Álgebra Linear

Mauri C. Nascimento
Departamento de Matemática
UNESP/Bauru

19 de fevereiro de 2013

Sumário

1 Matrizes e Determinantes

1.1 Matrizes

Definição 1.1 *Uma matriz m×n é uma tabela com números dispostos em m linhas e n colunas.*

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n}$$

onde a_{ij} é o elemento da matriz que está na linha i e na coluna j.

Tipos especiais de Matrizes. Seja uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$. A é chamada:
1. Matriz Nula se $a_{ij} = 0 \ \forall i, \forall j$
2. Matriz Coluna se $n = 1$
3. Matriz Linha se $m = 1$
4. Matriz Quadrada de ordem n se $m = n$

Tipos especiais de Matrizes Quadradas.
1. Matriz Identidade se $a_{ij} = 0$ quando $i \neq j$ e $a_{ii} = 1$.
   Notação: I_n matriz identidade $n\times n$.
2. Simétrica se $a_{ij} = a_{ji}$ (Por exemplo, a matriz identidade)
3. Diagonal se $a_{ij} = 0$ quando $i \neq j$
4. Triangular:
   i) Superior $a_{ij} = 0$ quando $i > j$
   ii) Inferior se $a_{ij} = 0$ quando $i < j$

Numa matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, os elementos a_{11}, $a_{22}, \ldots$, a_{nn} formam a diagonal principal da matriz.

Observe que, se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz simétrica, então a i-ésima linha e a i-ésima coluna de A têm exatamente os mesmos elementos e na mesma ordem. O termo "simétrica"vem do fato de existir uma simetria em A em relação à diagonal principal.

Exemplo 1.1 *A matriz* $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 7 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix}$ *é simétrica e a matriz* $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *é uma matriz triangular superior.*

Exemplo 1.2 *Uma matriz identidade I_n é uma matriz diagonal, simétrica, triangular inferior e triangular superior.*

Operações com matrizes

Adição de matrizes. Dadas $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$. Note que a adição só é possível quando o número de linhas e o número colunas forem iguais nas duas matrizes.

Multiplicação por escalar. Dada $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e α um escalar (número), $\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{m\times n}$

Multiplicação de Matrizes. Dadas $A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B_{n\times p} = [b_{ij}]_{n\times p}$, $AB = C_{m\times p} = [c_{ij}]_{m\times p}$ onde $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. Note que a multiplicação só é possível quando, no produto, o número de colunas da matriz à esquerda é igual ao número de linhas da matriz à direita.

$$\begin{array}{c} \textit{linhas} \\ \textit{de } A_{m\times n} \\ l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_m \end{array} \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{array}{c} \textit{colunas de } B_{n\times p} \\ \begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & \dots & c_p \end{array} \\ \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} C_{m\times p} \\ \begin{bmatrix} l_1c_1 & l_1c_2 & \dots & l_1c_p \\ l_2c_1 & l_2c_2 & \dots & l_2c_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_mc_1 & l_mc_2 & \dots & l_mc_p \end{bmatrix} \end{array}$$

$c_{ij} = l_ic_j = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$.

Exemplo 1.3 *Para* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$ *temos*

$$AB = \begin{bmatrix} 1\times 7 + 2\times 9 & 1\times 8 + 2\times 10 \\ 3\times 7 + 4\times 9 & 3\times 8 + 4\times 10 \\ 5\times 7 + 6\times 9 & 5\times 8 + 6\times 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 28 \\ 57 & 64 \\ 89 & 100 \end{bmatrix}$$

Note que neste exemplo não é possível realizar o produto BA.

Propriedades

Sejam A, B e C matrizes, O uma matriz nula, I uma matriz identidade e r, s escalares. Desde que sejam possíveis as operações, as seguintes propriedades são válidas.

1. Comutativa. $A + B = B + A$. Em geral $AB \neq BA$.
2. Associativa. $A + (B + C) = (A + B) + C$ e $A(BC) = (AB)C$
3. Distributiva. $A(B + C) = AB + AC$ e $(B + C)A = BA + CA$
4. $A + O = O + A = A$; $AI = IA = A$; $OA = O'$; $AO = O'$, onde O e O' são matrizes nulas adequadas.
5. $r(A + B) = rA + rB$
6. $(r + s)A = rA + sA$
7. $(rA)B = r(AB) = A(rB)$

Exemplo 1.4 *Para* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, *temos* $AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Transposição. Se $A_{m\times n} = [a_{ij}]$ é uma matriz, a transposta de A é uma matriz denotada por $A^t = [b_{ij}]$ onde $b_{ij} = a_{ji}$. Observe que as linhas de A^t são exatamente as colunas de A, isto é, para cada i, a i-ésima linha de A^t e a i-ésima coluna de A têm exatamente os mesmos elementos e na mesma ordem.

