SISTEMAS

DE

NUMERAÇÃO

COMO FUNCIONAM E COMO SÃO ESTRUTURADOS OS NÚMEROS

Trabalho realizado
sob orientação do
professor doutor
MAURI CUNHA DO NASCIMENTO

WAGNER YUWAMAMOTO MIYASCHITA
GRADUANDO EM LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA
FACULDADE DE CIÊNCIAS – UNESP – BAURU

BAURU / 2002

SUMÁRIO

SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

APRESENTAÇÃO

Este trabalho tem por objetivo esclarecer idéias de base numérica e sistemas de numeração como o decimal, o binário, o ternário, o quinário etc.

Tais idéias, como o próprio conceito de número, por serem essencialmente abstratos, são de difícil explicitação. Trabalhos nessa área precisam de cuidados para que não se tornem inacessíveis para a maioria das pessoas, evitando, pois, uma linguagem excessivamente técnica, para que possam ser lidos e estudados por pessoas que não precisam necessariamente estar acostumados à linguagem matemática mais formal.

Este é justamente o perfil desta pesquisa: não se busca elaborar um livro didático destinado a alunos orientados por professores ou que precisam de um conhecimento prévio de um ou outro conceito. Desejamos que este trabalho seja compreensível a todos e por isso o esforço para “tapar os buracos" do raciocínio lógico utilizado. Evitaremos também conclusões abstratas e termos técnicos que podem ser comuns aos familiarizados com a linguagem matemática, mas que podem ser estranhos às demais pessoas.

O trabalho é por fim, uma viagem espetacular, que passa pela história da matemática, por demonstrações de conceitos simples dessa ciência, com cálculos também aparentemente simples, mas que requerem habilidades, uma vez que são realizados em outra base numérica.

INTRODUÇÂO

O homem surgiu na Terra há aproximadamente cem mil anos atrás.

Desse surgimento até hoje ele se desenvolveu, ou melhor, se modificou. Mudou seus hábitos, mudou sua forma de ver o mundo, mudou seu modo de se relacionar, mudaram suas habilidades etc.

Segundo Darwin, essas modificações ocorrem porque a natureza se modifica constantemente, exigindo que os seres vivos se adaptem às novas condições.

O homem, fazendo parte da natureza não poderia ficar livre desse processo e também se modificou ao longo do tempo. Porém com um diferencial: ao contrário dos demais seres vivos o homem adquiriu a capacidade de armazenar os seus conhecimentos de forma organizada, possibilitando a formação de uma cultura, que daria origem a todo o progresso técnico e científico atual.

Essa cultura se desenvolveu sempre que o homem encontrava uma dificuldade em realizar certa atividade.

Quando percebeu que era mais fraco que os outros animais, inventou as primeiras armas de caça: lanças, pedras afiadas e outras.

A partir do momento em que passou a viver em grupos, sentiu a necessidade da comunicação. Nessa hora inventou a linguagem.

Assim ocorreu com a invenção dos números: quando sentiu sua necessidade, inventou-os. É claro que até chegar no modo que são atualmente, os números sofreram grandes transformações ao longo do tempo.

Veremos neste trabalho como eles surgiram, como se desenvolveram, como eles são atualmente e por que chegaram a essa configuração.

UM POUCO DE HISTÓRIA

Primeiramente, os números eram usados de forma intuitiva.

Imagine o homem primitivo que, nômade, vivia em diferentes regiões, de acordo com o que o local lhe possibilitava a obtenção de alimentos. Com o passar do tempo, a natureza sofreu varias modificações: regiões quentes tornam-se frias, a pesca torna-se escassa, plantas e animais morrem, ou seja, a obtenção de alimento torna-se mais difícil.

Com isso, o homem percebeu a necessidade de produzir seu próprio alimento, dedicando-se à agricultura e ao pastoreio. Tais atividades obrigaram o homem a se preocupar em ter uma noção de quantidade.

Registros nos mostram que as primeiras práticas de contagem estavam ligadas ao pastoreio. Alguns vestígios nos mostram que os pastores controlavam seus rebanhos usando montes de pedras.Ao soltar os animais, o pastor separava uma pedra para cada um. Quando o rebanho retornava, o pastor retirava do monte de pedra uma para cada animal que passava. Se sobrassem pedras, faltavam animais; se faltassem pedras, o rebanho havia aumentado. Uma evidência dessa prática está na própria origem da palavra cálculo (do latim *calculus,* que significa pedra).

Pode parecer estranho aos nossos olhos uma deficiência de noção de quantidade, nessa proporção, do homem primitivo, mas temos que considerar que nossa cultura hoje é infinitamente mais desenvolvida que a cultura humana de centenas de milhares de anos atrás, que era quase zero. A percepção de quantidade pelo homem primitivo era praticamente intuitiva, como a dos animais. A contagem, para o homem era: um, dois e muitos, ou seja, a partir de um grupo de três ou quatro objetos, o homem dizia simplesmente que havia muitos objetos nesse grupo.

Depois dessa primeira noção de quantidade, surgiu a numeração escrita, do desejo de manter os registros que antes eram simbolizados pelas pedras. Um registro mais, digamos, confiável, uma vez que as pedras se perdiam, eram difíceis de carregar ou representavam uma dificuldade para números muito grandes. Imagine um grupo de pastores muito ricos que resolvem juntar seus rebanhos e depois tendo que carregar duzentas pedras para representar o rebanho.

Essa numeração escrita era feita com marcas em madeiras ou qualquer outro objeto que possibilitasse a marcação. Essa marcação, a propósito, é tão ou mais antiga que a própria escrita. Não se descarta a tese de que o registro de números tenha sugerido o registro de sons.

Os primeiro sistemas de escrita numérica que se conhece são os dos egípcios e os dos sumérios, surgidos por volta de 3500 a.C.

Os sistemas são semelhantes: ambos atribuem símbolos aos números 1, 10, 100, 1000 etc. e fazem a representação dos outros como sendo a soma desses "principais". Então o número 354 era a soma de três cens, cinco cinqüentas e quatro uns.

Depois dos símbolos, veio a idéia de representar os números com letras. Usado pelos povos hebraico e grego, tal sistema deu origem ao sistema romano onde os números 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000 são representados pelas letras I, V, X, L, C, D, M, respectivamente. Baseados em princípios praticamente iguais ao do sistema sumério ou egípcio, a diferença mais notável é que o sistema romano além de soma dos números "principais", utiliza também a diferença destes para representar os outros números. Por exemplo: o número 442 era representado como sendo quinhentos menos cem, mais cinqüenta menos dez mais um, mais um.

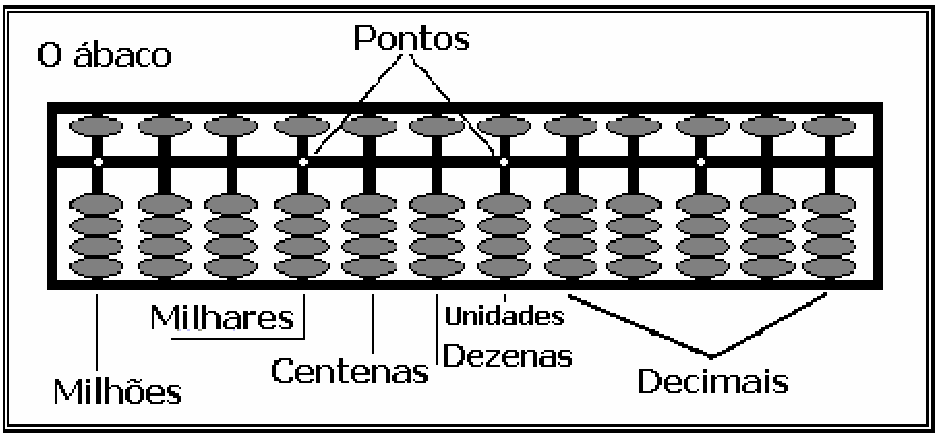
É interessante notar que existem os números que chamamos de “principais” e perceber semelhança entre o sistema sumério e egípcio e o sistema grego romano. Os primeiros usavam como símbolos principais aqueles equivalentes a um dez, cem, mil etc. enquanto os últimos usavam como base do sistema as letras que representavam os números um, cinco, dez, cinqüenta, cem, quinhentos, mil etc. Qual a relação entre eles?

Evidentemente não se trata de uma coincidência o fato de eles utilizarem números como principais. Tampouco o fato de usarem os chamados tipos de números semelhantes (múltiplos de dez para os sumérios e egípcios e múltiplos de cinco para os gregos e romanos) para essa função. Esses números eram os utilizados em decorrência da configuração da primeira máquina de calcular do homem primitivo: os dedos das mãos.

Veremos algo mais sobre esses sistemas de numeração mais adiante, quando estudaremos alguns povos antigos e os sistemas de numeração que utilizavam.

NUMERAÇÃO POSICIONAL X NUMERAÇÃO NÃO POSICIONAL

Se o problema dos números se resumisse apenas em representá-los, qualquer sistema serviria, não havendo problema algum em usar um sistema ou outro. Entretanto, com o desenvolvimento do homem, ele foi obrigado a realizar cálculos cada vez mais complexos. O homem, primeiramente, teve que abandonar a dependência das mãos como máquina de contagem. As circunstâncias exigiam máquinas mais eficientes. Surge, com isso, o ábaco.



Essa máquina surgiu como produto de um aperfeiçoamento do processo de contagem. Quando era obrigado a contar números muito grandes, o homem utilizava a seguinte técnica: ia colocando pedras num pequeno monte e quando esse chegava ter a dez pedras, colocava-se uma pedra num segundo monte e tirava-se todas as pedras do primeiro monte. Quando o segundo chegava a dez, colocava-se uma pedra num terceiro monte e se retirava todas as pedras do segundo monte e assim por diante. Esse é exatamente o mecanismo do ábaco, que teve sua versão primitiva usada no Oriente Médio, surgindo por volta do século III a.C. O instrumento foi aperfeiçoado pelos chineses, que até hoje o utilizam com tal precisão e rapidez que chegam a desafiar as próprias calculadoras.

Por volta do século V d.C., surge, na Índia, a numeração posicional de base 10, que usamos atualmente, Este sistema foi divulgado na Europa em torno de 825 d.C. pelo matemático árabe Mohamed Ben Mussa Al Khawarismi, por isso que o sistema ficou conhecido como sistema indo-arábico, pois surgiu Índia. Na obra de Aryabhata, intitulada Aryabhatiya (de 449 d.C.), aparece a frase "de lugar para lugar, cada um vale dez vezes o precedente". Isso significa o seguinte: por exemplo, tomemos o número 3333. Segundo Aryabhata, cada número vale dez vezes o precedente. Sendo o primeiro número o da direita, o segundo aquele que está à esquerda do primeiro, o terceiro à esquerda do segundo e assim por diante, o quarto número 3 vale dez vezes o terceiro, que vale dez vezes o segundo, e que vale dez vezes o primeiro. Portanto, se o primeiro vale três, uma vez que não há outro número que o antecede, o segundo vale trinta, o terceiro vale trezentos e o quarto vale três mil. Temos, portanto: 3333 = 3+30+300+3000. Percebe-se que a numeração é denominada posicional porque um mesmo número, no caso o 3 assume vários valores dependendo da posição que ocupa. O que não ocorre, por exemplo, na numeração romana, onde o símbolo CDXXXIII representa o número quatrocentos e trinta e três — observe que todos os X's valem igualmente dez e os I's valem sempre um; somente o que muda é a operação que ele realiza: se um símbolo for escrito antes de um outro de maior valor, ele subtrai do outro a quantidade que representa: o C subtrai do D seu valor (500-100); se for escrito depois de um símbolo que representa um valor maior ou igual, ele soma seu valor ao valor do outro (400+10+10+10+1+1+1).

A numeração posicional significou uma grande evolução no processo de cálculos, pois era a representação do mecanismo do ábaco. Observe a comparação da operação de somas dos mesmos números no sistema posicional de base dez e no sistema romano:

1432	MCDXXXII
<u>2468</u>	<u>MMCDLXVIII</u>
3900	MMMCM

A maior praticidade do sistema posicional fica ainda mais clara quando se trata da multiplicação. Tente multiplicar MMCDXLIV por III, sem passar o número para o sistema posicional.

Apesar da evidente vantagem da adoção do sistema de numeração posicional, este sofreu grande resistência por parte dos governos europeus, não por motivos técnicos, mas por razões político-religiosos, pois o sistema era um produto dos árabes muçulmanos. Os cristãos europeus não podiam reconhecer que um sistema inventado pelos mouros fosse melhor que o sistema europeu. Foi uma verdadeira guerra entre os abaquistas europeus, que afirmavam que com o uso do ábaco, o sistema posicional não significava uma grande vantagem, e os algoristas (termo que provém de algoritmo, fórmula sistemática) árabes que defendiam um sistema que possibilitava cálculos rápidos somente com o uso de papel e lápis. É claro que o sistema mais eficiente prevaleceu, mas os títulos de nobres e papas, por exemplo, continuam até hoje utilizando o sistema romano com dom João VI, papa Pio XXII, pois esses títulos, por serem tradicionais, resistiram à invasão e dominação do sistema indo-arábico.

É claro que assim como foi dito no início do capítulo — um número pode ser representado independentemente do sistema de numeração, em posse de uma máquina eficiente de calcular, o sistema de numeração também se torna mero detalhe no momento de fazer os cálculos. Atualmente, poder-se-ia substituir tranqüilamente o sistema posicional por outro não posicional, uma vez que os cálculos podem ser feitos em compactas máquinas de bolso. Haveria, somente, uma certa dificuldade, facilmente superável, em reconhecer os números nesse outro sistema, mas seria, sem dúvida, uma questão de tempo, até as pessoas se acostumarem com a mudança.

