Capítulo 6 - Circunferências

6.1 Definições. Uma tangente a uma circunferência é uma reta que a intersecciona em apenas um ponto. Este ponto é chamado ponto de tangência e dizemos que a reta e a circunferência são tangentes.

6.2 Teorema. (Teorema Fundamental das Circunferências) Sejam dadas uma reta s e uma circunferência de centro P e raio r. Se P' é a projeção ortogonal de P sobre s, então uma das seguintes situações ocorre.

(1) Todo ponto de s é um ponto exterior da circunferência.

(2) O ponto P' esta na circunferência, e a reta e a circunferência são tangentes neste ponto.

(3) O ponto P' é um ponto interior da circunferência, e a reta intersecciona a circunferência em exatamente dois pontos que eqüidistam de P'.

6.3 Corolário. Uma condição necessária e suficiente para que uma reta seja tangente a uma circunferência é que ela seja perpendicular ao raio que une o centro ao ponto de tangência.

6.4 Definição. Duas circunferências são tangentes se possuem uma reta tangente comum e com o mesmo ponto de tangencia. Duas circunferências são tangentes externa ou internamente, segundo seus centros estejam respectivamente em lados opostos ou do mesmo lado da tangente comum.

6.5 Corolario. a) Uma condição necessária e suficiente para que uma reta que contenha o centro de uma circunferência seja perpendicular a uma corda é que ela interseccione essa corda no seu ponto médio.

b) A mediatriz de qualquer corda passa pelo centro da circunferência.

6.6 Teorema. (Teorema da Intersecção Reta-Circunferência) Se uma reta intersecciona o interior de uma circunferência, então intersecciona a circunferência em dois pontos.

6.7 Teorema. Em uma circunferência ou em circunferências congruentes, duas cordas são congruentes se, e somente se, eqüidistam dos centros das respectivas circunferências.

6.8 Definição. Um ângulo central de uma circunferência é um ângulo cujo vértice é o centro da circunferência.

6.9 Definições. Sejam A e B pontos de uma circunferência de centro C. Se $\overline{AB}$ for um diâmetro, então o conjunto dos pontos A e B e dos pontos da circunferência situados num mesmo semiplano de origem $\overleftrightarrow{AB}$ é uma semicircunferência. Senão, o conjunto formado pelos pontos A e B e pelos pontos da circunferência que estão no interior da ângulo central ACB é chamado um arco menor da circunferência; e o conjunto dos pontos A e B e dos pontos da circunferência exteriores ao ângulo central ACB é chamado arco maior da circunferência.

Dizemos que uma semicircunferência, um arco menor, ou um arco maior é simplesmente um arco da circunferência. Os pontos A e B são as extremidades do arco.

Denotamos o arco com extremidades A e B e contendo o ponto X, o qual é denominado arco AXB, por $\overset{\frown}{AXB}$. Quando não houver perigo de confusão, denotaremos tal arco apenas por $\overset{\frown}{AB}$.

6.10 Definição. A medida em graus, $m\,\overset{\frown}{AXB}$, de um arco $\overset{\frown}{AXB}$ é definida como:

(1) Se $\overset{\frown}{AXB}$ é um arco menor, então $m\,\overset{\frown}{AXB}$ é a medida do ângulo central correspondente.

(2) Se $\overset{\frown}{AXB}$ é uma semicircunferência, então $m\,\overset{\frown}{AXB} = 180$.

(3) Se $\overset{\frown}{AYB}$ é um arco maior, e $\overset{\frown}{AXB}$ é o arco menor correspondente, então $m\,\overset{\frown}{AXB} = 360 - m\,\overset{\frown}{AXB}$.

6.11 Teorema. Se $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{BC}$ são arcos da mesma circunferência, que tem em comum somente o ponto B, e se sua união é um arco $\overset{\frown}{AC}$, então $m\,\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC}$.

6.12 Definições. Um ângulo cujo vértice é um ponto de uma circunferência e cujos lados cortam a circunferência em outros dois pontos distintos é um ângulo inscrito nessa circunferência.