Propriedades da transposta. Sejam A e B matrizes e r um escalar. Desde que sejam possíveis as operações, as seguintes propriedades são válidas.

1. $(A^t)^t = A$
2. $(rA)^t = rA^t$
3. $(A+B)^t = A^t + B^t$
4. $(AB)^t = B^tA^t$. Em geral, $(AB)^t \neq A^tB^t$.
5. A é simétrica se, e somente se, $A = A^t$

Em alguns textos, como no livro do Boldrini, a transposta da matriz A é denotada por A'.

Inversa. Se A é uma matriz quadrada, a inversa de A, caso exista, é uma matriz denotada por A^{-1} satisfazendo $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ (matriz identidade).
Se A e B têm inversas então AB tem inversa e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, pois $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$.

Exemplo 1.5 *Para* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, *temos* $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. *Temos também,* $AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$, $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -10 & 3 \end{bmatrix} = B^{-1}A^{-1}$ *e* $A^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \neq (AB)^{-1}$.

1.2 Determinante de uma matriz quadrada

Em lugar de definir o determinante de uma matriz quadrada, vamos considerar o desenvolvimento de Laplace, a partir da i-ésima linha da matriz (o que também poderia ser feito a partir da j-ésima coluna):
Para uma matriz quadrada de ordem 1 o determinante é dado por $det([a]) = a$.
Para uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, de ordem $n \geq 2$

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det(A_{ij}),$$

onde A_{ij} é a matriz quadrada de ordem $n-1$, obtida da matriz A retirando-se a i-ésima linha e j-ésima coluna.

A definição de determinante pode ser encontrada nos livros constantes da bibliografia.

Exemplo 1.6 *Se* I_n *é a matriz identidade de ordem* n *então* $det(I_n) = 1$.

Exemplo 1.7 *Se* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *então* $det(A) = ad - bc$.

Exemplo 1.8 *Se* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ *então* $det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$.

Exercício 1.1 *Calcular o determinante das matrizes:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad e\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriedades de determinantes.
1. Se A tem uma linha (ou coluna) nula então $det(A) = 0$
2. Se multiplicarmos uma linha (ou coluna) de uma matriz por uma constante r, seu determinante fica multiplicado por r
3. Se A é uma matriz $n \times n$ e r é um escalar então $det(rA) = r^n det(A)$
4. Trocando a posição de duas linha (ou colunas), o determinante troca de sinal
5. Trocando a linha i por linha $i + r(\text{linha } j)$, não se altera o determinante (o mesmo vale para colunas em lugar de linhas)
6. Se A tem duas linhas (ou colunas) iguais então $det(A) = 0$
7. $det(AB) = det(A)det(B)$
8. Se existe a inversa de A então $det(A^{-1}) = 1/(det(A))$
9. Existe a inversa de A se, e somente se, $det(A) \neq 0$
10. O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal
11. Se em uma matriz quadrada A, $linha\ i = r(linha\ j) + s(linha\ k)$, $j \neq i$ e $k \neq i$, então $det(A) = 0$
12. $det(A) = det(A^t)$

Exercícios 1.2 *Livro do Boldrini página 11 exercícios 1, 2, 6, 9, 10, 12, 13; página 90 exercícios 4, 8 e 13*

Exercício 1.3 *Mostre que se* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *é uma matriz inversível então*

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

1.3 Matriz escalonada

Definição 1.2 *Dizemos que uma matriz A é uma matriz escalonada (ou matriz em forma de escada) se as condições abaixo são satisfeitas:*
a) As linhas nulas (caso existam) localizam-se abaixo de todas as linhas não nulas.
b) Caso i e j sejam linhas não nulas e i < j, então o primeiro elemento não nulo da linha i está em uma coluna anterior à do primeiro elemento não nulo da linha j.

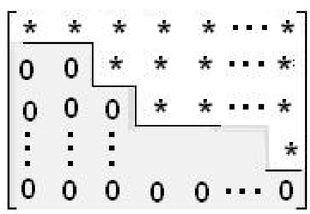


Figura 1: Matriz escalonada

Exemplo 1.9 *São matrizes escalonadas:*

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, [7].$$

Não são matrizes escalonadas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 7 & 5 \\ 0 & 7 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \\ & & \end{bmatrix}$$

1.4 Equivalência de matrizes por linha

Definição 1.3 *Dizemos que uma matriz A é equivalente por linhas a uma matriz B, se a matriz B pode ser obtida da matriz A, a partir de uma seqüência finita de operações elementares, as quais estão listadas a seguir.*
1. Troca da linha i com a linha j ($L_i \leftrightarrow L_j$).
2. Multiplicação da linha i por um escalar não nulo r ($L_i \rightarrow rL_i$).
3. Substituição da linha i por r vezes a linha j somada à linha i, ($L_i \rightarrow L_i + rL_j$).