Coloco isso como crítica à matemática atual, que está intrinsecamente ligada á tecnologia. As pessoas já não consideram importante o aprendizado dessa ciência. Poucas pessoas fazem, e algumas sequer sabem fazer, cálculos com papel e caneta. Recorrem às máquinas para multiplicar 158 por 2 e até para somar 125 e 85. A matemática perdeu sua magia e o interesse das pessoas; portanto, de nada adianta o sistema posicional dos algoristas e caie-se no argumento dos ignorantes abaquistas europeus do século X.

INTRODUÇÃO AO ESTUDO DAS BASES NUMÉRICAS: NÚMERO, NUMERAL E ALGARISMO

Cabe, nesse ponto de nosso estudo, observar as definições entre número, numeral e algarismo, notando que têm sentidos diferentes.

Os números são a representação da quantidade propriamente dita. Portanto, V e 5 são iguais, ou melhor, equivalentes, se considerarmos o número que esses símbolos representam no sistema de numeração romano e indo-arábico, respectivamente.

Podemos dizer que os numerais são os "nomes" dos números. Ensina-nos a Gramática que "Os numerais são palavras que exprimem número, número de ordem, múltiplo ou fração". Os numerais são, por exemplo: um, dois, dez, treze, primeiro, dobro, metade etc.

No nosso estudo trabalharemos com os numerais cardinais que nos expressam quantidade, tal como: um, dois etc.

Os algarismos são os símbolos que representam os números. Por exemplo: 1, 2, 13, 20 (hindu-arábicos), L, CD, MM (romanos) etc.

Percebemos que os algarismos são formados por uma composição de um, dois ou mais símbolos que se repetem. Chamaremos estes símbolos do algarismo de dígitos. Por exemplo: o algarismo 5 é formado por um só dígito, enquanto o 3612 é formado por quatro dígitos.

No sistema de numeração decimal indo-arábico são, ao todo, dez os dígitos que formam os algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; no sistema de numeração romana, são sete: I, V, X, L, C, D e M.

No sistema de numeração decimal que usamos hoje, os algarismos são representados pela composição dos dígitos. Como os números são infinitos, os algarismos podem ser compostos por quantos dígitos desejar.

No sistema de numeração posicional a representação por algarismos é bastante prática, pois cada dígito do algarismo representa uma quantidade.

No sistema decimal, por exemplo, os algarismos são separados por grupos de três algarismos, da direita para a esquerda. Cada um desses grupos é chamado classe. Dessa forma temos a classe das unidades, a classe dos milhares, a classe dos milhões, a classe dos bilhões etc. Cada classe, por sua vez é dividida em três ordens, também da direita para a esquerda: unidades, dezenas e centenas. Veja o exemplo:

123.456 - tem uma centena de milhar, duas dezenas de milhar, três unidades de milhar, quatro centenas, cinco dezenas e seis unidades.

É interessante perceber agora que o termo número empregado na explicação da frase de Aryabhata tinha significado de dígito quando designava o 3.

Comumente, entretanto, com são representações de números, os numerais e algarismos são chamados de números: o número três, o número 15 etc.

Essa distinção entre esses termos é importante para que se evite confusão no estudo das bases numéricas, pois mesmos dígitos têm valor numérico diferente quando ocupam posições diferentes e seria complicado dizer que um mesmo número tem dois valores numéricos ou que o terceiro número de um número é o número 1 e vale 1, 10 ou 100.

Observação: dissemos que o sistema de numeração decimal tem dez dígitos diferentes. Por extensão, podemos dizer que o sistema de numeração posicional de base b, tem b dígitos diferentes, pois o algarismo que representa a base é sempre formado pelo dígito que representa o primeiro número (1) mais o dígito marcador do vazio (0).

Este marcador do vazio, aliás, tem uma origem bastante polêmica na história da matemática.

Embora a grande invenção prática do zero seja atribuída aos hindus, desenvolvimentos parciais ou limitados do conceito de zero são evidentes em vários outros sistemas de numeração pelo menos tão antigos quanto o sistema hindu.

O sistema sexagesimal babilônico, por exemplo, usado nos textos matemáticos e astronômicos era essencialmente um sistema posicional, ainda que o conceito de zero não estivesse plenamente desenvolvido. Muitas das tábuas babilônicas indicam apenas um espaço entre grupos de símbolos quando uma potência particular de 60 não era necessária, de maneira que as potências exatas de 60 envolvidas devem ser determinadas, em parte, pelo contexto. Nas tábuas babilônicas mais tardias (dos últimos três séculos a.C.) usava-se um símbolo para indicar uma potência ausente, mas isto só ocorria no interior de um grupo numérico e não no final. Quando os gregos prosseguiram o desenvolvimento de tabelas astronômicas, escolheram explicitamente o sistema sexagesimal babilônico para expressar suas frações, e não o sistema egípcio de frações unitárias. A subdivisão repetida de uma parte em 60 partes menores precisava que às vezes "nem uma parte" de uma unidade fosse envolvida, de modo que as tabelas de Ptolomeu no Almagesto (c.150 d.C.) incluem o símbolo ou 0 para indicar isto. Bem mais tarde, aproximadamente no ano 500, textos gregos usavam o ômicron, que é a primeira letra palavra grega *oudem* ("nada"). Anteriormente, o ômicron, restringia a representar o número 70, seu valor no arranjo alfabético regular.

Talvez o uso sistemático mais antigo de um símbolo para zero num sistema de valor relativo se encontre na matemática dos maias das Américas Central e do Sul. O símbolo maia do zero era usado para indicar a ausência de quaisquer unidades das várias ordens do sistema de base vinte modificado. Esse sistema era muito mais usado, provavelmente, para registrar o tempo em calendários do que para propósitos computacionais.

É possível que o mais antigo símbolo hindu para zero tenha sido o ponto negrito, que aparece no manuscrito Bakhshali, cujo conteúdo talvez remonte do século III ou IV d.C., embora alguns historiadores o localize até no século XII. Qualquer associação do pequeno círculo dos hindus, mais comuns, com o símbolo usado pelos gregos seria apenas uma conjectura.

Como a mais antiga forma do símbolo hindu era comumente usado em inscrições e manuscritos para assinalar um espaço em branco, era chamado *sunya*, significando "lacuna" ou "vazio". Essa palavra entrou para o árabe como *sifr*, que significa "vago". Ela foi transliterada para o latim como *zephirum* ou *zephyrum* por volta do ano 1200, mantendo-se seu som mas não seu sentido. Mudanças sucessivas dessas formas, passando inclusive por *zeuero*, *zepiro* e *cifre*, levaram as nossas palavras "cifra" e "zero". O significado duplo da palavra "cifra" hoje - tanto pode se referir ao símbolo do zero como a qualquer dígito - não ocorria no original hindu.

AS BASES NUMÉRICAS

Vamos estudar agora a viabilidade do sistema de numeração posicional. Verificaremos se é "permitido" matematicamente estipular esse sistema e ver que é possível existir sistemas posicionais diferentes desse que usamos.

Como vimos, a idéia do sistema de numeração posicional é a variação do valor numérico dos dígitos do algarismo de acordo com a sua posição a composição do algarismo. Mas o que definirá a sua variação?

Resposta: a base numérica, que, portanto, é o cerne de todo sistema de numeração posicional.

A base numérica usada atualmente é a base de numeração decimal, ou seja, a base 10. Portanto, quando escrevemos 123, por exemplo, estamos nos referindo ao número que contém três unidades, duas dezenas e uma centena, ou seja, o algarismo 123 nada mais é que uma abreviação da expressão $1\times10^2+2\times10+3$.

Genericamente, podemos dizer que um número da forma $a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2}...a_2\, a_1\, a_0$, no sistema de numeração decimal, representa o número:

$a_n10^n+ a_{n-1}10^{n-1}+ a_{n-2}10^{n-2}+...+a_2\, 10^2+a_1 10+ a_0$

Mas será que a base numérica precisa necessariamente ser 10?

Evidentemente que não. Qualquer número pode servir de base numérica.

Podemos provar que qualquer número inteiro positivo pode ser escrito de modo único, numa base numérica qualquer.

Tomamos um número inteiro positivo p qualquer. Se p pode ser escrito numa base numérica b qualquer, então p pode ser escrito na forma:

$p = a_nb^n + a_{n-1}b^{n-1}+... +a_1b+a_0$; com $n \geq 0$, $a_n \neq 0$ e sabendo que temos sempre a_ib^i, para cada índice i, $0 \leq i \leq n$, tem-se que $0 \leq a_i < b$..

Agora vamos provar que p pode ser escrito na forma dessa expressão, e, portanto, ser escrito numa base numérica qualquer:

Como $p = bq_0+ a_0$ onde $q_0 = a_nb^{n-1} + a_{n-1}b^{n-2}+... +a_1$, então dividindo p por b, temos:

$$\begin{array}{l|l} p & b \\ \cline{2-2} a_0 & q_0 \end{array}$$

Assim, q_0 é o quociente, a_0 é o resto da divisão, $0 \leq a_0 < b$ e $q_0<p$.

Dividindo q_0 por b, da mesma forma como foi feito acima obtemos a_1 e q_1 e q_0 pode ser escrito como $q_0 = bq_1+ a_1$, com $0 \leq a_1 \leq b$ e $q_1<q_0$.

Observa-se que se repetimos esse processo indefinidamente, obteremos quocientes cada vez menores. Como o quociente não pode ser negativo, chegará um momento em que ele será nulo. Supondo que quando tivermos o quociente nulo o resto será a_n, teremos:

$p = bq_0+ a_0$, com $0 \leq a_0 \leq b$

$q_0 = bq_1 + a_1$, com $0 \leq a_1 \leq b$

$q_1 = bq_2+ a_2$, com $0 \leq a_2 \leq b$

....

$q_{n-2}= bq_{n-1}+ a_{n-1}$, com $0 \leq a_{n-1} \leq b$

$q_{n-1}= b.0+ a_n$, com $0 \leq a_n \leq b$

Substituindo o valor de q_0 na primeira expressão e depois o valor de q_1 na segunda e assim sucessivamente, teremos:

$$p = bq_0 + a_0 = b(bq_1 + a_1) + a_0 = b^2q_1 + ba_1 + a_0 = b^2(bq_2 + a_2) + ba_1 + a_0 =$$
$$= b^3q_2 + b^2a_2 + ba_1 + a_0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= b^{n-1}(bq_{n-1} + a_{n-1}) + b^{n-2}a_{n-2} + \ldots + b^2a_2 + ba_1 + a_0 =$$
$$p = a_nb^n + a_{n-1}b^{n-1} + a_{n-2}b^{n-2} + \ldots + a_1b + a_0$$

A última expressão mostra que p pode ser escrito com uma base b qualquer, pois chegamos à expressão que, como vimos, condicionava essa hipótese.

Precisamos provar agora que existe uma única forma de se expressar um número numa base b, pois do contrário, teríamos dois números diferentes para expressar uma mesma quantidade. Imagine se 245 e 3214 representassem a mesma quantidade.

Para provar isso, vamos supor duas expressões para o número p, numa mesma base b: $p = a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_2\, a_1\, a_0$ e $p = r_m\, r_{m-1}\, r_{m-2} \ldots r_2\, r_1\, r_0$. Suponhamos que $n \leq m$ e $a_n \neq 0$. Teríamos assim:

$$p = a_nb^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_1b + a_0 = r_mb^m + r_{m-1}b^{m-1} + \ldots + r_1b + r_0;\ b \neq 0 \text{ e } n,m \text{ naturais.}$$

Observe que a_0 e r_0 são os restos da divisão de p por b e $a_nb^{n-1} + a_{n-1}b^{n-2} + \ldots + a_1$ e $r_mb^{m-1} + r_{m-1}b^{m-2} + \ldots + r_1$ são os respectivos quocientes. Pela unicidade do resto e do quociente temos que:

$$a_0 = r_0 \text{ e } a_nb^{n-1} + a_{n-1}b^{n-2} + \ldots + a_1 = r_mb^{m-1} + r_{m-1}b^{m-2} + \ldots + r_1.$$

Repetindo o processo teremos $a_1 = r_1$, $a_2 = r_2$, ... , $a_n = r_n$ e $n = m$.

Prova-se, dessa forma, que a expressão de um número numa determinada base numérica b é única.

Confirmada a possibilidade da adoção de qualquer número para servir de base numérica vamos observar a enorme vantagem desse sistema de numeração posicional.

A primeira grande vantagem é a economia de notação e a facilidade da expressão dos números, pois com somente os dez símbolos do sistema decimal podemos representar, com extrema facilidade, qualquer número que desejarmos.

A segunda, e sem dúvida a mais importante, é a facilidade de realizar cálculos, pois o sistema posicional nos permite estipular regras de cálculo bem simples, como demonstraremos a seguir.

Pensemos agora por que, se qualquer número serviria para ser base numérica, estipulou-se a numeração posicional na base dez?

O número foi escolhido arbitrariamente, sem dúvida alguma, pois não há qualquer razão técnica, matematicamente falando, para o número dez ser tomado como o número base.

