uma população estável de 35.000 pássaros vive em três ilhas. Cada ano, 10% da população da ilha A migram para a ilha B, 20% da população da ilha B migram para a ilha C e 5% da população da ilha C migram para a ilha A. Denotemos por A_n, B_n e C_n, respectivamente, os números de pássaros nas ilhas A, B e C, no ano n antes da ocorrência da migração.

(*a*) Mostre que

$$A_{n+1} = 0{,}9A_n + 0{,}05C_n$$
$$B_{n+1} = 0{,}1A_n + 0{,}80B_n$$

e

$$C_{n+1} = 0{,}95C_n + 0{,}20B_n$$

(*b*) Supondo que $\lim_{n \to \infty} A_n$, $\lim_{n \to \infty} B_n$, e $\lim_{n \to \infty} C_n$ existam, dê uma aproximação do número de pássaros em cada ilha após muitos anos.

44 Uma população de linces é classificada por idade como "gatinhos" (menos de um ano) e adultos (pelo menos um ano). Todas as fêmeas adultas, incluive as nascidas no ano anterior, têm uma cria a cada mês de junho, com uma média de três "gatinhos" por cria. A taxa de sobrevivência dos "gatinhos" é de 50%, enquanto a dos adultos é de

$66\frac{2}{3}$ % por ano. Seja K_n o número de "gatinhos" recém-nascidos em junho do n ^{mo} ano, seja A_n o número de adultos, e suponha que a relação de machos para fêmeas seja sempre 1.

(*a*) Mostre que $K_{n+1} = \frac{3}{2}A_{n+1}$ e $A_{n+1} = \frac{2}{3}A_n + \frac{1}{2}K_n$

(*b*) Conclua que $A_{n+1} = \frac{17}{12}A_n$ e $K_{n+1} = \frac{17}{12}K_n$, e que $A_n = \left(\frac{17}{12}\right)^{n-1}A_1$ e $K_n = \left(\frac{17}{12}\right)^{n-1}K_1$. Que se pode concluir sobre a população?

Ⓒ **45** Os termos da seqüência definida pela recorrência $a_1 = 5$ e $a_{k+1} = \sqrt{a_k}$ podem ser gerados introduzindo 5 e pressionando repetidas vezes a tecla $\boxed{\sqrt{x}}$.

(*a*) Descreva o que acontece com os termos da seqüência quando k aumenta.

(*b*) Mostre que $a_n = 5^{1/2^n}$ e ache $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Ⓒ **46** Se uma seqüência é gerada introduzindo-se um número e pressionando repetidamente a tecla $\boxed{1/x}$, em que condições a seqüência tem um limite?

Ⓒ **47** Os termos da seqüência definida pela recorrência $a_1 = 1$ e $a_{k+1} = \cos a_k$ podem ser gerados introduzindo-se 1 (no modo radiano) e pressionando $\boxed{\cos}$ repetidamente.

(*a*) Descreva o que ocorre com os termos da seqüência quando k aumenta.

(*b*) Supondo que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, prove que $\boxed{\cos}\ L = L$.

(*Sugestão*: $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$.)

48 Uma seqüência $\{x_n\}$ é definida pela recorrência $x_{k+1} = x_k - \operatorname{tg} x_k$.

(*a*) Se $x_1 = 3$, obtenha uma aproximação dos cinco primeiros termos da seqüência. Prediga $\lim_{n\to\infty} x_n$.

(*b*) Se $x_1 = 6$, obtenha uma aproximação dos cinco primeiros termos da seqüência. Prediga $\lim_{n\to\infty} x_n$.

(*c*) Supondo que $\lim_{n\to\infty} x_n = L$, prove que $L = \pi n$ para algum inteiro n.

49 Podem-se obter aproximações de $\sqrt{N}$ a partir da recorrência

$$x_1 = \frac{N}{2}, \quad x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{N}{x_k}\right)$$

(*a*) Aproxime x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 se $N = 10$.

(*b*) Supondo que $\lim_{n\to\infty} x_n = L$, prove que $L = \sqrt{N}$.

50 A famosa *seqüência de Fibonacci* é definida pela recorrência $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$ com $a_1 = a_2 = 1$.

(*a*) Ache os dez primeiros termos da seqüência.

(*b*) Os termos da seqüência $r_k = a_{k+1}/a_k$ dão uma aproximação de τ, a *razão áurea*. Dê uma aproximação dos cinco primeiros termos desta seqüência.

(*c*) Supondo que $\lim_{n\to\infty} r_n = \tau$, prove que

$$\tau = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$$

Exercs. 51-52: Se f é diferenciável, então a seqüência $\{a_n\}$ definida pela recorrência $a_{k+1} = f(a_k)$, para $k \geq 1$, convergirá qualquer que seja a_1, se a derivada f' for contínua e $|f'(x)| \leq B < 1$ para alguma constante positiva B.