No caso de A ser uma matriz quadrada, a operação (1) troca o sinal do determinante; a operação (2) multiplica o determinante por r e a operação (3) não altera o determinante.

Exercício 1.4 *Utilizando as operações elementares transforme as matrizes abaixo em matrizes equivalentes escalonadas.*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 0 & 7 & 9 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercícios 1.5 *Livro do Lipschutz: pag. 36 - 1.20, 1.21, 1.22; pag. 50 - 1.54 e 1.55*

Teorema 1.1 *Uma matriz A é inversível se, e somente se, A é equivalente por linhas à matriz identidade. Além disso, a mesma sucessão de operações elementares que transformam a matriz A na matriz identidade, transformam a matriz identidade na inversa de A.*

Exemplo 1.10 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} L_1 \leftrightarrow L_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} L_3 \rightarrow L_3 - 2L_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} L_3 \rightarrow L_3 + L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_2 \to L_2 + L_3 \\ e \\ L_1 \to L_1 + 2L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] L_2 \to \tfrac{1}{2}L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] L_1 \to L_1 - L_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] L_3 \to -L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Assim, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -2 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Precisamos de tomar cuidado ao fazer mais de uma operação por linhas em uma passagem:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} L_2 \to L_2 - L_3 \\ \text{e} \\ L_3 \to L_3 - L_2 \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Note que a matriz à esquerda tem determinante -2 e a matriz à direita tem determinante nulo, o que não deveria ser, pois esse tipo de operação não altera o determinante. Quando fazemos $L_2 \to L_2 - L_3$, a linha L_2 passa a ser $[\ 0 \quad -1 \quad 0\ ]$ e, fazendo em seguida $L_3 \to L_3 - L_2$, a linha L_3 deveria ser $[\ 1 \ \ 5 \ \ 1\ ]$ e não $[\ 0 \ \ 1 \ \ 0\ ]$.

Exercício 1.6 *Determine as inversas das matrizes dadas abaixo através de escalonamento, caso seja possível.*

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Exercícios 1.7 *Resolva o exercício 9 da página 90 do livro do Boldrini. Livro do Lipschutz: pag. 160 - 4.14; pag. 192 - 4.80 e 4.81*

2 Sistemas Lineares

2.1 Sistema de Equações Lineares

Definição 2.1 *i) Uma equação linear nas incógnitas (ou variáveis)* $x_1,\ x_2,\ \cdots, x_n$ *é uma equação dada por:* $a_1x_1 + a_2x_2 + +a_nx_n = b$ *onde* b *e os coeficientes* a_i *são escalares.*
ii) Uma solução da equação dada em (i) é uma n-úpla $(c_1, c_2, ..., c_n)$ *de escalares que satisfaz a equação:* $a_1c_1 + a_2c_2 + +a_nc_n = b$.
iii) Um sistema de equações lineares é um conjunto (finito) de equações lineares.
iv) Uma solução de um sistema de equações lineares com n incógnitas é uma n-úpla $(c_1, c_2, ..., c_n)$ *de escalares que é solução de todas as equações do sistema.*

Um sistema com m equações e n incógnitas tem representação

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

e também pode ser representado na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

onde $[a_{ij}]_{m \times n}$, $[x_i]_{n \times 1}$ e $[b_j]_{m \times 1}$ são chamadas, respectivamente, de matriz dos coeficientes, matriz das incógnitas e matriz dos termos independentes.
Se $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$ dizemos que o sistema é homogêneo.

Definimos também a matriz ampliada do sistema:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Teorema 2.1 *Sistemas que possuem matrizes ampliadas equivalentes por linhas são equivalentes, isto é, ambos possuem o mesmo conjunto de soluções.*

Exemplo 2.1 *O sistema*

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y = -3 \\ 2x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$$

tem matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

que ao ser escalonada pode chegar na matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

que é a matriz ampliada do sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ \quad\; y - z = -5 \\ \qquad\quad z = 3 \end{cases}$$

cuja solução é $x = 1,\ y = -2$ *e* $z = 3$*, ou seja,* $(1, -2, 3)$ *é solução do sistema dado.*

2.2 Classificação de um Sistema Linear

Definição 2.2 *Classificação de sistemas lineares.*
- Um sistema é impossível quando não possui soluções.
- Um sistema é possível e determinado quando possui uma única solução.
- Um sistema é possível e indeterminado quando possui mais de uma solução.

Observe que um sistema homogêneo é sempre possível, pois $(0, 0, ..., 0)$ é uma solução.