Há, sim, uma razão físico-natural, ou seja, esse sistema que utiliza números múltiplos de dez e de cinco como números-base, adotado pelos egípcios, sumérios, gregos e romanos tem uma razão: os cinco dedos em cada mão que a natureza nos deu, que nos auxiliam na contagem. Seguramente, se tivéssemos uma maioria da humanidade com seis dedos em cada mão, a base numérica mais utilizada seria a base seis ou a doze.

Dados históricos nos mostram que realmente a maioria das tribos indígenas americanas utilizavam um sistema de contagem baseadas no número de dedos das mãos. Quase 30% deles utilizava o sistema decimal, outros 30% utilizava ou o sistema quinário (base cinco) ou o sistema quinário-decimal (base quinze), outros 30% utilizava o sistema binário (base dois) — por ser o mais simples de todos os sistemas, era bastante usado — e somente 10% utilizava o sistema vigesimal (base vinte) e 1% o sistema ternário (base três).

Entretanto, apesar do sistema decimal ser o utilizado nos dias atuais quase que universalmente, é possível encontrar perceber a influência de outros sistemas de numeração no uso diário. Disso temos um exemplo clássico: o dia é dividido em vinte e quatro horas (dois “blocos” de doze horas), a hora é dividida em sessenta minutos e os minutos em sessenta segundos; nota-se aí a indiscutível influência do sistema duodecimal (base doze).

Cabe aqui uma curiosidade: o nome que os povos dão aos números pode fazer referência ao sistema de numeração que estes utilizam. Povos da América primitiva davam para o cinco, por exemplo, o nome que equivalia à palavra “mão” e ao dez, “duas mãos”, que evidenciava o uso do sistema quinário. Na língua inglesa, os equivalentes a onze e doze são, respectivamente, eleven (um a mais) e twelve (dois a mais), devido ao uso do sistema decimal. Mas nisso também o sistema decimal sofre influência de outros sistemas: no francês, o equivalente ao número oitenta é o quatre-vingt, literalmente quatro vintes, o que mostra a influência do sistema vigesimal. No português, nosso oito na verdade é uma forma dual para quatro e o nove provém do latim *novem,* que quer dizer novo, ou seja, novo ciclo, provavelmente por ter-se fechado o segundo ciclo de seu sistema numérico; o que mostra a influência do sistema quaternário (base quatro).

AS OPERAÇÕES NO SISTEMA DE NUMERAÇÃO POSICIONAL

Considere os números $p = a_n\, a_{n-1} \ldots a_2\, a_1$ e $q = r_m\, r_{m-1} \ldots r_n\, r_{n-1} \ldots r_2\, r_1\, r_0$, ambos escritos numa base b. Considere também que $a_n \neq 0$, $r_m \neq 0$ e $m \geq n$.

Veremos agora como realizar a soma e a diferença entre esses dois números.

Sabe-se que:

$$p = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$$

$$q = r_m b^m + r_{m-1} b^{m-1} + \ldots + r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \ldots + r_2 b^2 + r_1 b + r_0$$

Portanto, temos:

$$p + q =$$

$$=(a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0) + (r_m b^m + r_{m-1} b^{m-1} + \ldots + r_n b^n + \ldots r_2 b^2 + r_1 b + r_0)$$

Deve-se colocar as bases numéricas com o mesmo índice:

$$r_m b^m + r_{m-1} b^{m-1} + \ldots + b^n(a_n + r_n) + \ldots + b^2(a_2 + r_2) + b(a_1 + r_1) + a_0 + r_0$$

Concluímos que para a soma dos números bastou-se somar seus coeficientes.

Se porventura tivermos um coeficiente da soma que seja um número maior ou igual à base numérica b, ou seja, $a_i + r_i \geq 0$, teremos $a_i + r_i = b + x$ com $0 \leq x < b$. Ou seja, a soma dos coeficientes é igual à base b mais um certo x, que nesse caso pode inclusive ser nulo. Dessa forma, se por exemplo $a_0 + r_0$ for igual a $b + x$, teremos:

$$r_m b^m + r_{m-1} b^{m-1} + \ldots + b^n(a_n + r_n) + \ldots + b^2(a_2 + r_2) + b(a_1 + r_1) + a_0 + r_0 =$$

$$= r_m b^m + r_{m-1} b^{m-1} + \ldots + b^n(a_n + r_n) + \ldots + b^2(a_2 + r_2) + b(a_1 + r_1) + b + x =$$

$= r_m b^m + r_{m-1} b^{m-1} + ... + b^n(a_n + r_n) + ... + b^2(a_2 + r_2) + b(a_1 + r_1 + 1) + x$

De modo análogo é feita a diferença entre p e q:

$p - q =$

$= (a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + a_{n-2} b^{n-2} + ... + a_2 b^2 + a_1) - (r_m b^m + r_{m-1} b^{m-1} + ... + r_n b^n + ... r_2 b^2 + r_1 b + r_0) =$

$= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + a_{n-2} b^{n-2} + ... + a_2 b^2 + a_1 - r_m b^m - r_{m-1} b^{m-1} - ... - r_n b^n - ... r_2 b^2 - r_1 b - r_0) =$

$= -r_m b^m - r_{m-1} b^{m-1} + ... + b^n(a_n - r_n) + ... + b^2(a_2 - r_2) + b(a_1 - r_1) + a_0 - r_0$

Como o coeficiente da base de maior expoente (r_m), é menor que zero, todos os outros coeficientes devem ser menores que zero. Se porventura isso não ocorrer com uma das diferenças, deve-se proceder da seguinte forma:

Suponhamos que, no nosso caso, somente $(a_1 - r_1)$ resulte num número maior que zero.

$-r_m b^m - r_{m-1} b^{m-1} + ... + b^n(a_n - r_n) + ... + b^2(a_2 - r_2) + b(a_1 - r_1) + a_0 - r_0 =$; com $a_i - r_i = r'_i$

Somamos 1–1 a $(-r'_2)$ e, assim, não alteramos o resultado pois 1–1=0:

$= -r_m b^m - r_{m-1} b^{m-1} + ... + b^n(-r'_n) + ... + b^2(-r'_2 + 1 - 1) + b\,(a_1 - r_1) - r'_0 =$

$= -r_m b^m - r_{m-1} b^{m-1} + ... - b^n r'_n + ... + b^2\,(-r'_2 + 1) - b^2 + b\,(a_1 - r_1) - r'_0 =$

$= -r_m b^m - r_{m-1} b^{m-1} + ... - b^n r'_n + ... + b^2\,(-r'_2 + 1) + b\,(a_1 - r_1 - b) - r'_0$

Como a_1 e r_1 são menores que b, a diferença entre eles não será maior que b e, portanto, $(a_1 - r_1 - b)$ será negativo, chegando no resultado que nos serve: um coeficiente menor que zero.

Logicamente, se o coeficiente da base de maior expoente fosse maior que zero, deveríamos ter todos os coeficientes maiores que zero e aplicaríamos o processo acima nos coeficientes menores que zero.

Demonstramos, dessa forma, como é calculado a soma e a diferença entre números na numeração posicional e podemos agora facilmente compreender porque se pode somar ou subtrair dois números posicionando-os um abaixo do outro, somando ou subtraindo os coeficientes das bases de mesmo expoente.

Consideremos agora o número $p = a_n\, a_{n-1} ... a_2\, a_1\, a_0$ e o número $p' = c_m\, c_{m-1} ... c_2\, c_1\, c_0$.

Veremos agora como se realiza a multiplicação e a divisão entre esses números:

Sendo $p = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + a_{n-2} b^{n-2} + ... + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$ e $p' = c_m b^m + c_{m-1} b^{m-1} + c_{m-2} b^{m-2} + ... + c_2 b^2 + c_1 b + c_0$

então p.p' é uma soma de termos da forma $a_r c_s b^{r+s}$.

De modo análogo ao feito na adição, se a multiplicação entre dois coeficientes resultar num número maior que b, deve-se realizar o processo mostrado para que o coeficiente se torne menor que b. Nesse caso, devemos fazer $a_r c_s = qb + t$, sendo q o quociente da divisão de $a_r c_s$ por b e t, o resto.

Por exemplo, se $a_r c_s > b$, temos: $a_r c_s = qb + t$, e portanto:

$a_r c_s b^{r+s} = qb^{r+s+1} + tb^{r+s}$, onde q e t são inteiros positivos e menores que b.

Por exemplo: vamos multiplicar 123 por 25:

Temos que considerar que 123 multiplicado por 25 é: $123 \times 25 = (1 \times 10^2 + 2 \times 10 + 3) \times (2 \times 10 + 5) = 2 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 4 \times 10^2 + 10 \times 10 + 6 \times 10 + 15 = 2 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 4 \times 10^2 + 10^2 + 6 \times 10 + 10 + 5 =$

$2 \times 10^3 + 10 \times 10^2 + 7 \times 10 + 5 = 3 \times 10^3 + 7 \times 10 + 5 = 2 \times 10^3 + 10 \times 10^2 + 7 \times 10 + 5 = 3 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 7 \times 10 + 5 = 3075$

O procedimento de divisão é o mesmo utilizado para a base 10 que explicitamos abaixo num exemplo.

Exemplo. Dividir 253 por 11 na base 10.

```
 253 |11
-22   23
  33
 -33
   0
```

O motivo que nos fez demonstrar esses processos de cálculo tão simples é exatamente o fato de que não são vistos como tão simples por muitos de nossos estudantes. Incontável número de pessoas conclui o ensino médio sem dominar as operações aritméticas, principalmente a multiplicação e a divisão. Ao se depararem com uma dessas operações, caem na armadilha das calculadoras. Estamos revivendo a anedota do mercador alemão que, preocupado com a educação de seu filho, perguntou para um professor para onde deveria enviar seu filho. O professor foi enfático: disse que se os conhecimentos matemáticos do garoto deviam limitar-se à soma e subtração, qualquer universidade alemã serviria, mas se quisesse chegar à multiplicação e divisão, o único lugar onde poderia estudar era a Itália. Hoje, se o estudante quiser se limitar à base do conhecimento, o sistema de ensino atual serve, mas se quiser chegar à complexidade, terá que se dedicar a estudos fora da escola convencional.

Conhecidas e demonstradas as operações no sistema de numeração posicional, vamos agora nos reter em cálculos realizados em bases numéricas particulares.

AS OPERAÇÕES NAS DIFERENTES BASES NUMÉRICAS

As operações aritméticas no sistema de numeração posicional são, como visto, análogas. A única mudança é o resultado das operações dos dígitos de cada sistema. Por exemplo: 4+2=6, na base dez, mas 4+2=11, na base cinco.

Vamos agora mostrar resultados da soma e multiplicação dos dígitos usados em alguns sistemas de numeração. Lembre-se que a subtração e a divisão são as operações inversas da adição e multiplicação, e, portanto, podem ser calculadas também com o auxílio das tabelas abaixo.

Sistema de numeração decimal:

O sistema de numeração decimal é aquele de base numérica dez. Teremos, portanto, que utilizar dez dígitos diferentes para representar os algarismos: 0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, em ordem crescente de valor

	Adição										multiplicação									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Exemplos:

$$\begin{array}{r} 145 \\ \underline{+268} \\ 413 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 863 \\ \underline{\times 64} \\ 3452 \\ \underline{5178+} \\ 55232 \end{array}$$

Sistema de numeração binária:

O sistema de numeração binário é aquele de base numérica dois. Teremos, portanto, que utilizar apenas dois dígitos diferentes para representar seus algarismos: 0 e 1, com 1 > 0.

	adição			multiplicação	
	0	**1**		**0**	**1**
0	0	1		0	0
1	1	10		0	1

Exemplos:

$$\begin{array}{r} 10011 \\ \underline{+1101} \\ 100000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10110 \\ \underline{\times\ 11} \\ 10110 \\ \underline{10110+} \\ 100\ 0010 \end{array}$$

Sistema de numeração ternário:

O sistema de numeração ternário é aquele de base numérica três. Teremos, portanto, que utilizar três dígitos diferentes para representar seus algarismos: 0, 1 e 2.

	adição				multiplicação		
	0	**1**	**2**		**0**	**1**	**2**
0	0	1	2		0	0	0
1	1	2	10		0	1	2
2	2	10	11		0	2	11

Exemplos:

```
 1022        20102
+ 211      ×    12
 2010       110211
            20102+
           1012001
```

Sistema de numeração quinário:

O sistema de numeração quinário é aquele de base numérica cinco. Teremos, portanto, que utilizar cinco dígitos diferentes para representar seus algarismos: 0, 1, 2, 3, 4.

	adição						**multiplicação**				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**		**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	1	2	3	4		0	0	0	0	0
1	1	2	3	4	10		0	1	2	3	4
2	2	3	4	10	11		0	2	4	11	13
3	3	4	10	11	12		0	3	11	14	22
4	4	10	11	12	13		0	4	13	22	31

Exemplos:

```
2431        4210
+320       ×  23
3301      123130
         13420+
         212330
```

Sistema de numeração duodecimal:

O sistema de numeração duodecimal é aquele de base numérica doze. Teremos, portanto, que utilizar doze dígitos diferentes para representar seus algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A e B.

	adição											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**A**	**B**
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	A	B	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	A	B	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	A	B	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	A	B	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	A	B	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	A	B	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	A	B	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B	B	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A

	multiplicação											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**A**	**B**

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
2	0	2	4	6	8	A	10	12	14	16	18	1A
3	0	3	6	9	10	13	16	19	20	23	26	29
4	0	4	8	10	14	18	20	24	28	30	34	38
5	0	5	A	13	18	21	26	2B	34	39	42	47
6	0	6	10	16	20	26	30	36	40	46	50	56
7	0	7	12	19	24	2B	36	41	48	53	5A	65
8	0	8	14	20	28	34	40	48	54	60	68	74
9	0	9	16	23	30	39	46	53	60	69	76	83
A	0	A	18	26	34	42	50	5A	68	76	84	92
B	0	B	1A	29	38	47	55	65	74	83	92	A1

Exemplos:

$$\begin{array}{r} B853A \\ \underline{+2538} \\ BAA76 \end{array} \qquad \begin{array}{r} BA34 \\ \underline{\times\ 13} \\ 2B6A0 \\ \underline{BA34+\ } \\ 129A20 \end{array}$$

CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE NO SISTEMA DECIMAL

A seguir, demonstraremos outro “truque” matemático que pode ser provado a partir das bases numéricas: os famosos critérios de divisibilidade. Indiscutivelmente são úteis em várias ocasiões, entretanto, somente alguns sabem do que se trata, poucos conhecem todos e muitos não têm a menor idéia de onde eles surgiram, imaginando que apareceram por encanto, como vários conceitos matemáticos que são produtos de mágicas de vários tipos, como as fórmulas, as proposições, os enunciados.

