Representações Paramétricas de Curvas

Mauri C. Nascimento
Depto. de Matemática/FC – Unesp/Bauru

11/06/2004

O movimento de uma partícula descreve uma trajetória, que podemos representar por uma curva no plano ou no espaço. Para cada instante t, podemos considerar suas coordenadas em função do tempo t, isto é, $x=x(t)$, $y=y(t)$ e $z=z(t)$.

Por outro lado, dada uma curva, podemos imaginá-la como uma trajetória e escrever as coordenadas de seus pontos em função de um parâmetro t. Tais funções, juntamente com seus domínios comuns, são denominadas equações paramétricas da curva. Por exemplo, para a reta no plano de equação $y = 2x+1$, podemos tomar $x=t$ e $y=2t+1$, $t\in\mathbf{R}$. É claro que se quisermos somente o segmento de reta com extremos nos pontos (0,1) e (2,5), tomamos $t\in[0,2]$ (ou $0 \le t \le 2$). Note que existe uma infinidade de representações paramétricas para a reta $y=2x+1$. Por exemplo, $x=-t^3+5$, $y=2(-t^3+5)+1=-2t^3+11$, $t\in\mathbf{R}$ é outra parametrização para a reta dada. Se tomarmos $x=t^2$, $y=2t^2-1$, $t\in\mathbf{R}$, não vamos obter a reta toda pois, neste caso, x nunca assume valores negativos.

Se uma curva no plano tem equação $y=f(x)$, $x\in I$, então $x=t$, $y=f(t)$, $t\in I$, é uma parametrização para essa curva. Por exemplo, $x=t$, $y=t^2$, $-2\le t\le 2$ é uma parametrização para a parábola $y=x^2$ para $-2\le x\le 2$.

A **circunferência** com centro (x_0,t_0) e raio r tem equação $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$. Tomando $x=x_0+r\cdot\cos(t)$, $y=y_0+r\cdot\mathrm{sen}(t)$, $0\le t\le 2\pi$, é fácil verificar que x e y tomados desta forma satisfazem a equação $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$. Também, se (x,y) é um ponto da circunferência, então $\left(\frac{x-x_0}{r}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{r}\right)^2=1$. Logo, existe $t\in[0,2\pi]$ tal que $\cos(t) = \left(\frac{x-x_0}{r}\right)$ e $\mathrm{sen}(t) = \left(\frac{y-y_0}{r}\right)$. Assim, $x=x_0+r\cdot\cos(t)$, $y=y_0+r\cdot\mathrm{sen}(t)$, $0\le t\le 2\pi$, é uma parametrização para a circunferência dada.

Para a **elipse** de equação $\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2=1$, procedendo como no caso da circunferência, tomando $\cos(t) = \frac{x-x_0}{a}$ e $\mathrm{sen}(t) = \frac{y-y_0}{b}$, isto é, $x=x_0+a\cdot\cos(t)$, $y=y_0+b\cdot\mathrm{sen}(t)$, $0\le t\le 2\pi$, obtemos uma representação paramétrica.

Para a **hipérbole** de equação $\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2-\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2=1$, como

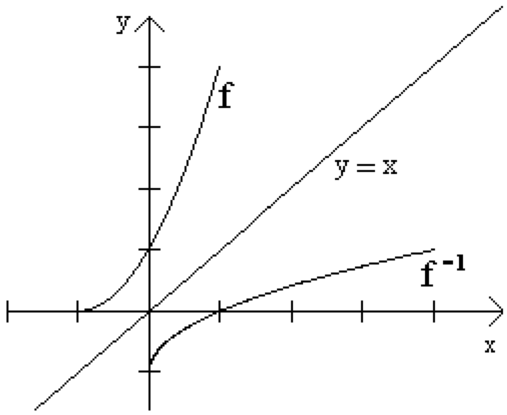
$\mathrm{cosec}^2(t)-\mathrm{cotg}^2(t)=1$, basta tomar $\mathrm{cosec}(t) = \frac{x-x_0}{a}$ e $\mathrm{cotg}(t) = \frac{y-y_0}{b}$, isto é, $x=x_0+a\cdot\mathrm{cosec}(t)$, $y=y_0+b\cdot\mathrm{cotg}(t)$, $0\le t\le 2\pi$ para obter uma representação paramétrica.

A Inversa

Se uma curva Γ tem equações paramétricas $x=f(t)$, $y=g(t)$, $t\in I$ é de simples verificação que a curva Γ' de equações paramétricas $x=g(t)$, $y=f(t)$, $t\in I$, é simétrica em relação à reta $y=x$. Assim, denominamos Γ' de inversa da curva Γ. Note que se a curva Γ é o gráfico de uma função bijetora f, então Γ' é o gráfico de f^{-1}.