Exemplo 2.2
Sistema impossível: $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$

Sistema possível e determinado: $\begin{cases} x + y = 0 \\ \quad\; y = 2 \end{cases}$

Sistema possível e indeterminado: $\begin{cases} x + y = 2 \end{cases}$

Teorema 2.2 *Duas matrizes escalonadas equivalentes por linhas têm sempre o mesmo número de linhas não nulas.*

Definição 2.3 *O posto de uma matriz* A *é o número de linhas não nulas de qualquer matriz escalonada equivalente por linhas a* A*.*

Teorema 2.3 *Um sistema é possível se, e somente se o posto da matriz dos coeficientes do sistema é igual ao posto da matriz ampliada. Neste caso, considerando os postos das matrizes iguais a* p*, e considerando* n *o número de incógnitas, temos:*
a) se $n = p$ *então o sistema tem uma única solução*
b) se $p < n$*, para obter uma solução para o sistema, podemos escolher* $n - p$ *incógnitas e atribuir valores quaisquer para elas. Os valores para as outras* p *incógnitas serão dadas em função destas.*

Vemos no Teorema anterior que se um sistema tiver mais que uma solução, terá infinitas soluções. O valor $n - p$ no ítem (b), é chamado de grau de liberdade do sistema.

Exemplo 2.3 *Dado o sistema*

$$\begin{cases} x + 2y + z + t = 1 \\ x + 3y - z + 2t = 3 \end{cases}$$

obtemos o sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + 2y + z + t = 1 \\ \quad\;\; y - 2z + t = 2 \end{cases}.$$

Temos então $n = 4$ *(incógnitas),* $p = 2$ *(posto das matrizes ampliadas e dos coeficientes) e o grau de liberdade do sistema sendo* $n - p = 2$*. Podemos obter* x *e* y *em função de* z *e* t*:* $y = 2 + 2z - t$ *e* $x = -3 - 5z + t$*. Podemos também representar as soluções do sistema por* $(x, y, z, t) = (-3 - 5z + t, 2 + 2z - t, z, t)$ *ou, trocando* z *e* t *pelos parâmetros* a *e* b*,* $(x, y, z, t) = (-3 - 5a + b, 2 + 2a - b, a, b)$*, ou ainda* $(x, y, z, t) = (-3, 2, 0, 0) - a(5, 2, 1, 0) + b(1, -1, 0, 1)$*. Atribuindo valores para* a *e* b*, obtemos soluções para o sistema. Por exemplo, para* $a = 2$ *e* $b = -1$*, obtemos* $x = -14$ *e* $y = 7$*. Assim,* $(x, y, z, t) = (-14, 7, 2, -1)$ *é uma solução do sistema.*

Exemplo 2.4 *Dado o sistema*

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x - y - z = 1 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$$

obtemos o sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ \quad -3y + z = 4 \\ \qquad\quad 0 = 6 \end{cases}$$

Assim, o posto da matriz ampliada é 3 *e o posto da matriz dos coeficientes é* 2 *e chegamos no absurdo* $0 = 6$*.*

Um sistema é homogêneo se tem todos os termos independentes iguais a zero. Assim, todo sistema homogêneo tem, pelo menos, a solução nula.

Num sistema homogêneo com n incógnitas e m equações, o posto p da matriz dos coeficientes é igual ao posto da matriz ampliada e $p \leq m$. Caso $p < n$, o sistema tem outras soluções, além da solução nula.

Exercícios 2.1 *Resolver os exercícios do livro do Boldrini: página 49, exercícios 1, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 19, 20*

Resolver os exercícios do livro do Lipschutz: página 34 exercícios de 1.15 a 1.19; página 49, exercícios 1.48 a 1.51.

3 Espaços Vetoriais Reais

3.1 Definição e exemplos

Definição 3.1 *Um espaço vetorial real é um conjunto V não vazio onde estão definidas a adição de vetores (a adição de elementos de V) e o produto de por escalar (o produto de números reais por elementos de V) satisfazedo as condições abaixo, para u, v, $w \in V$ e r, s números reais.*

0) Fechamento: $u + v \in V$ e $ru \in V$
Propriedades da adição
1) Associativa: $u + (v + w) = (u + v) + w$
2) Comutativa: $u + v = v + u$
3) Vetor nulo: existe $O \in V$ tal que $v + O = O + v = v$
4) Oposto de v: se $v \in V$ então existe $-v \in V$ tal que $-v + v = v + (-v) = O$.
Notação para a subtração: $u - v = u + (-v)$
Propriedades do produto por escalar
5) $r(u + v) = ru + rv$
6) $(r + s)v = rv + sv$
7) $r(sv) = (rs)v$
8) $1v = v$

Define-se espaço vetorial complexo da mesma forma como acima, mas considerando-se o produto por escalar como o produto de vetor por número complexo, isto é, se os escalares r e s tomados na definição acima forem números complexos. Espaços vetoriais são definidos de forma mais geral, tomando os escalares como elementos de um corpo K (ver apêndice). O conjunto dos números reais e o conjunto dos números complexos são exemplos de corpos. Quando tomamos um espaço vetorial V, onde com os escalares são elementos de um corpo K, dizemos que V é um espaço vetorial sobre o corpo K.