As demonstrações dos critérios de divisibilidade são verdadeiramente belas. Fascinantes pelos cálculos e manipulações e perfeitas do ponto de vista matemático.

Critério de divisibilidade por 10: um número é divisível por 10 se o algarismo que o representa tiver o último dígito divisível por 10 (isto é, for igual a zero).

Por exemplo: 14320 é divisível por 10 pois termina em 0.

Critério de divisibilidade por 2: um número é divisível por 2 se o algarismo que o representa tiver o último dígito divisível por 2 (isto é, for igual a 0, 2, 4, 6 ou 8)

Por exemplo: 1356 é divisível por 2 porque 6 é divisível por 2.

Critério de divisibilidade por 5: um número é divisível por 5 se o algarismo que o representa tiver o último dígito divisível por 5 (isto é, for igual a 0 ou 5).

Por exemplo: 245 é divisível por 5 porque 5 é divisível por 5.

Demonstração: seja o número $p = a_n\, a_{n-1} ... a_2\, a_1\, a_0$. Podemos escrever p na forma:L

$a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + ... + a_2\, 10^2 + a_1 10 + a_0 =$

$= 10(a_n 10^{n-1} + a_{n-1} 10^{n-2} + ... + a_2\, 10 + a_1) + a_0 =$

$2.5(a_n 10^{n-1} + a_{n-1} 10^{n-2} + ... + a_2\, 10 + a_1) + a_0$

Portanto, se a_0 é divisível por 2, a soma $2.5(a_n 10^{n-1} + ... + a_2\, 10 + a_1) + a_0$ também é divisível por 2.

Se a_0 é divisível por 5, a soma $5.2(a_n10^{n-1}+...+a_2\,10+a_1) + a_0$ também é divisível por 5.

Note que se a_0 não é divisível por 5, a divisão do número p por 5 deixará o mesmo resto que a divisão de a_0 por 5. Veja:

Considerando $a_0 = 5k + r$:

$p = 5.2(a_n10^{n-1}+ a_{n-1}10^{n-2}+...+a_2\,10+a_1) + 5k +r =$

$= 5[2(a_n10^{n-1}+ a_{n-1}10^{n-2}+...+a_2\,10+a_1) + k] + r$

Fazendo $[2(a_n10^{n-1}+ a_{n-1}10^{n-2}+...+a_2\,10+a_1) + k] = k'$:

$p = 5k' + r$

Esse mesmo fato ocorre com todos os critérios de divisibilidade que envolvem soma (2, 5, e 10) como poderá se observar após enunciá-los.

Observe que não há a necessidade de se considerar n qualquer para se provar os critérios de divisibilidade, bastando considerar n=5, por exemplo, e provando o critério para um número de cinco dígitos estará se provando para qualquer número pois as demonstrações se baseiam na base numérica e, portanto, o processo se repete. Veja a partir do próximo enunciado como a demonstração pode ser feita estipulando-se n=5.

Critério de divisibilidade por 3: um número é divisível por 3 se a soma de seus dígitos for divisíveis por 3.

Por exemplo: o número 4560 é divisível por 3, pois 4 + 5 + 6 + 0 = 15, que é divisível por 3.

Critério de divisibilidade por 9: um número é divisível por 9 se a soma de seus dígitos for divisíveis por 9.

Por exemplo: o número 4563 é divisível por 9, pois 4 + 5 + 6 + 3 = 18, que é divisível por 9.

Demonstração: seja o número p = abcde. Podemos escrever p na forma:

$a.10^4 + b.10^3 + c.10^2 + d.10 + e =$

$= a.10000 + b.1000 + c.100 + d.10 + e =$

$= a.(9999 +1) + b.(999+1) + c.(99+1) + d.(9+1) + e =$

$= 9999a + a + 999b + b + 99c + c + 9d + d + e =$

$= 3.3.(1111a + 111b + 11c + d) + (a + b + c + d + e)$

Se (a+b+c+d+e) é divisível por 3, a soma 3.3(1111a +... +d)+ (a+b+c+d+e) também é divisível por 3.

Se (a+b+c+d+e) é divisível por 9, a soma 3.3(1111a +... +d)+ (a+b+c+d+e) também é divisível por 9.

Critério de divisibilidade por 4: um número será divisível por 4 se o número formado pelos dois últimos dígitos forem divisíveis por 4.

Por exemplo: 59036 é divisível por 4 porque 36 é divisível por 4.

Demonstração: seja o número p = abcde. Podemos escrever p na forma:

$abcde = a.10^4 + b.10^3 + c.10^2 + d.10 + e =$

$= 10^2.(a10^2 + b10 + c) +de =$ (onde de significa d.10+e)

$= 4.25.(a10^2 + b10 + c) +de$

Se de é divisível por 4, a soma $4.25.(a10^2 + b10 + c) +de$ também é divisível por 4.

Critério de divisibilidade por 8: um número será divisível por 8 se o número formado pelos três últimos dígitos forem divisíveis por 8.

Esse critério é análogo ao critério de divisibilidade por 4. Veja:

$a.10^4 + b.10^3 + c.10^2 + d.10 + e =$

$=10^3.(a.10 + b) + cde =$

$= 8.125.(a.10 + b) + cde$

Se cde é divisível por 8, a soma 8.125.(a.10 + b) + cde também é divisível por 8.

Critério de divisibilidade por 7.

Antes de discutirmos o critério, vamos a um exemplo:

Seja o número 24794.

Separamos o dígito 4 das unidades e do número restante 2479, subtraímos o dobro do dígito da unidade. Do número obtido, repetimos o processo até a obtenção de um número suficientemente pequeno que possamos reconhecer se é ou não divisível por 7.

2479	247	24
– 8	– 2	–10
2471	245	14

Como 14 é divisível por 7, podemos concluir que 2479 também é divisível por 7.

A demonstração desse critério é um pouco mais trabalhosa. Consideramos que esse critério é o seguinte: o número $abcde = 10.(a.10^3 + b.10^2 + c.10 + d) + e$ será divisível por 7 se, e somente se $(a.10^3 + b.10^2 + c.10 + d) – 2.e$ for divisível por 7.

Fazendo $(a.10^3 + b.10^2 + c.10 + d) = q$, para simplificar a notação.

Supondo que 10q+e seja divisível por 7, teremos 10q+e=7k. Por essa expressão, podemos considerar que e=7k–10q.

Temos que provar que, obedecendo as condições acima (10q+e é divisível por 7), q–2e é divisível por7, provando, assim, que sempre que se tem um número divisível por 7, aplicando o processo de teste de divisibilidade, o resultado será um número divisível por 7. De fato, se temos que e=7k–10q, substituindo esse valor na segunda expressão, teremos:

$q–2e = q–2(7k–10q) = q–14k–20q = 21q–14k = 7(3q–2k) = 7k'$

Portanto, se um numero for divisível por 7, pelo processo de teste de divisibilidade, obtemos sempre um número também divisível por 7. Entretanto, não se provou que se o número que se quer testar não for divisível por 7 o número resultante será também não divisível por 7.

Podemos provar isso da seguinte forma: considerando que q–2e seja divisível por 7 (q–2e = 7k), temos que ter necessariamente que 10q+e também é divisível por 7.

Se q–2e = 7k, calculamos o valor de q = 7k+2e. Substituindo na expressão 10q+e, temos:

$10q+ e = 10(7k+2e)+e = 70k+20e+e = 7(10k+3e) = 7k'$

Dessa forma, provamos que o processo de divisibilidade por 7 é válido.

Critério de divisibilidade por 11: um número é divisível por 11 se o resultado da soma de seus dígitos na posição ímpar menos a soma de seus dígitos na posição par for divisível por 11.

Exemplo: 40524 é divisível por 11 porque a soma dos dígitos na posição ímpar, ou seja, 4+5+4=13 menos a soma dos dígitos na posição par, ou seja, 0+2=2 é divisível por 11, 13–2=11.

Demonstração: seja o número p = abcde. Podemos escrever p na forma:

$a.10^4 + b.10^3 + c.10^2 + d.10 + e =$

$a.10000 + b.1000 + c.100 + d.10 + e =$

$a.(9999+1) + b.(1001–1) + c.(99+1) + d.(11–1) + e =$

$9999a +a + 1001b – b + 99c + c\ 11d – d + e =$

$11(1111a + 91b + 11c + d) + [(a + c + e) – (b +d)]$

Se $[(a + c + e) – (b +d)]$ é divisível por 11, a soma acima também é divisível por 11. Da direita para a esquerda, o primeiro, terceiro, quinto etc. dígitos são os que ocupam as posições ímpares e o segundo, quarto, sexto etc. dígitos são os das posições pares.

Critério de divisibilidade por um número n=ab, tais que a e b são números primos entre si, ou seja, o MMC de a e b é p e o MDC é 1. Um número será divisível por p se for divisível, simultaneamente, por a e por b. Alguns números nessa forma: 6=3.2, 12=3.4, 14=7.2, 15=3.5.

Exemplo; o número 15282 é divisível por 6 porque é divisível por 2 (último dígito 2) e por 3 (1+5+2+8+2=18).

Este critério é bastante simples: se o número p for divisível por n, poderá ser escrito sob a forma p=nk. Se n=ab, p=(ab)k, ou seja, p será divisível, simultaneamente por a e por b (pois p = a(bk) e p=b(ak)).

A restrição de a e b terem que ser números relativamente primos é necessária pois caso contrário poderíamos ter a seguinte situação: o número 12 é divisível por 8, pois: 8 = 4.2 e 12 é divisível simultaneamente por 2 e 4. Porém nesse caso não conseguimos 12 = 2.4.k para nenhum k inteiro.

CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE EM OUTRAS BASES

Logicamente, podemos estipular critérios de divisibilidade, mesmo que a base numérica seja diferente de 10. Por exemplo, consideramos o número p=abcde, escrito na base numérica duodecimal.

Podemos estipular, por exemplo, os critérios:

Critério de divisibilidade por 2, 3, 4, 6, 12: p será divisível por 2 se o último de seus dígitos for divisível por 2; será divisível por 3 se o último de seus dígitos for divisível por 3; será divisível por 4 se o último de seus dígitos for divisível por 4; será divisível por 6 se o último de seus dígitos for divisível por 6 e será divisível por 12 se o último de seus dígitos for igual a zero.

Demonstração: análoga à demonstração, na base 10, do critério de divisibilidade por 2, 5 ou 10.

Critério de divisibilidade por 11: um número será divisível por 11 se a soma dos dígitos que formam o algarismo que o representa for divisível por 11.

Demonstração: análoga a demonstração, na base 10, dos critérios de divisibilidade por 3 e 9.

Critério de divisibilidade por 13: análogo ao critério de divisibilidade, na base 10, do 11.

Critério de divisibilidade por um número n=ab, tais que a e b são números primos entre si. É idêntico ao do sistema decimal pois esse critério vale para todas as bases numéricas.

CONVERSÃO DE UM NÚMERO DE UM SISTEMA NUMÉRICO PARA OUTRO

Antes de iniciarmos este tópico, definiremos uma notação para se distinguir a base numérica de um número: um número p escrito numa base numérica b será denotado por $(p)_b$. Por exemplo: o número 123 escrito na base numérica 5, ou seja, $1.5^2+2.5+3$, será denotado por: $(123)_5$. Se a base numérica não for especificada, considere a base numérica usual, ou seja, a decimal.

A idéia de poder escrever um mesmo número em qualquer base numérica é bastante evidente. Logicamente, dependo da base numérica utilizada, o número é representado de uma forma diferente: o número 7 do sistema numérico decimal equivale ao número 12 do sistema quinário, por exemplo.

Pensemos agora em um modo prático e simples de conversão do número do sistema decimal para o sistema quinário. É claro que considerando que o número 5 equivale ao número $(10)_5$, 6 equivalerá a $(11)_5$ e 7 a $(12)_5$. Porém, ao trabalharmos com números muito altos, provavelmente esse processo se tornará trabalhoso e demorado. Portanto, temos que encontrar um processo matematicamente aceitável e simples do ponto de vista prático.

Para explicar esse processo, consideremos o exemplo: converter o número 1984 para o sistema numérico de base 5.

Temos o número $10^3+9.10^2+8.10+4$ e temos que transformá-lo num número da forma $a_n5^n+ a_{n-1}5^{n-1}+...+a_15+a_0$.