(*a*) Para a função f dada, verifique que a seqüência $\{a_n\}$ converge qualquer que seja a_1, determinando um valor conveniente de B.

(*b*) Dê uma aproximação, com duas decimais, de $\lim_{n\to\infty} a_n$, se $a_1 = 1$ e também se $a_1 = -100$.

51 $f(a_k) = \frac{1}{4} \operatorname{sen} a_k \cos a_k + 1$

52 $f(a_k) = \dfrac{a_k^2}{a_k^2 + 1} + 2$

2

11 $0{,}37 + 0{,}0037 + \dots + \dfrac{37}{(100)^n} + \dots$

12 $0{,}628 + 0{,}000628 + \dots + \dfrac{628}{(1.000)^n} + \dots$

13 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}3^{n-1}$

14 $\sum_{n=1}^{\infty} (-5)^{n-1}4^{-n}$

15 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$

16 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$

Exercs. 17-20: Use o Teorema (11.15) para achar todos os valores de x para os quais a série é convergente e ache a soma da série.

17 $1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^{n+1}x^n + \dots$

18 $1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + \dots$

19 $\dfrac{1}{2} + \dfrac{(x-3)}{4} + \dfrac{(x-3)^2}{8} + \dots + \dfrac{(x-3)^n}{2^{n+1}} + \dots$

20 $3 + (x-1) + \dfrac{(x-1)^2}{3} + \dots + \dfrac{(x-1)^n}{3^{n-1}} + \dots$

Exercs. 21-24: A barra indica que os algarismos se repetem indefinidamente. Expresse a decimal periódica como uma série e ache o número racional que ela representa.

21 $0{,}\overline{23}$

22 $5{,}\overline{146}$

23 $3{,}2\overline{394}$

24 $2{,}71\overline{828}$

Exercs. 25-32: Use o Exemplo 1 ou 3 e o Teorema (11.19) ou (11.20) para determinar se a série converge ou diverge.

25 $\dfrac{1}{4 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \dfrac{1}{(n+3)(n+4)} + \dots$

26 $\dfrac{1}{10 \cdot 11} + \dfrac{1}{11 \cdot 12} + \dots + \dfrac{1}{(n+9)(n+10)} + \dots$

27 $\dfrac{5}{1 \cdot 2} + \dfrac{5}{2 \cdot 3} + \dots + \dfrac{5}{n(n+1)} + \dots$

28 $-\dfrac{1}{1 \cdot 2} + -\dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dots + -\dfrac{1}{n(n+1)} + \dots$

29 $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \dots + \dfrac{1}{n+3} + \dots$

30 $6^{-1} + 7^{-1} + \dots + (n+5)^{-1} + \dots$

31 $3 + \dfrac{3}{2} + \dots + \dfrac{3}{n} + \dots$

32 $-4 - 2 - \dfrac{4}{3} - \dots - \dfrac{4}{n} - \dots$

Exercs. 33-40: Use o teste do termo de ordem n para determinar se a série diverge, ou se é necessária uma investigação adicional.

33 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n}{5n-1}$

34 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1 + (0{,}3)^n}$

35 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 + 3}$

36 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{e^n + 1}$

37 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{e}}$

38 $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen} \dfrac{1}{n}$

39 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{\ln(n+1)}$

40 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\dfrac{2n}{7n-5}\right)$

Exercs. 41-48: Utilize séries conhecidas, convergentes ou divergentes, juntamente com o Teorema (11.20) ou (11.21) para determinar se a série é convergente ou divergente; no caso de convergência, determine a soma.

41 $\sum_{n=3}^{\infty} \left[\left(\dfrac{1}{4}\right)^n + \left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right]$

42 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^n + \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]$

43 $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{-n} - 2^{-3n})$

44 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{3^n} - \dfrac{1}{4^n}\right)$

45 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{1}{8^n} + \dfrac{1}{n(n+1)}\right]$

46 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{1}{n(n+1)} - \dfrac{4}{n}\right]$

3

47 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{n+2} - \frac{5}{n+3} \right)$

48 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right)$

Exercs. 49-50: Para a série convergente dada, (a) aproxime S_1, S_2 e S_3 com cinco casas decimais e (b) obtenha uma aproximação da soma da série com três casas decimais.

49 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } n}{4^n}$

50 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{e^{(n^2)}}$

51 Seja S_n a $n^{\underline{\text{ma}}}$ soma parcial da série harmônica. Se $M = 3$, use o Exemplo 3 para achar um inteiro positivo m tal que $S_m \geq M$, e aproxime S_m com duas casas decimais.

