Divisibilidade por 3, 7, 9, 11, 13, 17, ...

Guilhermo Zamalloa Torres

Introdução

No estudo dos critérios de divisibilidade são dadas regras que permitem verificar se um número é divisível por 2, 3, 5, 9 e 11, considerados os critérios mais simples, deixando-se de lado o estudo da divisibilidade por 7, 13, 17 e por outros números primos. Nosso objetivo é apresentar uma regra geral que permita estabelecer critérios de divisibilidade para a divisão por qualquer número primo, excetuando-se apenas o 2 e o 5, que, por sinal, obedecem a regras bastante simples.

Divisibilidade por 7

Inicialmente, apresentamos um exemplo numérico para verificar se um número é ou não é divisível por 7.

Seja o número 59 325. Separamos o dígito das unidades, **5**. Do restante do número, 5932, tiramos o dobro do dígito separado $(2 \times \mathbf{5})$. Do resto, separamos novamente o dígito das unidades e procedemos como se mostra a seguir:

$$
\begin{array}{ll}
5932\mathbf{5} \times \mathbf{2} & 5932 - 10 = 5922 \\
592\mathbf{2} \times \mathbf{2} & 592 - 4 = 588 \\
58\mathbf{8} \times \mathbf{2} & 58 - 16 = 42
\end{array}
$$

Como o último resto, 42, é divisível por 7, concluímos que 59 325 é divisível por 7.

Seja agora o número 35 487.

$$
\begin{array}{ll}
3548\mathbf{7} \times \mathbf{2} & 3548 - 14 = 3534 \\
353\mathbf{4} \times \mathbf{2} & 353 - 8 = 345 \\
34\mathbf{5} \times \mathbf{2} & 34 - 10 = 24
\end{array}
$$

Como 24 não é divisível por 7, concluímos que 35 487 não é divisível por 7.

Justificativa

Representemos um número qualquer na forma $N = 10k + u$. No procedimento descrito, em cada passagem, substituímos $10k + u$ por $k - 2u$.

Provaremos que $10k + u$ será divisível por 7 se e somente se $k - 2u$ for divisível por 7.

i) Se 7 divide $10k + u$, então $10k + u = 7q$ ou $u = 7q - 10k$. Substituindo esse valor de u em $k - 2u$, temos:

$k - 2u = k - 2(7q - 10k) = k - 14q + 20k = 21k - 14q = \mathbf{7}(3k - 2q)$.

Portanto, $k - 2u$ é divisível por 7.

ii) Se 7 divide $k - 2u$, então $k - 2u = 7q$, ou $k = 7q + 2u$. Substituindo esse valor de k em $10k + u$, temos:

$10k + u = 10(7q + 2u) + u = 70q + 20u + u = 70q + 21u = \mathbf{7}(10q + 3u)$.

Portanto, $10k + u$ é divisível por 7.

Divisibilidade por 13

$N = 10k + u$ é divisível por 13 se e somente se $k - 9u$ for divisível por 13.

Exemplos

Verificar se 8 281 e 30 204 são divisíveis por 13.

$$828\mathbf{1} \times 9$$
$$828 - 9 = 819$$
$$81\mathbf{9} \times 9$$
$$81 - 81 = 0$$

0 é divisível por 13; logo, 8 281 é divisível por 13.

$3020\mathbf{4} \times 9$	$3020 - 36 = 2984$
$298\mathbf{4} \times 9$	$298 - 36 = 262$
$26\mathbf{2} \times 9$	$26 - 18 = 8$

8 não é divisível por 13; logo, 30 204 não é divisível por 13.

Divisibilidade por 17

$N = 10k + u$ é divisível por 17 se e somente se $k - \mathbf{5}u$ for divisível por 17.

Exemplo

Verificar se 235 873 é divisível por 17.

$$
\begin{array}{rcl}
23587\mathbf{3} \times 5 & & 23587 - 15 = 23572 \\
357\mathbf{2} \times 5 & & 2357 - 10 = 2347 \\
234\mathbf{7} \times 5 & & 234 - 35 = 199 \\
19\mathbf{9} \times 5 & & 19 - 45 = -26
\end{array}
$$

–26 não é divisível por 17; então, 235 873 não é divisível por 17.

Divisibilidade por 19, 23, 29, 31...

$N = 10k + u$ é divisível por 19 se e somente se $19 \mid (k - \mathbf{17}u)$

$N = 10k + u$ é divisível por 23 se e somente se $23 \mid (k - \mathbf{16}u)$

$N = 10k + u$ é divisível por 29 se e somente se $29 \mid (k - \mathbf{26}u)$

$N = 10k + u$ é divisível por 31 se e somente se $31 \mid (k - \mathbf{3}u)$

$N = 10k + u$ é divisível por 37 se e somente se $37 \mid (k - \mathbf{11}u)$

$N = 10k + u$ é divisível por 41 se e somente se $41 \mid (k - \mathbf{4}u)$

Observamos que para estabelecer um critério de divisibilidade de $N = 10k + u$ por um número, d, subtraímos de k o algarismo das unidades, u, multiplicado por um determinado fator a. Vamos mostrar agora como encontrar um valor de a adequado para cada d.

Determinação do fator a

Supondo que $N = 10k + u$ seja divisível por d, vamos determinar a para que $k - au$ também seja divisível por d.