Iniciaremos o processo dividindo o número que desejamos converter pela base numérica para a qual se deseja que o número seja convertido.

$$\begin{array}{r|l} 1984 & 5 \\ \cline{2-2} 48 & 396 \\ 34 & \\ 4 & \end{array}$$

Assim, o número 1984 pode ser escrito como 1984=396.5+4. Igualmente, o quociente, ou seja, 396 é dividido por 5 e pode ser escrito como 396=79.5+1. repedindo-se o processo até se chegar a um quociente igual a zero:

1984 = 396.5 + 4

396 = 79.5 + 1

79 = 15.5 + 4

15 = 3.5 + 0

3 = 0.5 + 3

Agora basta substituir o 396 da primeira expressão pelo valor correspondente da segunda, o 79 da segunda expressão pelo valor correspondente da terceira e assim sucessivamente:

$1984= 396.5 + 4 = (79.5 + 1).5 + 4 = 79.5^2 + 1.5 + 4= (15.5 + 4).5^2 + 1.5 + 4 =$

$= 15.5^3 + 4.\ 5^2 + 1.5 + 4 = (3.5 + 0).5^3 + 4.5^2 + 1.5 + 4 =$

$= 3.5^4 + 0.\ 5^3 + 4.5^2 + 1.5 +4$

Portanto, $1984=(30414)_5$.

Note que o número obtido na base 5 é o número formado pelos restos das sucessivas divisões do número inicial (1984) por 5. O primeiro dígito é o último resto obtido; o segundo, o penúltimo; o terceiro, o antepenúltimo e assim por diante. Veja:

1984	**5**				
4	**396**	**5**			
	1	**79**	**5**		
		4	**15**	**5**	
			0	**3**	**5**
				3	**0**

Observe que realizamos todas as operações de divisão do número 1984 e dos seus respectivos restos de acordo com a regra da divisão na base do número inicial, ou seja, a base 10.

Vamos agora realizar o processo inverso: converter um número originalmente na base quinária para a base decimal.

Considere o número $(24423)_5$.

Teremos que dividir o número pela base numérica a qual se deseja converter o número: a base 10. Entretanto, temos que levar em consideração, desta vez, as regras operacionais e os algarismos do sistema quinário. Portanto, a base que se deseja não é a base $(10)_5$, que no sistema quinário equivale ao 5 do sistema decimal; mas a base $(20)_5$.

Encontrada a base desejada, dividiremos, finalmente, $(24423)_5$ por $(20)_5$.

24423	**20**			
3	**1221**	**20**		
	11	**33**	**20**	
		13	**1**	**20**
			1	**0**

Portanto, o número $(24423)_5$ será escrito na forma:

$(1)_5.[(20)_5]^3+(13)_5.[(20)_5]^2+(11)_5.[(20)_5]+ (3)_5$

Os dígitos menores que cinco são os mesmos tanto na base cinco quanto na base dez. Os outros terão que ser convertidos para a base dez:

$1.10^3+8.10^2+6.10+3=1863$

Também podemos pensar em converter os números de uma base a outra indiretamente quando fizermos a conversão de um sistema que não é o sistema de numeração decimal, assim, não haveria a necessidade de se trabalhar com operações em outros sistemas de numeração. Dessa forma:

Para converter o número $(24423)_5$ ao sistema decimal pensaremos nesse número não como a soma $2.(10^4)_5+4.(10^3)_5+4.(10^2)_5+2.(10)_5+3$, mas como a soma $2.(5^4)+4.(5^3)+4.(5^2)+2.(5)+3$, no sistema de numeração decimal. Para converter esse número para o sistema decimal, basta se resolver os cálculos: $2.(5^4)+4.(5^3)+4.(5^2)+2.(5)+3=2.625+4.125+4.25+2.5+3+1863$.

Desejando converter o número $(24423)_5$ para a base duodecimal, basta converter o número para a base decimal (1863) e daí converter o número para o sistema de base doze:

$1863 = 1.12^3+0.12^2+11.12+3 = 1.12^3+0.12^2+(B)_{12}.12+3 = (10B3)_{12}$.

PARTICULARIDADES DOS SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

Sistema de numeração binária.

O sistema de numeração de base dois é o sistema que emprega a menor base numérica possível para o sistema de numeração posicional .

É fácil perceber que uma base numérica menor que dois é inviável tanto do ponto de vista prático como do ponto de vista matemático. Uma base negativa é impensável, pois os números negativos sequer eram trabalhados nos tempos em que se solidificou o sistema de numeração posicional na história da matemática. Mesmo hoje, quando se tem uma noção perfeitamente compreensível dos números negativos, a idéia de se estipular uma base numérica menor que zero é descartada pelo fato de que, com isso, iria se priorizar os cálculos de números negativos e é claro que os números positivos — maiores que zero — são mais utilizados na prática que os números negativos, embora do ponto de vista matemático uma base numérica negativa é perfeitamente aceitável.

O zero e o um seguramente não podem ser tomados como bases numéricas. Quando temos a base dez, necessitamos de dez símbolos diferentes para representarmos os algarismos, quando temos a base cinco, cinco símbolos, a base três, três símbolos e assim por diante. Portanto, a base zero não teria símbolo algum e a base um teria somente o zero como símbolo, ou seja, é impossível estipular como base numérica o número zero ou o número um.

Portanto, como a base dois é a menor base numérica do sistema de numeração posicional, é, também o sistema de numeração mais simples que existe, pois somente utilizando os números 0 e 1.

Este sistema de numeração binário é um dos sistemas mais antigos que se conhece provavelmente devido à sua simplicidade. Alguns povos da Austrália e da Polinésia já usavam, apesar de com certa imperfeição, esse sistema de numeração posicional de base dois.

No século XVII, esse sistema de numeração foi proposto por um grande matemático alemão chamado Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) numa época que se discutia qual era a base de numeração mais eficiente.

Note que não é apenas a representação dos algarismos que é simplificada no sistema de numeração binário. As regras das operações nesse sistema são extremamente simples, como observamos no tópico em que mostramos as operações em diferentes bases numéricas.

Entretanto, o sistema de numeração binário tem uma desvantagem em comparação com os demais sistemas numéricos: a enorme quantidade de dígitos que temos que empregar para realizar a notação de números relativamente grandes. Se o sistema de numeração binária fosse a utilizada hoje, o ano de 2002, escrito no sistema decimal, seria denotado por $(11111010010)_2$, por exemplo.

Como a representação binária é bastante simples, esse sistema possibilita sua utilização em códigos, relacionando letras e números. Assim:

_-0, A-1, B-2, C-3, D-4, E-5, F-6, G-7, H-8, I-9, J-10, K-1, L-12, M-13, N-14, O-15, P-16, Q-17, R-18, S-19, T-20, U-21, V-22, W-23, X-24, Y-25, Z-26.

Como $2^5=32$, cada letra será representada por cinco dígitos. Assim:

_-00000, A-00001, B-00010,..., Z-11010.

Este código que acabamos de colocar pode ser usado num aparelho de telegrafia. Supondo que temos dois locais unidos por cinco cabos de transmissão.

Todas as letras do alfabeto podem ser transmitidas com o uso desses cinco cabos através de impulsos elétricos. Considerando que a ausência de impulso corresponde ao número zero, a existência do impulso ao número um e cada um dos cabos à um dígito do algarismo no sistema binário, pode-se converter a combinação de impulsos (um número do sistema binário) em letras do alfabeto, no local de recepção da mensagem.

Esse processo é realizado com o auxílio de dois aparelhos: um transmissor capaz de converter letras em uma combinação de impulsos elétricos e um receptor capaz de realizar o processo inverso. É claro também que isso apenas é possível graças à facilidade em se converter um número no sistema binário em impulsos elétricos.

Além do aparelho telegráfico, temos um outro aparelho que utiliza o sistema binário de numeração para realizar suas funções: as máquinas eletrônicas de somar, como computadores e calculadoras. Justamente por uma representação simples esse sistema é utilizado por essas máquinas que podem representar os números através não de impulsos elétricos como as telegráficas, mas através de semicondutores, porém, com o mesmo princípio de “sim” e “não” utilizado com os impulsos.

Logicamente, os dados de um problema a ser resolvido por um computador são dados no sistema decimal de numeração e por isso a máquina necessita converter o número para o sistema binário. Essa tradução pode ser facilmente automatizada com a utilização de um sistema intermediário, ou seja, um sistema binário-decimal, por exemplo. Esse sistema consiste em traduzir cada dígito do número no sistema decimal para o sistema binário.

Dessa forma, o número 2593 seria escrito como: 0010 0101 1001 0011.

Podemos entender como se realiza a adição em um computador que utiliza o sistema binário de numeração dessa forma: considere a o dígito de um dos números somados, b o dígito correspondente do segundo número somado, c um dígito que foi passado de uma ordem anterior (onde já foi realizada a soma) para a ordem da soma de a com b, r o dígito que deve ser escrito na ordem da soma de a com b e s o dígito que deve ser passado à ordem seguinte.

Todas as combinações (em cada coluna) de a, b, c, r, s, podem ser resumidas na tabela:

a	0	1	0	0	1	1	0	1
b	0	0	1	0	1	0	1	1
c	0	0	0	1	0	1	1	1
r	0	1	1	1	0	0	0	1
s	0	0	0	0	1	1	1	1

Para que o computador possa somar números escritos no sistema binário é necessário um dispositivo composto de três entradas, que correspondem aos dígitos a, b e c, e de duas saídas, que correspondem aos dígitos c e d. O número um corresponde à existência de corrente numa entrada ou numa saída e o zero corresponde à ausência de corrente. Este dispositivo é denominado somador de ordem e funciona de acordo com a tabela acima, ou seja, se não existir corrente em nenhuma das três entradas, tampouco existirá nas saídas, se existir corrente na entrada a, mas não existir nas entradas b e c, existirá corrente na saída r, mas não existirá na saída s, e assim por diante. É fácil, utilizando semicondutores, construir um dispositivo que funcione segundo esse esquema.

Uma utilização bem interessante do sistema de numeração binária e dos códigos que podem ser realizados com esse tipo de sistema foi feita em 1969, quando o homem pisava na Lua pela primeira vez. Armstrong enviou uma mensagem para a Terra que depois de codificada ficou assim:

00100010 01010100 01101000 01100001 01110100 00100111 01110011 00100000

01101111 01101110 01100101 00100000 01110011 01101101 01100001 01101100

01101100 00100000 01110011 01110100 01100101 01110000 00100000 01100110

01101111 01110010 00100000 01100001 00100000 01101101 01100001 01101110

00101100 00100000 01101111 01101110 01100101 00100000 01100111 01101001

01100001 01101110 01110100 00100000 01101100 01100101 01100001 01110000

00100000 01100110 01101111 01110010 00100000 01101101 01100001 01101110

01101011 01101001 01101110 01100100 00101110 00100010 00100000 00100000

00101101 01001110 01100101 01101001 01101100 00100000 01000001 01110010

01101101 01110011 01110100 01110010 01101111 01101110 01100111 00101100

00100000 01000001 01110000 01101111 01101100 01101100 01101111 00100000

00110001 00110001

Cada bloco de oito dígitos equivale a um byte e cada dígito, a um bit.

Um byte representa uma letra, um sinal ou um número, utilizando a linguagem de computador.

A mensagem de Armstrong é traduzida assim:

“	T	h	a	t	‘	s	
o	n	e		s	m	a	l
l		s	t	e	p		f
o	r		a		m	a	n
,		o	n	e		g	i
a	n	t		l	e	a	p
	f	o	r		m	a	n
k	i	n	d	.	“		
—	N	e	i	l		A	r
m	s	t	r	o	n	g	,
	A	p	o	l	l	o	
1	1						

‘” That’s one small step for a man, one giant leap for mankind.” — Neil Armstrong, Apollo 11

“Este é um pequeno passo para um homem, mas um gigantesco salto para a humanidade.” — Neil Armstrong, Apollo 11

O sistema de numeração binária funciona de acordo com um dispositivo bastante curioso, que é construído com várias lâmpadas, postas lado a lado. Este dispositivo funciona da seguinte forma:

1) a seqüência das lâmpadas é o da direita para a esquerda;

2) acionar uma lâmpada é equivalente a acendê-la, se estiver apagada, ou apagá-la, caso esteja acesa;

3) quando uma lâmpada se apaga, a lâmpada imediatamente à sua esquerda se aciona;

4) apenas a primeira lâmpada é acionada manualmente.

Conhecido o funcionamento do dispositivo, vamos atribuir valores para o estado da lâmpada. Uma lâmpada acesa equivale ao número um e uma lâmpada apagada equivale ao número zero.

Iniciando o processo com todas as lâmpadas apagadas, acionamos a primeira lâmpada. Temos o primeiro número do sistema binário de numeração. O segundo acionamento nos mostra o segundo número do sistema binário, o terceiro acionamento nos mostra o terceiro número e assim sucessivamente.

Veja um esquema do dispositivo:

Início	0	0	0	0
Primeiro acionamento	0	0	0	1
Segundo acionamento	0	0	1	0
Terceiro acionamento	0	0	1	1
Quarto acionamento	0	1	0	0
Quinto acionamento	0	1	0	1
Sexto acionamento	0	1	1	0

Temos: lâmpada acesa (1) e lâmpada apagada (0). No primeiro acionamento acendemos a primeira lâmpada, ao apagá-la no segundo acionamento, a segunda lâmpada foi acionada. No terceiro acionamento, acendemos a primeira lâmpada, e assim por diante.