A menos que seja especificado, nos exemplos vamos considerar espaços vetoriais sendo espaços vetoriais reais, isto é, espaços vetoriais sobre o corpo dos números reais.

Exemplos 3.1 *O conjunto dos vetores no plano forma um espaço vetorial real, como também, o conjunto dos vetores no espaço forma outro espaço vetorial real. Existem outros conjuntos que também formam espaços vetoriais. Por exemplo, dados os inteiros positivos m e n, o conjunto $M(m, n)$ das matrizes reais $m \times n$ formam um espaço vetorial com as operações de soma de matrizes e produto de escalares por matrizes. O conjunto dos vetores no plano é identificado com $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$ e o conjunto dos vetores no espaço com $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \ : \ x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Estes conjuntos podem ser generalizados, tomando $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \ : \ x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$, o conjunto das n-úplas de números reais, onde n é um número inteiro maior que zero. A soma de elementos de $\mathbb{R}^n$ e o produto de elementos de $\mathbb{R}^n$ por escalar, isto é, por números reais, é definido como no caso de vetores no $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$:*
$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$ *e*
$r(x_1, x_2, ..., x_n) = (rx_1, rx_2, ..., rx_n)$.
Observe que $\mathbb{R}^n$ com as operações que foram definidas, pode ser identificado com o espaço das matrizes reais $1 \times n$.

Da mesma forma, considerando $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos, os conjuntos $\mathbb{C}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{C}\}$, são espaços vetoriais complexos, onde as operações são definidas formalmente como em $\mathbb{R}^n$.
Da mesma forma, se $\mathbb{K}$ é um corpo (veja apêndice), os conjuntos da forma $\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{K}\}$, são espaços vetoriais.
As provas que estas operações satisfazem as condições para espaços vetoriais são análogas às provas para os casos de vetores e matrizes. As operações definidas acima são chamadas operações usuais para os respectivos espaços.

Teorema 3.1 *Sejam V um espaço vatorial, v um vetor, r um escalar e O o vetor nulo. Então:*
1. $rO = O$
2. $0v = O$
3. $-v = (-1)v$
4. *se* $rv = O$ *então* $r = 0$ *ou* $v = O$
5. *se* $rv = v$ *então* $r = 1$ *ou* $v = O$
6. $(-r)v = r(-v) = -(rv)$ $(\Rightarrow (-1)v = -v)$
7. *o vetor nulo é único*
8. *para cada vetor v, o oposto de v é único*

Exercícios 3.1 *Verifique se os seguintes conjuntos são espaços vetoriais.*
1. $W = \mathbb{R}^2$ *com as operações:* $(a, b) + (c, d) = (a + d, b + c)$; $r(a, b) = (ra, rb)$
2. $W = \mathbb{R}^2$ *com as operações:* $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$; $r(a, b) = (ra, -rb)$
3. $W = \mathbb{R}^2$ *com as operações:* $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$; $r(a, b) = (rb, ra)$
4. $W = \mathbb{R}^2$ *com as operações:* $(a, b) + (c, d) = (a + c, b - d)$; $r(a, b) = (ra, rb)$

3.2 Subespaço

Definição 3.2 *Seja V um espaço vetorial real. Um subconjunto W de V tal que W é um espaço vetorial com as mesmas operações definidas para V é chamado um subespaço de V.*

Observação. Se W é um subconjunto de um espaço vetorial V, para verificar se W é também um espaço vetorial com as operações de adição de vetores e produto por escalar de V, não precisamos verificar todas as condições, pois:
Se u, v, $w \in W$ e r, s são escalares, como u, v e $w \in V$, as condições 1, 2, 5, 6, 7 e 8 da definição de espaço vetorial estão automaticamente satisfeitas. Assim, para que W seja um espaço vetorial, resta verificar:
0) Fechamento: $\forall\, u, v \in W,\ \forall r \in \mathbb{R},\ u + v \in W$ e $ru \in W$
3) Vetor nulo. Existe $O \in W$ tal que $\forall v \in W$, $v + O = O + v = v$
Note que a condição de fechamento garante a existência do oposto: se $v \in W$, como $-1 \in \mathbb{R}$ então $-v = -1v \in W$. Do mesmo modo, a condição de fechamento garante que $O \in W$, caso já se tenha garantido que W não é vazio. Caso não se tenha garantido que W é um conjunto não vazio, o mais usual é mostrar que $O \in W$. Assim, a condição (4) também não precisa ser verificada.

Em vista do que observamos anteriormente, podemos enunciar o próximo resultado.