52 Faça o Exercício 51 com $M = 8$.

53 Prove (ou não): Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são ambas divergentes, então $\sum (a_n + b_n)$ diverge.

54 Onde está o erro na seguinte "prova" de que a série divergente $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ tem soma 0? (Ver Exemplo 2.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$$

$$= [1 + (-1)] + [1 + (-1)] + [1 + (-1)] + \ldots$$

$$= 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$$

55 Deixa-se cair uma bola de borracha de uma altura de 10 metros. A bola repica aproximadamente metade da distância após cada queda. Use uma série geométrica para aproximar o percurso total feito pela bola até o repouso completo.

56 A extremidade de um pêndulo oscila do longo de um arco de 24 cm em sua primeira oscilação. Se cada oscilação é aproximadamente 5/6 da oscilação precedente, use uma série geométrica para obter uma aproximação da distância total percorrida pelo pêndulo até entrar em repouso completo.

57 Administra-se a um indivíduo uma dose de Q unidades de certo remédio. A quantidade que permanece na corrente sangüínea ao cabo de t minutos é Qe^{-ct}, com $c > 0$. Suponhamos que a mesma dose seja administrada a intervalos sucessivos de T minutos.

(a) Mostre que a quantidade $A(k)$ do remédio na corrente sangüínea imediatamente após a $k^{\underline{\text{ma}}}$ dose é dada por

$$A(k) = \sum_{n=0}^{k-1} Qe^{-ncT}$$

(b) Ache uma cota superior para a quantidade de remédio na corrente sangüínea após um número arbitrário de doses.

(c) Ache o menor tempo entre doses que garanta que $A(k)$ não excede certo nível M, $M > Q$.

58 Suponha que cada unidade monetária introduzida na economia recircule como segue: 85% da unidade original são gastos, em seguida 85% daqueles 0,85 são gastos e assim por diante. Determine o impacto econômico (o total gasto) se \$ 1.000.000,00 são introduzidos na economia.

59 Em um programa de erradicação de epidemia, liberam-se diariamente na população N moscas macho esterilizadas, e 90% dessas moscas sobrevivem a um determinado dia.

(a) Mostre que o número de moscas esterilizadas na população após n dias é dado por $N + (0{,}9)N$ ... $(0{,}9)^{n-1}N$.

(b) Se objetivo do programa, *a longo alcance*, é manter 20.000 moscas esterilizadas na população, quantas moscas devem ser liberadas cada dia?

60 Certo remédio tem meia-vida de cerca de 2 horas na corrente sangüínea. A cada 4 horas administram-se doses de K miligramas, com K a ser ainda determinado.

(a) Mostre que o número de miligramas do remédio na corrente sangüínea após a $n^{\underline{\text{ma}}}$ dose é $K + \frac{1}{4}K + \ldots + (\frac{1}{4})^{n-1}K$, e que esta soma é aproximadamente $\frac{3}{4}K$ para grandes valores de n.

(b) Se mais de 500 miligramas do remédio na corrente sangüínea é considerado um nível perigoso, determine a maior dose possível que possa ser administrada repetidamente por um longo período de tempo.

EXERCÍCIOS 11.3

Exercs. 1-12: (a) Mostre que a função f determinada pelo n^{mo} termo da série verifica a hipótese do teste da integral. (b) Use o teste da integral para determinar se a série converge ou diverge.

1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+2n)^2}$

2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4+n)^{3/2}}$

3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+7}$

4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

5 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$

6 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(2n-5)}$

7 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

8 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

9 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$

10 $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n}\right)$

11 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{1+n^2}$

12 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+16n^2}$

Exercs. 13-20: Use um teste básico de comparação para determinar se a série converge ou diverge.

13 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+n^2+1}$

14 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$

15 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$

16 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{n^2}$

17 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n}$

18 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arcsec} n}{(0{,}5)^n}$

19 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

20 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Exercs. 21-28: Use o teste limite de comparação para determinar se a série converge ou diverge.

21 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+4}$

22 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3+\sqrt{n}}$

23 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^3-5n}}$

24 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$

25 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n^2-7}{e^n(n+1)^2}$

26 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{n2^n}$

27 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+9}$

28 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$

Exercs. 29-46: Determine se a série converge ou diverge.

29 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+n^2}{n^3+1}$

30 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5+4n^3+1}{2n^8+n^4+2}$

31 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{1+3^n}$

32 $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{3n}{2n^2-7}$

33 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{5n^2+1}}$

34 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^4}$

35 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}$

36 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\ln n}{n^3+n+1}$

37 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$

38 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

39 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n^2}$

40 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{n}$

41 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^3}{(n^3+1)^2}$

42 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\ln n}{n^2+1}$

43 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2^n}{n+3^n}$

44 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$

45 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

46 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n + 2^n}{n+5^n}$

Exercs. 47-48: Determine todos os reais k para os quais a série é convergente.