Sistema de numeração ternária

O sistema de numeração de base três não é um dos mais utilizados pelos povos no decorrer da história por não ser o mais simples, para ser escolhido por povos que têm pouco domínio de contagem; nem o que tem a melhor referência para auxílio dos cálculos, como são os dedos das mãos.

Apesar disso, esse sistema de numeração tem uma propriedade notável: é o que tem a maior capacidade numérica, que é a quantidade de números que se pode escrever com um número determinado de dígitos. Por exemplo: considerando o sistema decimal, para se escrever os números de 0 a 999, ou seja, mil números, são necessários 30 dígitos diferentes (10 para cada ordem). Em contrapartida, com os mesmos 30 dígitos podem-se escrever 2^{15} números, pois como para cada ordem são necessários apenas dois números, 30 dígitos permitem escrever números de até 15 ordens.

Vamos comparar agora as bases numéricas entre si e verificar que o sistema mais eficiente desse ponto de vista é o ternário. Suponhamos que temos 60 dígitos. Podemos dividir esses dígitos em trinta grupos de dois elementos e escrever números no sistema binário de até 30 ordens, ou seja, 2^{30} números. Dividindo esses 60 dígitos em vinte grupos de três elementos, podemos escrever 3^{20} números no sistema ternário e assim podemos fazer com outros sistemas de numeração.

Comparar a capacidade dos sistemas é comparar a quantidade de número que podemos escrever em cada sistema com os 60 dígitos, ou seja, comparar os números 2^{30}, 3^{20}, 4^{15}, 5^{12}, 6^{10}, 10^{6}, 12^{5}, 15^{4}, 20^{3}, 30^{2} e 60 que são as bases que podem ter sua capacidade verificada facilmente com o uso de 60 dígitos.

Primeiro vamos comparar 2^{30} e 3^{20} :

$2^{30}=(2^{3})^{10}=8^{10}$

$3^{20}=(3^{2})^{10}=9^{10}$

Portanto, $8^{10}< 9^{10}$ e $2^{30} < 3^{20}$.

Considerando $4^{15} = (2^{2})^{15}=2^{30}$ temos que $3^{20} > 4^{15}$.

Analogamente, comprovam-se também com facilidade que:

$4^{15} > 5^{12} > 6^{10} > 10^{6} > 12^{5} > 15^{4} > 20^{3} > 30^{2} > 60$

Portanto: $3^{20} > 2^{30} = 4^{15} > 5^{12} > 6^{10} > 10^{6} > 12^{5} > 15^{4} > 20^{3} > 30^{2} > 60$, e o sistema ternário é o de maior capacidade numérica.

Essa propriedade faz do sistema ternário um sistema numérico excelente para ser a base numérica usada em um computador. Entretanto, há um problema técnico: precisa-se usar um equipamento que tem três posições estáveis e não apenas dois como era o sistema de “existência de corrente” e “ausência de corrente” dos semicondutores.

Sistema de numeração quinária

O sistema de numeração de base cinco é evidentemente relacionado com o número de dedos da nossa mão. Assim como o sistema de numeração decimal, esse sistema de numeração também se difundiu graças à máquina de calcular primitiva.

Esse sistema teve grande difusão entre vários povos. Juntamente com o sistema de numeração de base dez, o sistema de numeração de base cinco foi o mais utilizado pelos povos primitivos da América.

Além dos povos da América, povos das Ilhas Novas Hébridas, localizadas ao leste da Austrália, utilizavam esse sistema de numeração.

Sistema de numeração de base seis

O sistema de numeração de base seis provavelmente não foi criado por povos que possuíam seis dedos nas mãos, apesar dessa hipótese não ser totalmente descartada. A hipótese mais provável é que esse sistema foi usado por povos que tinham um conhecimento muito grande da geometria, como os babilônios, os mesopotâmios ou os egípcios. Como veremos posteriormente, o sistema de numeração de base sessenta teve uma origem bem semelhante a esta que acabamos de descrever, ou seja, ligada à geometria. A numeração hexadecimal era usada por esses povos.

Percebemos uma nítida relação do número seis com a circunferência. Podemos, com exatamente seis segmentos de reta congruentes ao raio da circunferência construir um hexágono regular inscrito nessa circunferência. É uma relação geometricamente interessante e talvez tenha feito com que alguns povos tomassem esse número seis como um número ideal, um número perfeito.

Ainda sobre o número seis, agora a titulo de curiosidade, ele é considerado um número perfeito, pois possui uma propriedade muito especial. Se somados todos os seus divisores positivos distintos, exceto ele próprio obtemos exatamente o número seis.

Sistema de numeração decimal

O sistema de numeração de base dez teve sua origem nitidamente relacionada com o número de dedos de nossas mãos.

Esse sistema de numeração foi o sistema proposto por Aryabhata, o matemático árabe que difundiu o sistema de numeração posicional na Europa Ocidental por volta do século VIII. Pode-se dizer, portanto que esse sistema é o predominante hoje graças a esse árabe, que difundiu o sistema de numeração decimal entre os povos que dominaram o mundo nos séculos seguintes impondo sua cultura para os "primitivos" colonizados.

Não se pode dizer que o sistema decimal seja o mais perfeito de todos, pois é uma questão realmente de condicionamento. Se Aryabhata tivesse espalhado um sistema de numeração de base cinco, por exemplo, provavelmente estaríamos utilizando o sistema de numeração quinária em nossos dias.

Sistema de numeração duodecimal

O sistema de numeração de base doze tem origem também intimamente ligada com relações com o corpo humano: o número das falanges dos dedos mínimo, anelar, médio e indicador.

É muito fácil se verificar se um número escrito nessa base numérica é divisível por dois, três, quatro e seis pois são os divisores da base numérica e, portanto, somente é necessário se verificar se o último algarismo do número é divisível por dois, três, quatro e seis.

Além disso, para números "redondos" é simples se encontrar a metade, a terça parte, a quarta parte e a sexta parte do número.

A "dúzia", muito utilizada no comércio em geral em nossa sociedade, é exatamente se contar com o sistema de numeração de base doze. Cinco dúzias e meia nada mais são do que $5.12 + 6 = (56)_{12}$. além disso, antigamente, nos países de língua espanhola, se utilizava a gruesa, que significava doze dúzias.

Sistema de numeração vigesimal

Se o sistema numérico de base cinco tem relação direta com o número de dedos de uma mão e o sistema decimal ao número de dedos de ambas mãos, é de se esperar que exista um sistema que considere, além das mãos, os pés para se designar um sistema de numeração.

De fato, o sistema de numeração de base vinte considera o número de dedos das mãos e dos pés somados.

POVOS ANTIGOS E SEUS SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

Ilhas Novas Hébridas.

As Ilhas Novas Hébridas ficam localizadas no Oceano Pacífico, a leste da Austrália.

O sistema de numeração utilizado pelos povos nessa região era um sistema de numeração quinária, ou seja, de base cinco.

Veja como eram os números desses povos: 1) tai, 2) lua, 3) tolu, 4) vari, 5) luna, 6) otai, 7) olua, 8) otolu, 9) ovari, 10) luna luna.

É interessante saber o significado da palavra luna, equivalente ao nosso cinco:

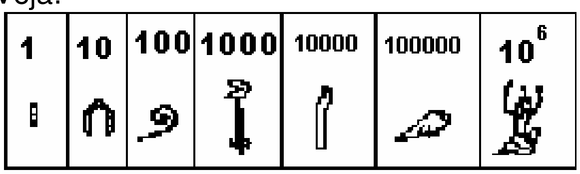
luna significa mão e o prefixo o dos números seis, sete, oito e nove tem significado de uma mão mais alguma coisa. Portanto, otai significa uma mão mais um, por exemplo.

Isso confirma a origem do sistema de numeração utilizado nas Ilhas Hébridas: o número de dedos das mãos.

Egito

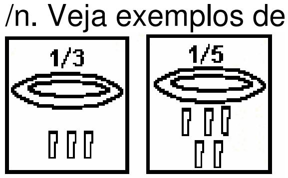
Os egípcios, assim como os sumérios, utilizavam um sistema de numeração que se baseava na soma de elementos.

Eles denominavam símbolos e palavras equivalentes aos números 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000 e assim por diante e seus números eram constituídos pela soma desses símbolos. Por exemplo: eles representavam o número 359 por três símbolos de cem, cinco símbolos de dez e nove símbolos de um. Veja:



Como cada símbolo podia ser repetido nove vezes, Pode-se imaginar o caos para se escrever um número repleto de noves e oitos.

As frações no sistema de numeração egípcio eram reduzidas a 2/3, 3/4 e as do tipo 1/n. Veja exemplos de como eram representadas as frações do tipo 1/n:



Mesopotâmia

Os mesopotámios utilizavam um sistema de numeração sexagesimal, ou seja, de base sessenta.

Eles representavam os números através de sua escrita cuneiforme (baseada em caracteres em forma de cunha): uma cunha na vertical representava o número um, que podia ser repetido até nove vezes e uma cunha na horizontal representava o número dez, que podia ser repetido somente até cinco vezes.

Por esse sistema podia-se escrever qualquer número até cinqüenta e nove. O número sessenta, curiosamente, era representado exatamente como o número um: por uma cunha na vertical. Para se representar números a partir de sessenta, escrevia-se a cunha vertical e após um pequeno espaço, escrevia-se a quantia que faltava.

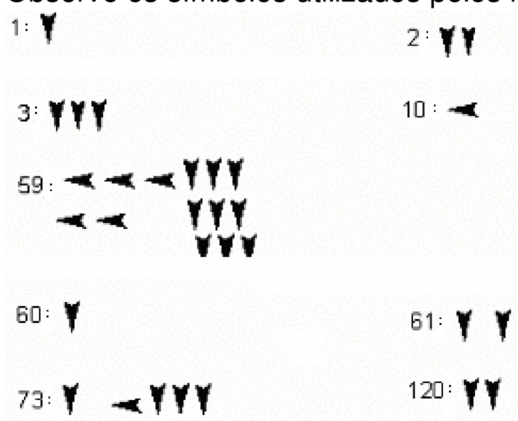
O sistema de numeração de base sessenta tem uma origem mais complexa se comparada com outros sistemas de numeração.

Existe a hipótese de que esse sistema começou a ser utilizado por povos que utilizavam a base dez e se juntaram com povos que utilizavam a base seis.

Entretanto, a hipótese mais provável é que esse sistema tem sua origem ligada à desenvolvida ciência dos mesopotâmios o número sessenta estaria ligado ao número de dias de um ano (o ano do calendário mesopotâmio continha 360 dias).

Essa hipótese também pode explicar por que os graus da circunferência são, ao todo, 360. Os mesopotâmios consideravam o ano como um ciclo e como eles dividiam esse ciclo em 360 partes, também acharam por bem dividir a circunferência em 360 graus.

Observe os símbolos utilizados pelos mesopotâmios:



Roma

Os romanos utilizavam letras para representar os números.

Os símbolos desse sistema eram: I, V, X, L, C, D, M (1, 5, 10, 50, 100, 500 e 1000, respectivamente).

Os símbolos I, X, C e M podem ser repetidos até três vezes. A diferença entre esse sistema e o sistema egípcio é que esse utiliza, além da soma, a diferença, em suas representações. Se o símbolo I, X ou C é escrito à direita de outro de maior valor, somam-se seus valores e quando é escrito à esquerda de outro de maior valor, subtrai-se o seu valor.

A partir do número quatro mil, os romanos colocavam um traço sobre o número indicando "mil vezes mais". A partir de um milhão, os romanos colocavam dois traços, indicando "um milhão de vezes mais".

1) I
3) III
4) IV
6) VI

40000) $\overline{IV}$

4456345) $\overline{\overline{IV}}\overline{CDLVI}CCCXLV$

Grécia

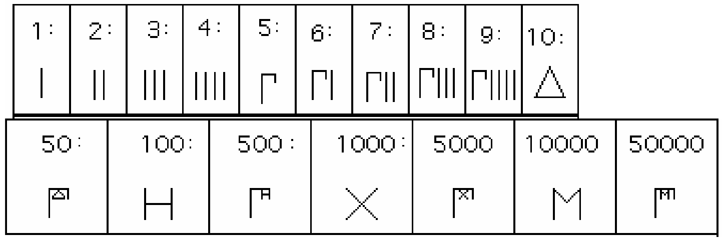
Os gregos utilizavam um sistema de numeração bastante semelhante ao sistema romano, valendo-se de letras de seu alfabeto para representar os números.

As letras eram escolhidas tendo-se por base o "nome" que davam aos números.

Veja:

Γ	Δ	Η	Χ	Μ
Pente	Deka	Hekaton	Khilioi	Murioi
Πεντε	Δεκα	Ηεκατον	Χιλιοι	Μυριοι
5	10	100	1000	10000

Observe agora os números gregos:



Temos então que para se formar um número nesse sistema, agrupam-se séries de símbolos que representam um número base, que pode ser um, cinco, dez etc. cada um podendo ser repetido até quatro vezes.

