Apêndice. Relação de Equivalência

Uma relação em um conjunto A é um subconjunto R do produto cartesiano $A \times A$.

Em geral se usa a notação aRb para indicar que $(a, b) \in R$. Ou então se usa uma simbologia definida.

Por exemplo, para a relação $R = \{(a, b) \in \mathbb{R} \mid a < b\}$ usa-se $a < b$ em lugar de aRb ou de $(a, b) \in R$.

Uma relação de equivalência em um conjunto A é uma relação reflexiva, simétrica e transitiva, isto é, R é uma relação de equivalência em A valem as propriedades:
a) R é reflexiva: $\forall a \in A,\ aRa$;
b) R é simétrica: $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$;
c) R é transitiva: $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$.

Exemplo 0.1 *A relação de igualdade em um conjunto é uma relação de equivalência.*

Exemplo 0.2 *A relação "congruência de triângulos" é uma relação de equivalência no conjunto de todos os triângulos do plano euclidiano.*

Exemplo 0.3 *A relação "* $<$ *" em* $\mathbb{R}$ *não é uma relação de equivalência.*

Se R é uma relação de equivalência em um conjunto A e $a \in A$, a classe de equivalência de a é o conjunto $\overline{a} = \{b \in A \mid bRa\}$.

O conjunto quociente de R é o conjunto de todas as classes de equivalência: $A/R = \{\overline{a} \mid a \in A\}$.

É fácil verificar que duas classes de equivalência ou são iguais ou são disjuntas, isto é, $\overline{a} = \overline{b}$ ou $\overline{a} \cap \overline{b} = \varnothing$.