Teorema 3.2 *Seja V um espaço vetorial e seja W um subconjunto de V. Então W é um subespaço de V se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas:*
a) $O \in W$ *(ou* $W \neq \varnothing$*)*
b) Se $u, v \in W$ *então* $u + v \in W$
c) Se $u \in W$ *e* r *é um escalar então* $ru \in W$

Corolário 3.3 *Seja V um espaço vetorial e seja W um subconjunto não vazio de V. Então W é um subespaço de V se, e somente se, para quaisquer $u, v \in W$ e r, s escalares, tem-se $ru + sv \in W$.*

Exemplo 3.2 *Qualquer espaço vetorial V contém pelo menos dois subespaços: o próprio V e o conjunto $\{O\}$, que contém somente o vetor nulo de V.*

Exemplos 3.3
1. $W = \{(x, 1, z) \ : \ x, z \in \mathbb{R}\}$ *não é um subespaço de* $\mathbb{R}^3$
2. $W = \{(x, 0, z) \ : \ x, z \in \mathbb{R}\}$ *é subespaço de* $\mathbb{R}^3$
3. $W = \{(x, y, x + y, x - y) \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$ *é subespaço de* $\mathbb{R}^4$
4. $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y = 0 \text{ e } z = 2x\}$ *é subespaço de* $\mathbb{R}^3$
5. $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 2a - b \end{bmatrix} \ : \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$ *é subespaço de* $M(2, 2)$
6. $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2x - 3y = 0\}$ *é subespaço de* $\mathbb{R}^2$
7. $W = \{(x, x^2) \ : \ x \in \mathbb{R}\}$ *não é um subespaço de* $\mathbb{R}^2$
8. $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & ab \end{bmatrix} \ : \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$ *não é um subespaço de* $M(2, 2)$
9. $W = \{A \in M(2, 2) \ : \ detA = 0\}$ *não é um subespaço de* $M(2, 2)$
10. $W = \{(x, y) \ : \ x, y \in \mathbb{R} \text{ e } xy = 0\}$ *não é um subespaço de* $\mathbb{R}^2$

Como um subespaço de um espaço vetorial é também um espaço vetorial então, nos exemplos acima, temos exemplos de espaços vetoriais e exemplos de conjuntos que não são espaços vetoriais.

Exercícios 3.2 *Verifique se W é subespaço de V nos casos abaixo*
1. Para $V = M(2, 2)$
a. $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in M(2, 2) \ : \ a + d = 0 \right\}$
b. $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & -a \\ b & a - b + 1 \end{bmatrix} \in M(2, 2) \ : \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$
c. $W = \{A \in V : \ detA \neq 0\}$
d. $W = \{A \in V \ : \ A = A^t\}$, *onde* A^t *é a transposta da matriz* A
2. Para $V = \mathbb{R}^3$,
a. $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = x + y\}$
b. $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = xy\}$
c. $W = \{(x, 3x, -x) \ : x \in \mathbb{R}\}$
d. $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + 2y = 3z\}$
e. $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y \leq z\}$
3. $V = M(3, 3)$ *e* $W = \{A \in V \ : \ detA \geq 0\}$
4. $V = \mathbb{R}^3$ *e* $W = \mathbb{R}^2$

3.3 Dependência Linear

Definição 3.3 *Seja* V *um espaço vetorial e sejam* $v_1,\ v_2,\ \cdots, v_n$*. Uma combinação linear dos vetores* $v_1,\ v_2,\ \cdots, v_n$ *é uma expressão da forma* $a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$ *onde* $a_1, a_2, ..., a_n$ *são escalares. Assim, se* $v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$ *dizemos que* v *é uma combinação linear dos vetores* $v_1,\ v_2,\ \cdots, v_n \in V$*.*

Exemplo 3.4 *No espaço* $\mathbb{R}^2$*, para* $v_1 = (1, 2),\ v_2 = (-3, 7)$ *e* $v_3 = (5, 0)$*, temos que* $v = (22, 45)$ *é uma combinação linear de* $v_1,\ v_2$ *e* v_3*, pois* $-2v_1 + 7v_2 + 9v_3 = v$*.*

Definição 3.4 *Seja* V *um espaço vetorial. Dizemos que um conjunto de vetores* $v_1,\ v_2,\ \cdots, v_n$ *é linearmente independente (L.I.) se a igualdade* $a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = O$ *onde* $a_1, a_2, ..., a_n$ *são escalares, implicar em* $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$*. Isto é, a única combinação linear desses vetores resultando no vetor nulo é aquela em que os escalares que aparecem na expressão são todos nulos. Caso contrário, isto é, se for possível conseguir a igualdade* $a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = O$ *com algum* $a_i \neq 0$*, dizemos que os vetores* $v_1, v_2, ..., v_n$ *são linearmente dependentes (L.D.).*

Exemplo 3.5 *Os vetores* $u = (1, 2)$ *e* $v = (3, 4)$ *de* $\mathbb{R}^2$ *são L.I., pois se* $au + bv = (0, 0)$*, temos:*

$$a(1, 2) + b(3, 4) = (0, 0) \Rightarrow (a + 3b, 2a + 4b) = (0, 0) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} a & + & 3b & = & 0 \\ 2a & + & 4b & = & 0 \end{array} \right.$$