47 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k \ln n}$

48 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^k}$

49 (a) Use a prova do teste da integral (11.23) para mostrar que, para todo inteiro positivo $n > 1$,

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n$$

(b) Estime o número de termos da série harmônica que devem ser somados para que se tenha $S_n > 100$.

50 Considere o problema hipotético ilustrado na figura. Partindo de uma bola de 0,30 m de raio, uma pessoa empilha bolas verticalmente de tal modo que, se r_k é o raio da k^{ma} bola, então $r_{n+1} = r_n\sqrt{n/(n+1)}$ para cada inteiro positivo n.

(a) Mostre que a altura da pilha pode tornar-se arbitrariamente grande.

(b) Se as bolas são feitas de material que pesa 12 quilos por metro cúbico, estabeleça um extremo superior para o peso total da pilha.

51 Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos positivos. Prove que se $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = 0$ e $\sum b_n$ converge, então $\sum a_n$ converge. (Isto não se verifica necessariamente para séries que contenham termos negativos.)

52 Prove que se $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = \infty$ e $\sum b_n$ diverge, então $\sum a_n$ diverge.

53 Seja $\sum a_n$ uma série convergente de termos positivos. Seja $f(n) = a_n$ e f contínua e decrescente para $x \ge N$, para algum inteiro N. Prove que o erro cometido ao aproximarmos a soma da série dada por $\sum_{n=1}^{N} a_n$ é menor do que $\int_N^\infty f(x)\,dx$.

Exercs. 54-56: Use o Exercício 53 para estimar o menor número de termos que devem ser somados para aproximar a soma da série com um erro menor que E.

54 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $E = 0{,}001$ **55** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, $E = 0{,}01$

56 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$, $E = 0{,}05$

57 Prove que se uma série de termos positivos $\sum a_n$ converge, então $\sum (1/a_n)$ diverge.

58 Prove que se uma série de termos positivos $\sum a_n$ converge, então $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ converge. (*Sugestão*: Mostre primeiro que $\sqrt{a_n a_{n+1}} \le (a_n + a_{n+1})/2$.

Ⓒ **Exercs. 59-60:** Obtenha uma aproximação da soma da série dada com três casas decimais. (Use o Exercício 53 para justificar a precisão de sua resposta.)

59 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ **60** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

Ⓒ **61** Grafe no mesmo sistema de eixos coordenados $y = x$ e $y = \ln(x^k)$ para $k = 1, 2, 3$ e $1 \le x \le 20$, e use então os gráficos para prever se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n^k)}$ converge ou diverge, para $k = 1, 2, 3$.

Ⓒ **62** Grafe no mesmo sistema de eixos coordenados $y = x$ e $y = (\ln x)^k$ para $k = 1, 2, 3$ e $1 \le x \le 200$, e use então os gráficos para prever se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^k}$ converge ou diverge, para $k = 1, 2, 3$.

EXEMPLO 3

Determine a convergência ou divergência de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+1}}{n^n}$.

SOLUÇÃO

Aplicando o teste da raiz,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{3n+1}}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{3n+1}}{n^n}\right)^{1/n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{3+(1/n)}}{n} = 0$$

Como $0 < 1$, a série converge. Poderíamos ter aplicado o teste da razão, mas o processo de cálculo do limite seria mais complicado.

EXERCÍCIOS 11.4

Exercs. 1-10: Determine $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, e use o teste da razão para determinar se a série converge ou diverge, ou se o teste é inconclusivo.

1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2^n}$

2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2+4}$

3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n(3^{n+1})}$

4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{5^n(n+1)}$

5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$

6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}+10}{n!}$

7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+2n+5}$

8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{\sqrt{n^3+1}}$

9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$

10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^5}$

Exercícios 11-18: Ache $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, e use o teste da raiz para determinar se a série converge ou diverge, ou se o teste é inconclusivo.

11 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

12 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{n^{n/2}}$

13 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$

14 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{(\ln n)^n}$

15 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

16 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$

17 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

18 $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n}{\ln n}\right)^n$

Exercs. 19-40: Determine se a série converge ou diverge.