$d \mid (10k + u) \Rightarrow 10k + u = dq \Rightarrow u = dq - 10k$ e, portanto,

$k - au = k - a(dq - 10k) = k - adq + 10ak = (10a + 1)k - aqd.$

Para que $k - au$ seja divisível por d, basta escolher um inteiro a tal que $10a + 1$ seja divisível por d, isto é, $10a + 1 = dx$, ou $a = (dx - 1)/10$.

Mas a deve ser um número inteiro positivo, portanto o produto dx tem que ser da forma $10k + 1$, pois só dessa maneira $dx - 1$ será divisível por 10. Assim, por exemplo, para escolher o menor a para um critério de divisibilidade por 43, o número 43 deve ser multiplicado por $x = \mathbf{7}$ para dar um produto terminado em **1**: $a = (43 \times \mathbf{7} - 1)/10 = (301 - 1)/10 = \mathbf{30}$, isto é, obtemos o número **30**, que é o fator a procurado.

Sabemos que os divisores primos em estudo só podem terminar em 1, 3, 7 ou 9 e, portanto, os menores fatores x que produzem produtos terminados em 1 são, respectivamente, 1, 7, 3 e 9. Isso facilita a obtenção de a, como veremos nos exemplos abaixo.

Falta mostrar que, tendo escolhido a tal que $10a + 1$ é divisível por d, então, se d dividir $k - au$, d dividirá $N = 10k + u$.

De fato,

$$d \mid (10a + 1) \Rightarrow 10a + 1 = xd \quad (1) \quad \text{e}$$

$$d \mid (k - au) \Rightarrow k - au = yd \quad (2).$$

Multiplicando a igualdade (1) por u, a igualdade (2) por 10 e somando os resultados, obtemos:

$$10au + u + 10k - 10au = xdu + 10yd, \text{ o que implica}$$

$$10k + u = d(xu + 10y), \text{ isto é, } d \mid (10k + u)$$

Vejamos os exemplos:

$N = 10k + u$ é divisível por 47 se e somente se $47 \mid (k - \mathbf{14}u)$

$a = (47 \times \mathbf{3} - 1)/10 = (141 - 1)/10 \Rightarrow a = \mathbf{14}$

$N = 10k + u$ é divisível por 59 se e somente se $47 \mid (k - \mathbf{53}u)$

$a = (59 \times \mathbf{9} - 1)/10 = (531 - 1)/10 \Rightarrow a = \mathbf{53}$

Deixamos para o leitor a determinação de a para critérios de divisibilidade envolvendo outros números primos.

NR

Na **RPM** 12 foram publicados os critérios de divisibilidade aqui expostos, mas, dado o interesse que o tema desperta entre nossos leitores, resolvemos abordar novamente o assunto.

Cumpre observar que o interesse da maioria desses critérios está no fato de eles existirem e não na sua utilidade. Para verificar, por exemplo, se um número inteiro é divisível por 7, é mais simples efetuar a divisão e verificar se o resto é zero.

Mas, aparentemente, a divisibilidade por 7 exerce um certo fascínio sobre os colaboradores da **RPM**, e, assim, apresentamos sem justificativa (que deixamos para o leitor) mais um critério de divisibilidade por 7, este enviado por *Gustavo Gerald Toja Frachia*.

Para explicar a regra, consideremos o seguinte múltiplo de 7: **38391787**.

Separemos seus dígitos em pares da direita para a esquerda:

38 39 17 87

Consideremos a diferença entre cada par de dígitos e o múltiplo de 7 mais próximo, maior para o último par, menor para o penúltimo e assim sucessivamente, alternando para cada novo par: 38 39 17 87.

87: primeiro múltiplo maior que 87 é 91, então fazemos $91 - 87 = 4$.

17: primeiro múltiplo menor que 17 é 14, então fazemos $17 - 14 = 3$.

39: primeiro múltiplo maior que 39 é 42, então fazemos $42 - 39 = 3$.

38: primeiro múltiplo menor que 38 é 35, então fazemos $38 - 35 = 3$.

Os dígitos resultantes, lidos de cima para baixo, formam o número **4333** (que também é múltiplo de 7).

Repetindo o processo para o número resultante 4333, temos:

$$35 - 33 = 2.$$
$$43 - 42 = 1.$$

O resultado final, lido de cima para baixo, é **21**, que é múltiplo de 7. Portanto, o número original, 38391787, é múltiplo de 7.

Outro exemplo

Para observarmos a rapidez do método, suponhamos agora um número de 15 dígitos, 531 898 839 909 822, que também é múltiplo de 7.

	4		**3**		**1**		**6**
5	31	89	88	39	90	98	22
5		**5**		**4**		**0**	

O número resultante é 60143545:

	0		**4**
60	14	35	45
4		**0**	

De 4004, obtemos o número **35**, que é um múltiplo de 7.

Em três passos, determinamos que o número é múltiplo de 7.

Casualmente, poderíamos ter sabido que o número de 15 dígitos era múltiplo de 7 analisando apenas o primeiro resultado, 60**1435**45, pois o miolo (1435) é claramente um múltiplo de 7 e a soma dos pares extremos $(60 + 45 = 105)$ também é.