Exemplo. A função $f:[-1,1]\to[0,4]$, $f(x)=x^2+2x+1$ é bijetora. Uma parametrização para essa função é dada por $x(t)=t$, $y(t)=t^2+2t+1$, $t\in[-1,1]$. Uma parametrização para a sua inversa,
$f^{-1}:[0,4]\to[-1,1]$, é dada por $x(t)= t^2+2t+1$, $y(t)=t$, $t\in[-1,1]$.

	Gráfico de f		Gráfico de f^{-1}	
t	x	f(x)	x	$f^{-1}(x)$
-1,0	-1,0	0,00	0,00	-1,0
-0,5	-0,5	0,25	0,25	-0,5
0,0	0,0	1,00	1,00	0,0
0,5	0,5	2,25	2,25	0,5
1,0	1,0	4,00	4,00	1,0



Se uma curva tem equações paramétricas $x = x(t)$ e $y = y(t)$ $t \in I$, onde $x(t)$ é inversível, digamos $t(x)$ é a inversa, então $y = y(t) = y(t(x))$, ou seja, $y = f(x)$ onde $f(x) = y(t(x))$.

Exemplo. Seja a curva com equações paramétricas $x = 3 - t$, $y = t^2 + 1$, $0 \le t \le 1$. Nesse caso, $x = 3 - t$ é inversível com inversa $t = 3 - x$. Logo, $y = (3 - x)^2 + 1 = x^2 - 6x + 10 = f(x)$. Como $t \in [0,1]$ então $x \in [2,3]$, ou seja, o domínio de f é [2,3].

Exercícios.

1. Encontre a parametrização da inversa da função $f:[0,9] \to [0,3]$, $f(x) = \sqrt{x}$ e faça o gráfico de ambas
2. Faça o gráfico da curva de equações paramétricas $x = 2\cos^3(t)$, $y = 2\text{sen}^3(t)$, $0 \le t \le 2\pi$.
3. Encontre uma equação cartesiana para cada uma das curvas abaixo

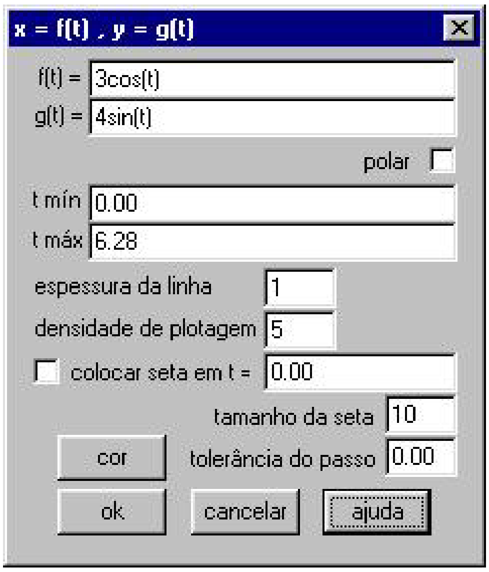
   a) $x = \sqrt{t}$, $y = t$, $t \ge 0$ b) $x = -\sqrt{t}$, $y = t$, $t \ge 0$ c) $x = \text{sen}(2t)$, $y = \cos(2t)$, $0 \le t \le 2\pi$

   d) $x = \sqrt{t+1}$, $y = \sqrt{t}$, $t \ge 0$ e) $x = 2\cos(e^t)$, $y = 3\text{sen}(e^t)$, $-\infty \le t \le \infty$

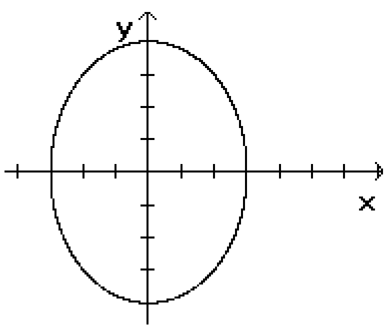
   f) $x = 1 - 2t$, $y = 2 + t$, $-\infty \le t \le \infty$

Equações paramétricas no Winplot (2-dim) (http://math.exeter.edu/rparris)

Para fazer o gráfico de uma função acione Equação e Paramétrica, para abrir a janela



t min e t max: indicam a variação de t
espessura da linha: indica a espessura do gráfico
densidade de plotagem: aumente, caso o gráfico da curva não esteja "suave".
colocar seta em t = para indicar o sentido do deslocamento
Abaixo, o gráfico.