19 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$

20 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3n+4}$

21 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{99^n(n^5+2)}{n^2 10^{2n}}$

22 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^{2n}}{5^{n-1}}$

23 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3+e^n}$

24 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+1}$

25 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n n!$

26 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

27 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{10^{n+1}}$

28 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10+2^n}{n!}$

7

29 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

30 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n}$

37 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

38 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

31 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\ln n}}$

32 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{(5n + 3n^{-1})^n}$

39 $1 + \frac{1 \cdot 3}{2!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2n-1)}{n!} + \ldots$

33 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{(1.01)^n}$

34 $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{1/n}$

40 $\frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \ldots + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots\ldots (3n-2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots (2n)} + \ldots$

35 $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$

36 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2}$

11.5 SÉRIES ALTERNADAS E CONVERGÊNCIA ABSOLUTA

Os testes de convergência estudados até aqui só podem ser aplicados a séries de termos positivos. Consideraremos agora séries infinitas que contêm termos positivos e termos negativos. O tipo mais simples e mais usual de tais séries é a **série alternada,** em que os termos são alternadamente positivos e negativos. Costuma-se representar uma série alternada como

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1}a_n + \ldots$$

ou $$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots + (-1)^n a_n + \ldots$$

com $a_k > 0$ para todo k. O próximo teorema fornece o teste principal para a convergência de tais séries. Por conveniência, consideraremos $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$. Demonstração análoga vale para $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.

Teste para séries alternadas (11.30)

A série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots$$

é convergente se se verificam as duas condições seguintes:

(i) $a_k \geq a_{k+1} > 0$ para todo k.

(ii) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

8

Continuação

TESTE	SÉRIE	CONVERGÊNCIA OU DIVERGÊNCIA	COMENTÁRIOS
Raiz	$\sum a_n$	Se $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert} = L$ (ou ∞) a série (i) converge (absolutamente) se $L < 1$ (ii) diverge se $L > 1$ (ou ∞)	Inconclusivo se $L = 1$ Útil se a_n envolve potências de grau n. Se $a_n > 0$ para todo n, pode-se desprezar o sinal de valor absoluto.
Séries alternadas	$\sum (-1)^n a_n$ $a_n > 0$	Converge se $a_k \geq a_{k+1}$, para todo k e $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$	Aplicável somente a séries alternadas.
$\sum \lvert a_n \rvert$	$\sum a_n$	Se $\sum \lvert a_n \rvert$ converge, então $\sum a_n$ converge	Útil para séries que contenham termos positivos e termos negativos.

EXERCÍCIOS 11.5

Exercs. 1-4: Determine se a série (a) verifica as condições (i) e (ii) para o teste das séries alternadas (11.30), e (b) converge ou diverge.

1 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n^2 + 7}$ **2** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n5^{-n}$

3 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 + e^{-n})$ **4** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{e^{2n} + 1}{e^{2n}}$

Exercs. 5-32: Determine se a série é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.

5 $\sum_{n=1}^{\infty} (n - 1)^{n-1} \dfrac{1}{\sqrt{2n + 1}}$

6 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n^{2/3}}$

7 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{\ln (n + 1)}$

8 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{n}{n^2 + 4}$

9 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n}{\ln n}$

10 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$

11 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{5}{n^3 + 1}$ **12** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n}$

13 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-10)^n}{n!}$ **14** $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{(-5)^n}$

15 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n^2 + 3}{(2n - 5)^2}$

16 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen} \sqrt{n}}{\sqrt{n^3 + 4}}$ **17** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{\sqrt[3]{n}}{n + 1}$

18 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^2}{n^5+1}$

19 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{1}{6}\pi n}{n^2}$

20 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{(1{,}5)^n}$

21 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, n \operatorname{sen} \frac{1}{n}$

22 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2}$

23 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

24 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{1/n}}{n!}$

25 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(-5)^n}$

26 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)^n}{(-n)^n}$

27 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+4^n}{1+3^n}$

28 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^4}{e^n}$

29 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \pi n}{n}$

30 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi}{2}$

31 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n-4)^2+5}$

32 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n}}$

Exercs. 33-38: Obtenha uma aproximação com três casas decimais da soma de cada série.

33 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$

34 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)!}$

35 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^3}$

36 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^5}$

37 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{5^n}$

38 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Exercs. 39-42: Use o Teorema (11.31) para achar um inteiro positivo n tal que S_n seja uma aproximação da soma da série com quatro casas decimais.

39 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$

40 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

41 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^n}$

42 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3+1}$

Exercs. 43-44: Mostre que a série alternada converge para todo inteiro positivo k.

43 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^k}{n}$

44 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[k]{n}}$

45 Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são ambas convergentes, $\sum a_n b_n$ é também convergente? Explique.

46 Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são ambas divergentes, $\sum a_n b_n$ é também divergente?