Resolvendo o sistema acima concluímos que a única solução possível é $a = b = 0$*.*

Exemplo 3.6 *Os vetores* $u = (1, 2, 3)$*,* $v = (1, 0, 0)$ *e* $w = (2, 2, 3)$ *são L.D. pois se* $au + bv + cw = (0, 0, 0)$*, temos:* $a(1, 2, 3) + b(1, 0, 0) + c(2, 2, 3) = (0, 0, 0) \Rightarrow (a + b + 2c, 2a + 0b + 2c, 3a + 0b + 3c) = (0, 0, 0) \Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & + & 2c & = & 0 \\ 2a & & & + & 2c & = & 0 \\ 3a & & & + & 3c & = & 0 \end{array} \right. .$$

Resolvendo o sistema concluímos que existem soluções não nulas. Uma delas é $a = 2$*,* $b = 2$ *e* $c = -2$*, ou seja,* $2(1, 2, 3) + 2(1, 0, 0) - 2(2, 2, 3) = (0, 0, 0)$*.*

Teorema 3.4 *Os vetores* $v_1, v_2, \cdots, v_n$ *são linearmente dependentes se, e somente se, um deles for combinação dos demais.*

Corolário 3.5 *Dois vetores* u *e* v *não nulos são L.D. se, e somente se, um dos vetores for igual ao outro multiplicado por algum escalar.*

Exemplos 3.7 *Os vetores* $u = (1, 2)$ *e* $v = (2, 1)$ *são L.I. Os vetores* $u = (1, 2, 3)$ *e* $v = (3, 6, 9)$ *são L.D.*

Observe que qualquer subconjunto de um conjunto L.I. é também L.I. e que qualquer conjunto que contém um subconjunto L.D. é também L.D.

Exemplo 3.8 *Em* $\mathbb{R}^2$*, os vetores* $(1, 2)$ *e* $(2, 4)$ *são L.D., pois* $2(1, 2) - (2, 4) = (0, 0)$*. Logo,* $2(1, 2) - (2, 4) + 0(5, 7) + 0(13, -99) = (0, 0)$*. Assim, os vetores* $(1, 2),\ (2, 4),\ (5, 7),\ (13, -99)$ *são L.D.*

Exemplo 3.9 *Se V é um espaço vetorial então qualquer conjunto de vetores que contenha o vetor nulo é L.D., pois se $v_1, v_2, \cdots, v_n$ são vetores quaisquer então $0v_1+0v_2+\cdots+0v_n+1\cdot O = O$.*

Exercícios 3.3
1. *Verifique, em cada caso, se os vetores são L.I..*
a) $V = R^2,\ u = (1,2),\ v = (3,2)$
b) $V = R^2,\ u = (1,2),\ v = (3,2),\ w = (5,8)$
c) $V = R^3,\ u = (1,0,0),\ v = (1,1,0),\ w = (1,1,1)$
d) $V = R^3,\ u = (1,2,1),\ v = (3,6,3)$
e) $V = M(2,2),\ u = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\ w = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$
f) $V = R^2,\ u = (3,-3)$
2. *Sejam u, v e w vetores L.I..*
a) Mostre que os vetores $u_1 = u$, $u_2 = u+v$ e $u_3 = u+v+w$ são L.I.
b) Mostre que os vetores $u_1 = u+w$, $u_2 = u+v$ e $u_3 = 2u+v+w$ são L.D.

3.4 Geradores de um espaço vetorial

Definição 3.5 *Um conjunto de geradores para um espaço vetorial V é um conjunto B de vetores de V tal que qualquer vetor v de V pode ser expresso como uma combinação linear (finita) dos vetores de B, isto é, $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_v$ onde cada a_i é um escalar e cada $v_i \in B$. Neste caso, dizemos que B gera V, ou que os vetores de B geram V.*

Se V é gerado por $v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_n$ então qualquer vetor v de V pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores $v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_n$, isto é, existem escalares $a_1, a_2, ..., a_n$ tais que $v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$. Assim, $V = \{a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n\ : \forall i,\ a_i \in \mathbb{R}\}$
Notação: $V = [v_1, v_2, ..., v_n]$.