América

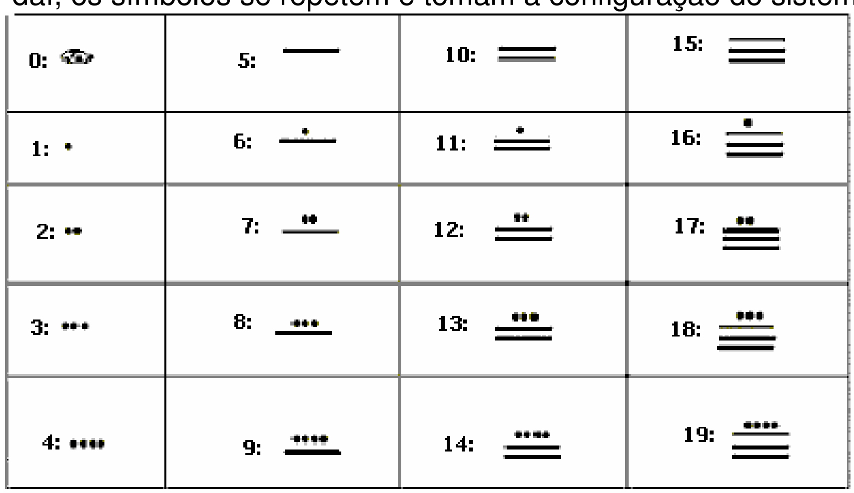
Falaremos agora do sistema de numeração maia.

Os maias utilizavam o sistema de numeração vigesimal, de base vinte.

Provavelmente a origem desse sistema é a soma dos dedos das mãos e dos pés, que é vinte.

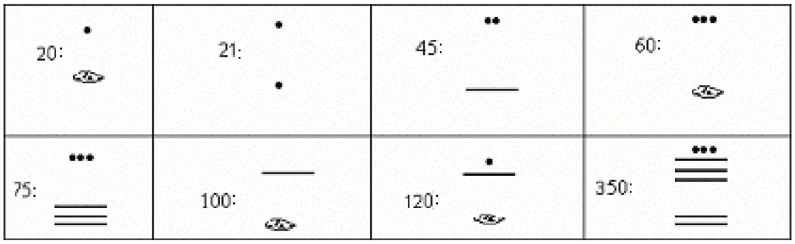
É interessante observar que os maias utilizavam, entre os símbolos que representavam os números, um símbolo equivalente ao nosso zero, ou seja, que representava o vazio.

Os maias utilizavam um ponto para representar o número um e um traço para representar o número cinco. Podia-se repetir o ponto até quatro vezes e o traço até três vezes. Portanto, até o número dezenove o sistema é de base cinco. Porém, a partir daí, os símbolos se repetem e tomam a configuração do sistema vigesimal.



Veja como é engenhoso o sistema numérico maia: a partir do número 20, a numeração segue um processo onde o número é dividido em duas partes uma parte de cima e uma de baixo. A parte de cima é um número que deve ser multiplicado por vinte, que é a base numérica e a parte de baixo é um número que deve ser somado ao número representado pela primeira parte do número. Pode-se dizer que essas partes são as ordens do nosso sistema de numeração decimal posicional.

Observe os exemplos:



China

Os chineses utilizavam um sistema de numeração bastante curioso.

Era um sistema que utilizava adição e multiplicação. Era um sistema de numeração de base dez, mas que tinha símbolos definidos para o dez, cem, mil, dez mil.

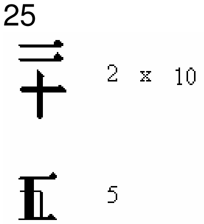
Como o sistema maia, um número era formado por duas partes: uma acima da outra.

Vejamos como eram os símbolos chineses para os números:

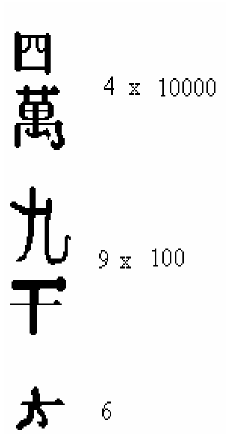
1: 一	6: 六	10: 十
2: 二	7: 七	100: 百
3: 三	8: 八	1000: 千
4: 四	9: 九	10000: 萬
5: 五		

Os números eram formados assim:

25



40906



COMPARAÇÃO ENTRE OS SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

Vamos agora analisar os sistemas de numeração de um modo mais crítico, tentando definir o melhor deles.

Está claro que o sistema de numeração posicional é o mais apropriado frente os sistemas de numeração não posicionais. Lembrando sempre que atualmente a facilidade e a praticidade do sistema de numeração posicional não é mais tão vital quanto eram na época que não havia as máquinas de calcular. Apesar disso, não há sequer a hipótese de se adotar um sistema de numeração assim, pois o sistema numérico não posicional não oferece vantagem alguma sobre o sistema posicional.

Como vamos comparar os sistemas de numeração posicionais, utilizaremos os símbolos usuais sempre que houver necessidade de se representar um número, usando as letras do alfabeto se a base do sistema for maior que dez.

Do ponto de vista matemático, as bases numéricas pouco interferem na resolução dos cálculos. É claro que o objeto com o qual se opera é o número, que é a quantidade propriamente dita, e, portanto, resultados obtidos em qualquer base serão sempre os mesmos, independentemente da representação do número.

As propriedades dos números como os múltiplos e os divisores, por exemplo, também são sempre os mesmos. Portanto, os números primos do sistema de numeração decimal serão primos, quaisquer que sejam as bases numéricas que se trabalhe. No sistema de numeração de base três, então, o número 10 será primo e o número 11, não. Como os múltiplos e os divisores não mudam, o MMC e o MDC de dois ou mais números não se alteram. No sistema de numeração de base doze, portanto, o MMC e o MDC de 10 e 3 é 10.

Os números pertencentes ás classes de números “especiais”, como os números amigos, os números amigos quadráticos e os perfeitos também serão sempre os mesmos independentemente da representação. Portanto, o número 11 será perfeito no sistema numérico de base cinco.

Vemos com isso que o que interfere nesses casos é o número em si e não os algarismos em questão.

Não encontraremos, por isso, nenhum critério para se avaliar um sistema numérico nessa área de cálculos e propriedades, pois todos os sistemas são equivalentes quanto a isso.

Podemos notar, entretanto, que quando trabalhamos com números fracionários as bases numéricas irão interferir na representação mais simples ou não de certos números. Se tomarmos o número 1/3 no sistema decimal, e o representarmos como uma divisão de um por três obteremos a dízima periódica 0,3333... enquanto no sistema de base três esse número é representado simplesmente por $(0,1)_3$.

É claro que estamos falando de um mesmo número ($0,3333... = (0,1)_3$) e é obvio que a representação mais simples é a que temos no sistema ternário.

Logicamente esse também não é um bom critério para se avaliar um sistema de numeração, pois da mesma forma que o sistema ternário é o melhor para se representar o 1/3 decimal, o sistema de numeração de base dez é o melhor para se representar a dízima ternária $(0,202020....)_3 = 1/4 = 0,25$.

Ainda falando em números fracionários a base numérica ímpar transforma o meio em dízima. Esse não é propriamente uma desvantagem em relação às bases ímpares, mas a metade é um conceito muito básico para ser uma dízima, mais básico que o terço, por exemplo.

O sistema de numeração de base ímpar, também dificulta o rápido reconhecimento de números pares e a própria idéia de paridade é obscurecida ao se adotar tal sistema. Portanto se quisermos manter a idéia de paridade e o seu fácil reconhecimento, a base numérica precisa ser par.

Então para se avaliar o melhor sistema de numeração temos que analisar qual é o que nos dá maior praticidade para se trabalhar com ele.

Quando propôs o sistema de numeração binária, o que se queria era encontrar o sistema numérico mais simples possível. Um sistema que somente utiliza a unidade e o zero para representar qualquer número obviamente é um sistema bastante prático. É inviável, entretanto trabalhar com um sistema de numeração de base tão pequena, pois a partir de um certo número, a representação por algarismos ficaria muito extensa. O ano da segunda grande guerra foi, em sistema binário, o ano de 11110010011 dC.

Portanto bases numéricas muito pequenas têm uma desvantagem muito grande.

Da mesma forma, uma base numérica muito grande também causaria alguns transtornos. Imagine a base sessenta sendo empregada. Seria preciso sessenta símbolos diferentes para os algarismos — e o mesmo número de nomes desses algarismos, claro — e isso dificultaria a sua utilização. Imagine como seria ler um número que contém vinte ou trinta algarismos diferentes. É difícil imaginar como seria a nossa tradicional tabuada multiplicativa nessa base numérica. Seria cinco vezes maior que a tabuada multiplicativa do sistema de base doze que apresentamos ao comparar as operações em diferentes bases numéricas.

Logicamente essas desvantagens dos sistemas de numeração de bases muito menores e muito maiores que dez são evidenciadas por nós porque estamos já acostumados com o sistema decimal. É uma questão de adaptação, sem dúvida alguma. Porém, tentamos encontrar o melhor sistema numérico sob nosso ponto de vista, mantendo a parcialidade.

Mantendo essa linha de raciocínio, nos debatemos com os sistemas de bases próximas ao nosso dez.

A base doze é defendida por ser uma base de muitos divisores o que facilita o reconhecimento dos divisores de um número qualquer escrito nessa base. Além disso, a nossa máquina de calcular primitiva, nossas mãos não perde a importância, pois a dúzia é o número de falanges dos quatro dedos das mãos (todos os dedos menos o polegar).

Propriamente para o número dez é muito difícil encontrar defensores empenhados, talvez por ser a base numérica em vigor, suas vantagens já estão desgastadas.

Entretanto, s base dez tem a seu favor um fator importantíssimo: o fato de estar enraizado na cultura de praticamente todos os povos do planeta faz da base dez insubstituível.

Tomando uma visão mais geral, todas as bases numéricas apresentam vantagens e desvantagens e é impossível encontrar uma que seja perfeita e isso faz da substituição da nossa base decimal algo inútil e sem fundamento algum.

Para se trocar a base numérica seria necessário obrigar todas as pessoas a se acostumarem com novos símbolos, novos nomes, novas operações. Teríamos que modificar tudo que utiliza números, como as configurações de aparelhos, as identidades das pessoas, o sistema bancário e de mercado (se a reestruturação pudesse mudar as injustiças desses sistemas, poderia ser uma boa idéia, mas não podem), os livros etc.

Atualmente é impensável se trocar a base numérica. O que se pode e se deve fazer é continuar tirando vantagens dos outros sistemas de numeração como a binária e a ternária para se utilizar nos locais que podem oferecer uma grande vantagem como em computadores, adaptando cada sistema a uma função em que se torne mais eficiente.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa que apresentamos nesse trabalho sobre os sistemas de numeração tem por objetivo não a modificação concreta do sistema de numeração que utilizamos a tanto tempo, nem mesmo ao questionamento dessa hipótese já descartada nas linhas descritas em nossos textos.

Um trabalho como este pode ser encarado como algo sem razão, sem uma serventia real por um ponto de vista excessivamente utilitarista. Vemos com profunda tristeza que essa visão está sendo difundida entre nossos estudantes que se mostram desinteressados pelos assuntos que não lhe dão resultados imediatos e concretos. A constante procura pelo produto do imediatismo “rápido – fácil – simples” destrói uma grande parte de futuros grandes gênios intelectuais, cidadãos do mundo incrível da ciência.

A busca pela quantidade está superando o desejo sagrado pela qualidade em setores, como as escolas e mesmo as universidades, que deveriam prezar por valores que possibilitem o desenvolvimento da ciência.

Esta é uma das intenções desse trabalho: chamar a atenção para assuntos que vão além do “para que isto me servirá?” que domina o senso-comum.

Um trabalho que estuda a essência da álgebra básica, busca respostas na história para o porquê da configuração numérica atual, abre espaço para pequenas curiosidades matemáticas e luta incansavelmente para fazer com que as pessoas queiram aprender matemática e não simplesmente decorar fórmulas e enunciados.

Muitas vezes, as pessoas utilizam a matemática e não se dão conta do porquê do processo que seguem, mas somente se preocupam se o resultado é ou não é verdadeiro. Seguem as regras determinadas por outras pessoas, seja por professores ou alguém que se insinua “intelectualmente superior”. Além de não questionar essas regras, tomam-se elas por verdades absolutas, como se as regras fossem criadas arbitrariamente, por definição.

A matemática é pouco discutida atualmente. Pelo mito (irreal) da complexidade fora do comum dessa ciência, as pessoas já ficam potencializadas a não ter necessidade de entendê-la como um todo, se satisfazendo em aceitar o que lhe é imposto.

Nosso trabalho foi pensado por pessoas que lutam pelo fim desse sistema, pelo aprendizado verdadeiro da matemática, para que faça sentido continuar trabalhando nas pesquisas pelo desenvolvimento científico, cultural e social e para que as pessoas valorizem e participem desse desenvolvimento.

As pessoas que se empenharam para que se alcançássemos os resultados desejados são amantes da matemática, mas não somente dos números e dos cálculos, amam a matemática como um todo, com seus conceitos, suas abstrações e sua mágica história, tão perfeita que só poderia ter sido feita por seres de alto potencial, que amavam também a ciência.

Esperamos com esse trabalho despertar um pouco de amor pelo conhecimento, fazendo justiça aos nossos dedicados cientistas que tanto lutaram para que nós chegássemos ao nível técnico-científico atual.

A busca pela qualidade e pelos conceitos mais profundos, mesmo sendo menos práticos, é vital para uma melhor compreensão da realidade e para a sobrevivência de instituições como as universidades públicas que se dedicam à extensão e pesquisa e não somente formar máquinas para operar no mercado de trabalho.