11.6 SÉRIES DE POTÊNCIAS

Conforme dissemos no capítulo de introdução, a principal razão para o desenvolvimento da teoria das seções anteriores é a representação de funções como *séries de potências* – isto é, séries cujos termos contêm potências de uma variável x. A título de ilustração, utilizando a fórmula $S = a/(1-r)$ para a soma de uma série geométrica (ver Teorema (11.15)), obtemos

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}$$

11

EXERCÍCIOS 11.4

1 $\frac{1}{2}$; C **3** $\frac{5}{3}$; D **5** 0; C **7** 1; inconclusivo

9 ∞; D **11** 0; C **13** 2; D **15** $\frac{1}{3}$; C **17** $\frac{1}{2}$; C

19 C **21** C **23** C **25** C

27 D **29** C **31** D **33** C

35 D **37** D **39** D

EXERCÍCIOS 11.5

1 **(a)** As condições (i) e (ii) são satisfeitas
(b) Converge, por (11.30)

3 **(a)** A condição (i) é satisfeita, mas a (ii) não
(b) Diverge, por (11.17)

5 CC **7** CC **9** D **11** AC **13** AC

15 D **17** CC **19** AC **21** D **23** CC

25 D **27** D **29** D **31** AC **33** 0,368

35 0,901 **37** 0,306 **39** 141 **41** 5

45 Não. Se $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, então tanto $\sum a_n$ como $\sum b_n$ convergem, de acordo com o teste para séries alternadas. Todavia, $\sum a_n b_n = \sum \frac{1}{n}$, que diverge.

EXERCÍCIOS 11.6

1 $[-1, 1)$ **3** $(-2, 2)$ **5** $(-1, 1]$

7 $[-1, 1)$ **9** $[-1, 1]$ **11** $(-6, 14)$

13 Converge somente se $x = 0$ **15** $(-2, 2)$

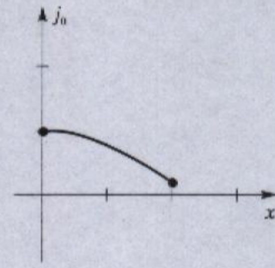
17 $(-\infty, \infty)$ **19** $\left[\frac{17}{9}, \frac{19}{9}\right)$ **21** $(-12, 4)$

23 Converge só se $x = 3$ **25** $(0, 2e)$

27 $\left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right]$ **29** $(-\infty, \infty)$ **31** $\frac{3}{2}$

33 $\frac{1}{e}$ **35** ∞ **37** Use (11.35).

39 $J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2.304}$



41 Use (11.35) **43** Use (11.37).

45 Suponha $\sum a_n x^n$ absolutamente convergente em $x = r$. Seja $x = -r$. Então $\sum |a_n(-r)^n| = |\sum a_n r^n|$ é absolutamente convergente, o que implica que $\sum a_n(-r)^n$ é convergente. Isto é uma contradição.

EXERCÍCIOS 11.7

1 **(a)** $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$ **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^{n-1}$; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} x^{n+1}$

3 **(a)** $\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{7}{2}\right)^n x^n$

(b) $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n7^n}{2^n} x^{n-1}$;
$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{7^n}{(n+1)2^n} x^{n+1}$

5 $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+2}$; $r = 1$ **7** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n+1}}$; $r = \frac{2}{3}$

9 $-1 - x - 2\sum_{n=2}^{\infty} x^n$; $r = 1$

11 **(b)** 0,183; 0,182321557

15 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^{n+1}$ **17** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} x^{n+3}$

19 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} x^{2n+4}$

26

Conjunto de Problemas 1

Nos problemas 1 a 4, calcule os primeiros seis termos de cada seqüência. Calcule também o 100.º.

1 $\{n^2 + 1\}$ **2** $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right\}$ **3** $\left\{\frac{n}{n^2+5}\right\}$ **4** $\left\{2 + \frac{1}{n}\right\}$

Nos problemas 5 a 8, encontre a expressão do termo geral (n-ésimo termo) de cada seqüência.

5 $1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots$ **6** $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ **7** $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$ **8** $1, 9, 25, 49, 81, 121, \ldots$

Nos problemas 9 a 26, determine se cada seqüência converge ou diverge. Se convergir, calcule seu limite.

9 $\left\{\frac{100}{n}\right\}$ **10** $\left\{\frac{n^2}{5n^2+1}\right\}$ **11** $\left\{\frac{n^3-5n}{7n^3+2n}\right\}$

12 $\left\{\frac{2n^2+1}{9n^2+5}\right\}$ **13** $\left\{\frac{5n^2}{3n+1}\right\}$ **14** $\left\{\frac{(-1)^n}{10^n}\right\}$.

15 $\left\{\frac{2n^2+n}{n+1}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}\right\}$ **16** $\left\{\frac{e^n+e^{-n}}{e^n-e^{-n}}\right\}$ **17** $\left\{\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right\}$

18 $\{1 + (\frac{1}{3})^n - (\frac{3}{4})^n\}$ **19** $\left\{\frac{\ln(1/n)}{\ln(n+4)}\right\}$ **20** $\{\ln(e^n+2) - \ln(e^n+1)\}$

21 $\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}-n}\right\}$ **22** $\{\ln(e^n+2) - n\}$ **23** $\{n^{1/\sqrt{n}}\}$

24 $\{n^{1/n^2}\}$ **25** $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ **26** $\left\{\left(1+\frac{5}{n}\right)^n\right\}$

Nos problemas 27 a 38, diga se cada seqüência é crescente, decrescente ou não-monótona e também se é limitada superiormente ou inferiormente. Indique se a seqüência é convergente ou divergente.