Exemplo. A circunferência de centro em (1,–2) e raio 2 pode ser parametrizada pelas equações $x = 1 + 2\cos(t)$, $y = -2 + 2\text{sen}(t)$, $0 \le t \le 2\pi$, como também pelas equações $x = 1 + 2\text{sen}(t)$, $y = -2 +$

$2\cos(t)$, $0 \le t \le 2\pi$. No primeiro caso, a curva inicia no ponto (3, -2) (quando t=0) e se desloca no sentido anti-horário. No segundo caso, a curva inicia no ponto (1, 0) (quando t=0) e se desloca no sentido horário. Para ver a construção do gráfico no winplot, entre com as equações x=1+2cos(at), y=-2+2sen(at), $0 \le t \le 1$, colocar seta em t = $\boxed{0.5}$, e faça a animação de a de 0 a 2*pi. Faça o mesmo para o outro par de equações paramétricas.

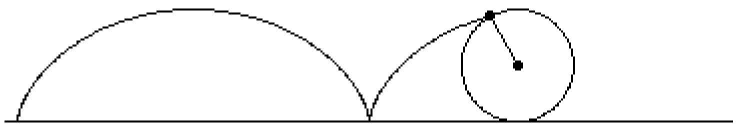
Exemplo. As equações paramétricas da reta que passa por dois pontos A e B podem ser obtidas da equação (x,y)=tA+(1−t)B. Note que, para t=0, obtém–se o ponto A e, para t=1, o ponto B. Para se obter o segmento com extremidades em A e B, basta fazer t variar no intervalo [0,1]. Usando esse método, encontre as equações paramétricas da reta que passa por A=(1,2) e B=(−2,1). Construa no Winplot o segmento com extremidades nos pontos A e B. Construa no Winplot o gráfico da curva inversa do segmento AB.

Exercícios.

1) Faça a parametrização da circunferência de centro na origem e raio 3. Faça o gráfico do arco da circunferência do segundo quadrante.
2) Faça a parametrização da circunferência de centro no ponto (1,–2), e raio 2.
3) Faça a parametrização das elipses (usando seno e cosseno)

   a) $\dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{(y+3)^2}{6} = 1$ b) $25x^2+9y^2=225$ c) $x^2+4y^2=1$.
4) Dada a hipérbole de equação $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{6} = 1$, verifique graficamente e algebricamente, que x=2cossec(t) e y=$\sqrt{6}$ cotg(t) é uma parametrização para sua equação.
5) Encontre uma parametrização para a hipérbole $(y-1)^2-(x+5)^2=9$.

6) Imagine uma circunferência rolando sobre uma reta. Qual será a curva descrita por um ponto sobre a circunferência? A curva é chamada ciclóide e é dada na figura abaixo. Será interessante fazer a animação no winplot.



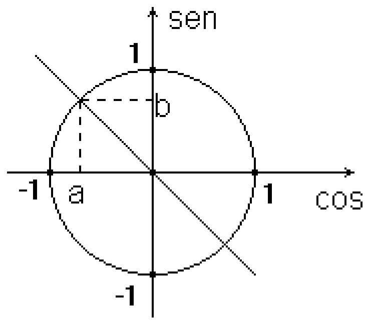
(x,y) = (at-sin(at),1-cos(at)) $0 \le t \le 1$ Equação Paramétrica
(x-a)^2+(y-1)^2=1 Equação Implícita
(x,y) = (a,1) Equação Ponto (x,y)
(x,y) = (a-sin(a),1-cos(a)) Equação Ponto (x,y)
seg (a-sin(a),1-cos(a)) para (a,1) Equação Segmento
y = 0 Equação Explícita
Fazer a animação para a no intervalo de 0 a 4*pi

Comprimento de arco de uma curva plana

Seja Γ uma curva plana com equações paramétricas $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[t_0,t_1]$ onde $x(t)$ e $y(t)$ são funções com derivadas contínuas e não simultaneamente nulas em $[t_0,t_1]$ e tal que Γ não se intercepta, exceto possivelmente em $t = t_0 = t_1$. Então o comprimento de arco da curva Γ quando t vai de t_0 a t_1 é $L = \int_{t_0}^{t_1}\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$ (Swokowski – vol II teor.15.3 pag 296)

Apêndice

1. Se a,b são números reais satisfazendo $a^2+b^2=1$ então existe $t\in[0,2\pi]$ tal que $a=\cos(t)$ e $b=\operatorname{sen}(t)$. Para verificar isso, basta colocar os valores a e b nos eixos dos senos e co-senos, respectivamente, e observar o valor de t.



2. Se a,b são números reais satisfazendo $a^2–b^2=1$ então existe $t\in[0,2\pi]$ tal que $a=\operatorname{cosec}(t)$ e $b=\operatorname{cotg}(t)$. Para verificar isso, basta colocar os valores a e b nos eixos das cosecantes e cotangentes, respectivamente, e observar o valor de t.