Quando esses dois pontos são extremidades de um diâmetro, dizemos que o ângulo é inscrito na semicircunferência.
Seja $\widehat{BAC}$ um ângulo inscrito em uma circunferência, com B e C pontos pertencentes a ela. Esses dois pontos determinam dois arcos na circunferência . O arco que não contém o ponto A é chamado arco correspondente ao ângulo inscrito dado. Dizemos também que o ângulo subentende o arco.
6.13 Teorema. A medida de um ângulo inscrito numa circunferência é a metade da medida do seu arco correspondente.
6.14 Corolário. Um ângulo inscrito em uma semicircunferência é um ângulo reto.
6.15 Corolário. Ângulos inscritos em um mesmo arco são congruentes.
6.16 Definição. Em uma mesma circunferência ou em circunferências congruentes, dois arcos são congruentes se têm a mesma medida.
6.17 Teorema. Em uma mesma circunferência ou em circunferências congruentes, duas cordas são congruentes se, e somente se, são congruentes os arcos menores correspondentes.
6.18 Definição. Se a reta PT é tangente a uma circunferência no ponto T, então o segmento PT é chamado segmento tangente desde P até a circunferência e a semi-reta TP é chamada semi-reta tangente à circunferência em T.
6.19 Teorema. Os dois segmentos tangentes a uma circunferência desde um ponto exterior dado são congruentes e formam ângulos congruentes com a reta que une o ponto exterior e o centro da circunferência.
6.20 Teorema. Sejam dados uma circunferência C e um ponto exterior P. Sejam r e s retas secantes passando por P e que interseccionam C nos pontos R e S e nos pontos U e L respectivamente. Seja t uma reta que passa por P e é tangente a C no ponto T. Então valem as igualdades $PR \times PS = PU \times PL = (PT)^2$.
6.21 Definição. Este teorema nos garante que as igualdades acima estão unicamente determinadas pela circunferência dada e pelo ponto exterior P dado. O produto $PR \times PS = (PT)^2$ é constante e é chamado potência do ponto P em relação a circunferência.
6.22 Definições. Um polígono é inscritível se tem os seus vértices pertencentes a uma mesma circunferência. Neste caso, dizemos que o polígono está inscrito nessa circunferência, ou que tal circunferência é a circunferência circunscrita ao polígono.
Um polígono é circunscritível se seus lados são tangentes a uma mesma circunferência. Neste caso dizemos que o polígono está circunscrito à circunferência e tal circunferência é a circunferência inscrita no polígono.
6.23 Teorema. As mediatrizes dos lados de um triângulo são concorrentes em um ponto eqüidistante dos três vértices do triângulo.
6.24 Corolário.
a) Existe uma única circunferência que passa por três pontos não colineares.
b) Todo triângulo é inscritível.
6.25 Definição. O ponto de encontro das mediatrizes, que é o centro da circunferência circunscrita a um triângulo, é chamado circuncentro desse triângulo.
6.26 Corolário. Duas circunferências distintas podem interseccionar-se em no máximo dois pontos.
6.27 Teorema. As três alturas de um triângulo são concorrentes.
6.28 Definição. O ponto de encontro das três "alturas"de um triângulo é chamado ortocentro do triângulo.
6.29 Lema. A bissetriz de um ângulo, exceto sua origem, é o conjunto dos pontos do interior do ângulo eqüidistantes dos lados do ângulo.
6.30 Teorema. As bissetrizes dos ângulos de um triângulo são concorrentes em um ponto eqüidistante dos três lados do triângulo.
6.31 Corolário.

a) Existe uma única circunferência que tangencia os três lados de um triângulo.
b) Todo triângulo e circunscritível.

6.32 Definição. O ponto de encontro das bissetrizes, que é também o centro da circunferência inscrita a um triângulo, é chamado incentro do triângulo.

6.33 Definição. O baricentro, o circuncentro, o ortocentro e o incentro são chamados pontos notáveis de um triângulo.

6.34 Teorema. A circunferência que passa pelos pés das perpendiculares baixadas dos vértices de qualquer triângulo sobre os lados opostos a eles, passa também pelos pontos médios dos lados, assim como pelos pontos médios dos segmentos que ligam os vértices ao ponto de intersecção das perpendiculares.

6.35 Teorema. O circuncentro, o baricentro e o ortocentro de um triângulo são colineares. Alem disso, o baricentro divide o segmento cujas extremidades são o circuncentro e o ortocentro, na razão $1 : 2$.

6.36 Lema. (Existência de Triângulo) Se a, b e c são números positivos, sendo que cada um desses números é menor que a soma dos outros dois, então existe um triângulo cujos lados tem comprimentos a, b e c, respectivamente.

6.37 Teorema. (Teorema das Duas Circunferências) Sejam dadas duas circunferências de raios a e b, respectivamente, onde c é a distância entre seus centros. Se $|a - b| < c < a + b$, então as duas circunferências interseccionam-se em dois pontos, um em cada lado da reta que contem os centros.