27 $\left\{\frac{2n+1}{3n+2}\right\}$ **28** $\{\operatorname{sen} n\pi\}$ **29** $\{3^n - n\}$

30 $\left\{\frac{3^n}{1+3^n}\right\}$ **31** $\{(-1)^{n^2}\}$ **32** $\left\{\frac{3n^4}{n+3^n}\right\}$

33 $\left\{\frac{(-1)^n n}{n+1}\right\}$ **34** $\{\sqrt{n+4} - \sqrt{n+3}\}$ **35** $\left\{1 - \frac{2^n}{n}\right\}$

36 $\left\{\frac{n^n}{n!}\right\}$ **37** $\left\{\frac{\operatorname{sen}(n\pi/4)}{n}\right\}$ **38** $\left\{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{n!}\right\}$

39 Dê um exemplo para mostrar que a soma $\{a_n + b_n\}$ de duas seqüências não-limitadas $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ pode ser uma seqüência limitada.

40 (a) Calcule os primeiros seis termos da seqüência

$$\{n + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)\}.$$

(b) Qual é o sétimo termo da seqüência na parte (a)?

(c) O que você pode concluir sobre a determinação do termo geral da seqüência através de um exame de uns primeiros poucos termos?

41 Conclua sobre a convergência ou divergência da seqüência $\{a^n\}$ nos seguintes casos:

17

Conjunto de Problemas 2

Nos problemas 1 a 6, calcule os primeiros cinco termos de cada série, e então calcule os cinco primeiros termos da seqüência $\{s_n\}$ de suas somas parciais. Encontre uma fórmula "simples" para n-ésima soma parcial s_n em função de n, determine se a série converge ou diverge e, se convergir, encontre sua soma $S = \lim\limits_{n \to +\infty} s_n$.

1 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ **2** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{2}{2k+3}\right)$ **3** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k(k+1)$

4 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+2k}$ **5** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$ **6** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1}}{5^k}$

Nos problemas 7 a 12, encontre a série infinita com a seqüência de somas parciais dada, determine se a série converge ou diverge e, se convergir, encontre sua soma.

7 $\{s_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ **8** $\{s_n\} = \left\{\frac{2n}{n+5}\right\}$ **9** $\{s_n\} = \left\{\frac{2n^2}{3n+5}\right\}$

10 $\{s_n\} = \{n\}$ **11** $\{s_n\} = \{1 - (-1)^n\}$ **12** $\{s_n\} = \left\{2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right\}$

Nos problemas 13 a 21, encontre o termo inicial a e a razão r de cada série geométrica, determine se a série converge e, se convergir, encontre sua soma.

13 $1 + \frac{2}{7} + \frac{4}{49} + \frac{8}{343} + \cdots$ **14** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^{k+1}$

15 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{7}{6}\right)^k$ **16** $-\frac{5}{8} + \frac{25}{64} - \frac{125}{512} + \frac{625}{4096} - \cdots$

17 $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ **18** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{1-k}$

19 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1}}{4^{k+1}}$ **20** $0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + 0{,}0009 + \cdots$

21 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 5^{-k}$

22 A série $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n-1} + \ldots$ é geométrica com razão $r = -1$; daí, diverge. Assim, o cálculo $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n-1} + \ldots = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$ deve estar errado. O que há de errado nesse cálculo?

Nos problemas 23 a 26, expresse cada dízima periódica como razão de números inteiros pelo uso de séries geométricas apropriadas.

23 0,33333... **24** 1,11111... **25** 4,717171... **26** 15,712712712...

27 É verdade que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$? Explique.

28 Encontre $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \cdots + \frac{1}{3^{2n}}\right)$.

29 No jogo de dados, a probabilidade de que o lançador vença (isto é, consiga 7 ou 11 na primeira jogada ou consiga um número diferente de 2, 3 ou 12, então, numa jogada sucessiva, consiga esse número antes conseguindo um 7) é dada pela dízima periódica 0,4929292929... Expresse essa probabilidade como a razão de dois números inteiros.

30 Um recipiente contém originalmente 10 gramas de sal dissolvidos em 1000 centímetros cúbicos de água. O seguinte procedimento é feito repetidamente: 250 centímetros cúbicos de água salgada são derramados, substituídos por 250 centímetros cúbicos de água pura, e a solução é inteiramente agitada.