APÊNDICE

ALGORITMO DA DIVISÃO: UNICIDADE DO QUOCIENTE E DO RESTO

Teorema de Eudoxius:

O teorema de Eudoxius, erroneamente atribuído a Arquimedes e denotado por princípio de Arquimedes, enuncia a seguinte proposição:

Dados dois inteiros a e b, podemos ter apenas duas situações: a é múltiplo de b ou a se encontra entre dois múltiplos consecutivos de b, ou seja: $qb \leq a < (q + 1)b$.

A demonstração desse enunciado é bastante simples: dados dois inteiros a e b, existe um valor inteiro n, tal que $a<nb$. Veja: considerando $b>0$ e $a\geq 0$, temos $b\geq 1$ e portanto $ab\geq a$ e $ab+b>a$. Tomando $a+1=n$, teremos $nb>a$. Se $b<0$ ou $a<0$, podemos considerar ao invés de a e b, $(-a)$ e $(-b)$. Assim: considerando $b<0$ e $a>0$, existe um numero n tal que $n(-b)>a$ e portanto, $(-n)b>a$. Se considerarmos o menor inteiro n que satisfaz essa condição, teremos que $(n-1)b$ será menor ou igual ao número inteiro a, pois $(n-1)b$ não pode ser maior que a. nesse caso: $(n-1)b \leq a < nb$. Tomando $q= (n-1)$, temos que $qb \leq a < (q + 1)b$.

Dados dois números inteiros a e b, tal que $b>0$, existe um único par q e r tais que $a = qb + r$; $0\leq r<b$ ($r = 0$ se, e somente se a for múltiplo de b). Chamamos q de quociente e r de resto da divisão de a por b.

Demonstraremos agora a existência e a unicidade do par q e r e, assim, poderemos definir a operação de divisão.

Dados então dois números inteiros a e b, tal que $b>0$, temos que $qb \leq a < (q + 1)b$, ou seja, a é um múltiplo de b ou a está entre dois múltiplos consecutivos de b. Hipótese garantida pelo teorema de Eudoxius.

Da expressão anterior tiramos que:

$qb \leq a \Rightarrow 0 \leq a - qb$ e $a - qb < b$. Se definirmos $r = a - qb$, teremos que $a = qb + r$, garantindo a existência de q e de r.

Para provarmos a unicidade, suponhamos um segundo par q' e r', tais que:

$a = q'b + r'$; $0 \leq r' < b$

Temos:

$a = qb + r = q'b + r'$

$qb + r = q'b + r' \Rightarrow qb - q'b = r' - r \Rightarrow (q - q')b = r' - r \Rightarrow (r' - r)$ é um numero múltiplo de b. Mas temos que $r' < b$ e $r < b$ e portanto $|r' - r| < b$. Assim, $0 \leq |r' - r| < b$ e é um múltiplo de b. Logo, $|r' - r| = 0$, ou seja, $r' = r$. Como $qb = a - r$ e $q'b = a - r'$, concluímos que $qb = q'b$ e portanto, $q = q'$.

No momento em que definimos os números a e b, fizemos a restrição $b>0$. Porém, se $b<0$ então $-b>0$, logo existem q e r tais que $a = q(-b) + r$; $0\leq r<(-b)$. Logo, $a=(-q)b+r$ e $0\leq r<(-b)=|b|$.

Podemos então enunciar o algoritmo da divisão da seguinte forma: dados dois números inteiros a e b, tal que $b\neq 0$, existe um único par de inteiros q e r tal que $a = qb + r$, com $0 \leq r < |b|$.

MMC E MDC

Os múltiplos de um número: dado um número n, denominam-se múltiplos de n todos os números m, tal que m=nk; $k \in Z$.

Os divisores de um número: dado um número n, denominam-se divisores de n todos os números m, tal que n=mk; $k \in Z$.

O mínimo múltiplo comum (MMC) de dois inteiros positivos a e b é o menor inteiro positivo m que m é múltiplo de a e b. Notação: [a,b]=m.

Por exemplo: o MMC(6, 8) é 24 pois não existe nenhum inteiro positivo m<24, tal que m = 6k e m = 8k'.

O máximo divisor comum (MDC) de dois inteiros a e b (a ou b diferente de zero) é o maior inteiro d que divide a e b. Notação: (a,b)=d.

Por exemplo: o MDC(16, 18) é 2 pois não existe nenhum inteiro d>2, tal que 16 =dk e 18 = dk.

NÚMEROS PRIMOS ENTRE SI OU RELATIVAMENTE PRIMOS

Consideremos os números inteiros a e b. Dados os divisores de a e os divisores de b, dizemos que a e b são números primos entre si se o único divisor comum de a e b for o número 1.

PROPRIEDADES SOBRE DIVISIBILIDADE

Considerando dois números inteiros p e q, se p é divisível por q, o resto da divisão p / q será zero:

$$\begin{array}{l|l} p & q \\ \cline{2-2} 0 & k \end{array} \quad \text{; onde k é o quociente}$$

Portanto, p = qk, se p é divisível por q.

Se p não é divisível por q, p = qk + r, sendo $r \neq 0$ o resto da divisão de p por q.

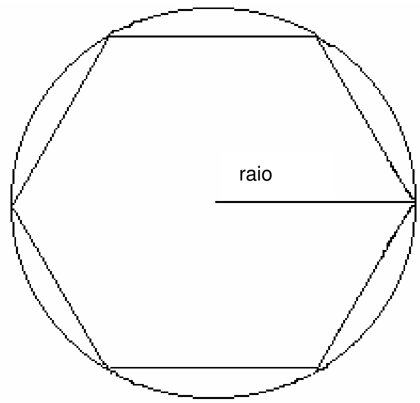
Considere agora cinco números inteiros m, n, t, p, q. Se p é divisível por t e q é divisível por t, então a soma (pm + qn) será divisível por t.

A demonstração é simples: se p é divisível por t e q é divisível por t, temos: p = tk' e q =tk''. Multiplicando a primeira equação por m: pm = tk'm e multiplicando a segunda por n: qn =tk''n. Somando as duas equações membro a membro: pm + qn = tk'm + tk''n = t(k'm + k''n); que é divisível por t.

O HEXÁGONO REGULAR INSCRITO NA CIRCUNFERÊNCIA

O hexágono é um polígono regular, uma figura geométrica possuindo seis lados e seis ângulos congruentes, ou seja, os lados de mesmo comprimento e os ângulos de mesma medida.

Dizer que um polígono é inscritível em uma circunferência significa que os vértices do polígono se interceptam pertencem à circunferência. Veja:



Observe agora uma propriedade interessante do hexágono regular inscrito: o comprimento do raio da circunferência é exatamente igual ao comprimento de cada lado do hexágono. Isso permite dividir a circunferência em seis arcos de circunferência congruentes, cada um com sessenta graus.

NÚMEROS AMIGOS E NÚMEROS PERFEITOS

Quando perguntaram para Einstein o que ele considerava um amigo, o cientista respondeu: “Amigo é aquele que é o outro eu, como o número 284 é do 220”.

O que Einstein quis dizer com isso é que os dois números citados têm uma propriedade bastante rara: os divisores de 284 são 1, 2, 4, 71, 142 e 284. Excluindo o número 284, que é o próprio número que estamos estudando, restam 1, 2, 4, 71 e 142. A soma deles é 220. Somando agora os divisores de 220, excluindo ele próprio, que são 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 e 110 teremos como resultado exatamente 284.

Esse é um exemplo de números amigos. Portanto, dois números são considerados amigos se a soma dos divisores de um deles, exceto ele próprio, for igual ao outro e vice-versa.

Os números amigos menores que 10000 são 220 e 284, 1184 e 1210, 2620 e 2924, 5020 e 5564, 6232 e 6363.

Podemos definir outra classe interessante de números chamados de amigos quadráticos. Por exemplo, os números 13 e 16. O quadrado de 13 é 169 e a soma dos dígitos de 169 resulta 16. O mesmo ocorre com o quadrado de 16 que é 256 a soma dos seus dígitos é exatamente 13.

Considere agora o número 6. Os seus divisores são 1, 2, 3 e 6. podemos perceber que esse número tem uma característica muitíssimo especial: o número 6 é amigo dele próprio e isso é o bastante para se definir que o número 6 pertence a uma classe de números muito restrita: a classe de números amigos dele si mesmos. Esses números foram denominados como números perfeitos.

Um número perfeito é da forma: $P = 2^{p-1}(2^p - 1)$. Veja: $6 = 2^{2-1}(2^2 - 1)$ e $28 = 2^{3-1}(2^3 - 1)$.

Portanto, os dois primeiros números perfeitos são 6 e 28.

O SISTEMA TERNÁRIO É O SISTEMA DE MAIOR CAPACIDADE

Podemos provar que o sistema de numeração de base três é o sistema de maior capacidade de uma maneira relativamente simples para aqueles familiarizados com o cálculo diferencial. Para avaliar a capacidade de um sistema de numeração, consideramos a quantidade de números que pode ser escrito com uma quantidade determinada de dígitos. Por exemplo, para escrever os 1000 primeiros números naturais, no sistema decimal, são necessários 30 dígitos (10 para cada casa decimal).

Sabemos que utilizando sessenta dígitos podemos escrever 2^{30} números no sistema de base dois, 3^{20} números no sistema de base três, 4^{15} números no sistema de base quatro, 5^{12} números no sistema de base cinco, 6^{10} números no sistema de base seis, 10^{6} números no sistema de base dez, 12^{5} números no sistema de base doze, 15^{4} números no sistema de base quinze, 20^{3} números na base vinte, 30^{2} números na base trinta e 60 números na base sessenta.

2^{30} =	1073741824
3^{20} =	3486784401
4^{15} =	1073741824
5^{12} =	244140625
6^{10} =	60466176
10^{6} =	1000000
12^{5} =	248832
15^{4} =	38416
20^{3} =	8000
30^{2} =	900
60^{1} =	60

É evidente que o número sessenta para ser o número de dígitos do exemplo que propomos podia ser qualquer outro, mas tomamos exatamente o número sessenta por esse número ter diversos divisores e serviria muito bem para um exemplo prático.

Entretanto, se tomarmos como n o número de dígitos que se pode utilizar para se formar os algarismos e considerarmos como x a base do sistema de numeração que queremos testar, o número de algarismos que podemos formar com os n dígitos disponíveis será dado pela expressão: $x^{n/x}$, pois utilizaríamos x dígitos para escrever números até a primeira ordem do sistema de numeração, mais x dígitos para escrever números até a segunda ordem e assim por diante. Obteríamos, portanto, n/x ordens. Como a quantidade de algarismos escritos até uma ordem qualquer m numa base numérica qualquer b é determinado por b^{m}, chegamos à expressão considerando b=x e m=n/x.

Escrevendo $x^{n/x}$ como uma função com variável x, podemos calcular o valor máximo que $x^{n/x}$ assume com o auxílio de uma série de teoremas do cálculo diferencial.

Daremos o enunciado de dois desses teoremas que são os que mais nos interessam:

1) uma função y(x) terá valor máximo ou mínimo num ponto x_0 se a derivada dessa função nesse ponto for igual a zero.

2) uma função y(x) será crescente num intervalo se a derivada de y(x) for positiva nesse intervalo e será decrescente num intervalo se a derivada y(x) for negativa nesse intervalo.

Nesse caso, considerando $y(x)= x^{n/x}$, temos derivada de $y(x)= x^{n/x}$:

$y'(x) = (n/x.\ x^{n/x-1})(\ x^{n/x}.\ln x.(-n/x^2)) = n.x^{n/x-2}.(1-\ln x)$

De acordo com a proposição 1, a função terá valor máximo num ponto se e somente se a derivada da função nesse ponto for igual a zero. Nesse caso temos, se y'(x) for igualada a zero:

$n.x^{n/x-2}.(1-\ln x) = 0$

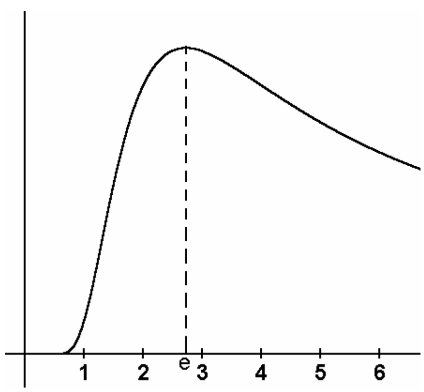
$(1-\ln x) = 0$

$\ln x = 1$

$x = e$

Como a derivada da função é positiva para todos os pontos à esquerda do ponto x=e e negativa para os pontos à direita de x=e, concluímos que a função é crescente para todo x<e e decrescente para todo x>e. Portanto, e é um ponto de máximo da função $y(x)= x^{n/x}$.

O número e é um número irracional que representa a base do sistema natural de logaritmos e seu valor aproximado é e=2,718281828459045...



O número inteiro mais próximo de e é o número 3. Concluímos, portanto, que esta é a base numérica de maior capacidade.

BIBLIOGRAFIA

VEGA, Carlos. Sistema de Numeracion. Editora MIR.

BIANCHINI, Edwaldo, PACCOLA, Herval. Sistemas de Numeração ao Longo da História. Editora: Moderna.

SANTOS, José P. de Oliveira. Introdução à Teoria dos Números. Coleção Matemática Aplicada.

MILIES, César Polcino, COELHO, Sonia Pitta. Números: Uma Introdução à Matemática. Editora: EDUSP.

ORE, Oystein, Invitation to Number Theory. The Mathematical Association of America.

BOYER, Carl. História da Matemática. Editora Universidade de São Paulo.

IFRAH, George. Os Números: A História de uma Grande Invenção.

TAHAN, Malba. O homem que Calculava. Editora: Conquista.