(a) Depois de se repetir esse procedimento n vezes, quantos gramas de sal foram removidos do recipiente?

18

série converge se a seqüência $\{s_n\}$ das somas parciais $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k \cdot 2^k}$ for limitada. Observe que $\frac{k-1}{k} < 1$, assim

$$\frac{k-1}{k \cdot 2^k} = \frac{k-1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k < \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Portanto,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k \cdot 2^k} < \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1,$$

logo $\{s_n\}$ é limitada superiormente por $M = 1$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k \cdot 2^k}$ converge.

Conjunto de Problemas 3

Nos problemas 1 a 8, mostre que cada série diverge mostrando que o termo geral não tem limite zero.

1 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{5k+7}$ **2** $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{5k}{12k+5}\right)$ **3** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2+5k}{7k^2+13k+2}$

4 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{3e^k+7}$ **5** $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{\pi k}{4}$ **6** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\cos k}$

7 $\sum_{k=1}^{\infty} k \operatorname{sen}\frac{1}{k}$ **8** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2^k}$

Nos problemas 9 a 14, use as propriedades lineares das séries para calcular a soma de cada uma.

9 $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^k + \left(\frac{1}{4}\right)^k\right]$ **10** $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1}\right]$ **11** $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k(k+1)} - \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\right]$

12 $\sum_{k=0}^{\infty} \left[2\left(\frac{1}{3}\right)^k - 3\left(-\frac{1}{5}\right)^{k+1}\right]$ **13** $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2^k+3^k}{6^k} - \frac{1}{7^{k+1}}\right)$ **14** $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\operatorname{sen}\frac{1}{k} + 2^{-k} - \operatorname{sen}\frac{1}{k+1}\right)$

15 O fato de $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ garante a convergência da série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$?

16 Sabendo que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^k}{k!}$ converge para cada valor da constante c, calcule $\lim_{n \to +\infty} \frac{c^n}{n!}$.

17 Sabendo que $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \ln 2$, calcule a soma da série

$$-2 + 1 - \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{4} - \tfrac{2}{5} + \tfrac{2}{6} - \tfrac{2}{7} + \cdots.$$

18 Faça a crítica do seguinte cálculo: seja $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1})$ uma série de encaixe convergente. Então

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k - \sum_{k=1}^{\infty} b_{k+1}$$
$$= (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots) - (b_2 + b_3 + \cdots) = b_1?$$

19

19 Mostre que a série $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k(k+1)} - \ln\frac{k}{k+1}\right]$ diverge.

Nos problemas 20 a 23, reescreva cada série mudando o índice do somatório de k para j como indicado.

20 $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1};\ j = k - 1$

21 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)};\ j = k - 1$

22 $\sum_{k=M}^{\infty} a_k;\ j = k - M + 1$

23 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k;\ j = k + M - 1$

24 Suponha que $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1})$ é uma série de encaixe convergente. Pelo Teorema 5,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) = \sum_{k=1}^{M} (b_k - b_{k+1}) + \sum_{k=M+1}^{\infty} (b_k - b_{k+1});$$

Isto é

$$b_1 - \lim_{n\to+\infty} b_n = b_1 - b_{M+1} + \sum_{k=M+1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}), \text{ ou } \sum_{k=M+1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) = b_{M+1} - \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Verifique a última equação diretamente sem usar o Teorema 5.

25 Use o fato de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$ e o fato de $\sum_{k=1}^{M} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{M+1}$ para encontrar a soma de $\sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.

26 (a) Use o Teorema 5 para mostrar que se duas séries concordam, termo a termo, exceto possivelmente pelos primeiros M termos, então ou ambas convergem ou ambas divergem.

(b) Mostre que mudar, atrasar ou somar um único termo não afeta a convergência ou divergência de uma série.

27 Sabendo que $e = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!}$, encontre a soma da série $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$.

28 Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é uma série convergente cujos termos são todos não-negativos, mostre que $\sum_{k=1}^{M} a_k \le \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ se verifica para todo inteiro positivo M. (*Sugestão:* Use o teorema 3 da seção 1.)

Nos problemas 29 a 34, todas as séries têm termos não-negativos. Em cada caso, estabeleça a convergência da série provando diretamente que a seqüência das somas parciais é limitada superiormente.

29 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)\cdot 3^k}$

30 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)\ln 3}{4^{k-1}}$

31 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^{-k}k}{k^2+1}$

32 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{5^k}$

33 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\left[\textit{Sugestão: } \frac{1}{k^2} \le \frac{1}{(k-1)k} \text{ para } k \ge 2.\right]$

34 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$

35 Complete a prova do Teorema 3 mostrando que se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ são convergentes, então também é $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k)$ e