Exemplos 3.10 $\mathbb{R}^2 = [(1,0),(0,1)]$ *pois para qualquer vetor $v = (x,y)$ de $\mathbb{R}^2$, $v = (x,y) = x(1,0) + y(0,1)$. Do mesmo modo, $\mathbb{R}^3 = [(1,0,0),(0,1,0)(0,0,1)]$ pois para qualquer vetor $v = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$, $v = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$. Generalizando, $\mathbb{R}^n = [(1,0,0,...,0),(0,1,0,...,0),...,(0,0,0,...,1)]$*

Exemplo 3.11 *Os vetores $u = (1,0)$ e $v = (1,1)$ também geram $\mathbb{R}^2$ pois tomando um vetor qualquer $w = (x,y)$ de $\mathbb{R}^2$, precisamos verificar que existem $a, b \in \mathbb{R}$ (em função de x e y) tais que $w = au + bv$, ou seja, $w = (x,y) = au + bv = a(1,0) + b(1,1) = (a+b,b)$. Assim,*
$$\begin{cases} a+b = x \\ \quad\ b = y \end{cases}$$
Resolvendo o sistema, chegamos em $a = x-y$ e $b = y$. Logo, $w = (x,y) = (x-y)(1,0)+y(1,1)$ e portanto, $\mathbb{R}^2 = [(1,0),(1,1)]$. Por exemplo, se $w = (-2,2)$ então $w = (-2,2) = -4(1,0) + 2(1,1)$. Na Figura 2, observamos a representação de w no plano $\mathbb{R}^2$, como combinação linear de u e v.

Exemplo 3.12 *Os vetores $u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ não geram $M(2,2)$ pois qualquer*

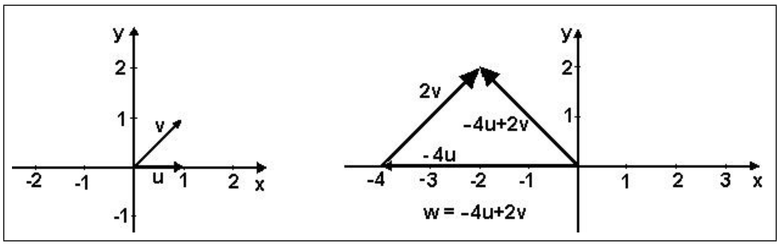


Figura 2: Soma de vetores

combinação linear $a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ b & a \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. *Mas* u *e* v *geram um subespaço de* $M(2,2)$*, a saber, o subespaço* $W = \left\{ \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$

Mesmo que os vetores $v_1, v_2, \cdots, v_n$ não gerem o espaço V, o conjunto de todas as combinações lineares de $v_1, v_2, \cdots, v_n$ formam um subespaço $[v_1, v_2, ..., v_n] = \{a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n \ : \ \forall i, \ a_i \in \mathbb{R}\}$ de V (verifique) chamado o subespaço gerado pelos vetores $v_1, v_2, \cdots, v_n$. No exemplo anterior, temos que $W = [u, v] = \left\{ \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ é o subespaço de $M(2,2)$ gerado por u e v.

Exemplo 3.13 *Os vetores* $(1,3,0)$ *e* $(2,0,-1)$ *geram o subespaço* $W = \{a(1,3,0)+b(2,0,-1) : a, b \in \mathbb{R}\} = \{(a+2b, 3a, -b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ *do* $\mathbb{R}^3$*. Será que os pontos de* W *tem alguma configuração especial no* $\mathbb{R}^3$*? Vamos analisar:*

$$(x,y,z) \in W \Leftrightarrow (x,y,z) = (a+2b, 3a, -b) \text{ para } a, b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = x \\ 3a = y \\ -b = z \end{cases}$$

Das duas últimas equações obtemos $b = -z$ *e* $a = y/3$*. Substituindo a e b na 1ª equação obtemos* $y/3 + 2(-z) = x$*, ou seja,* $3x - y + 6z = 0$ *que é a equação de um plano no* $\mathbb{R}^3$*. Assim,* W *representa um plano no* $\mathbb{R}^3$ *que passa pela origem do espaço, pois* $(0,0,0)$ *satisfaz sua equação, ou seja,* $W = \{(x,y,x) \ : \ 3x - y + 6z = 0\}$*. A partir da equação* $3x - y + 6z = 0$*, isolando uma das variáveis, por exemplo* $y = 3x + 6z$*, podemos explicitar* W *também por:* $W = \{(x, 3x+6z, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$

Observaremos mais adiante que qualquer par de vetores L.I. em $\mathbb{R}^3$ gera um plano que passa pela origem do espaço.

Exemplo 3.14 *Seja um vetor* (a,b,c) *do espaço* $\mathbb{R}^3$*. Temos* $[(a,b,c)] = \{t(a,b,c) : t \in \mathbb{R}\} = \{(at, bt, ct) : t \in \mathbb{R}\}$*. Assim,* $(x,y,z) \in [(a,b,c)]$ *se, e somente se,*

$$(*) \begin{cases} x = at \\ y = bt \quad \text{para algum } t \in \mathbb{R} \\ z = ct \end{cases}$$

Assim, caso $(a,b,c) \neq (0,0,0)$*, o subespaço* $[(a,b,c)]$ *do* $\mathbb{R}^3$ *é a reta cujas equações paramétricas são dadas em* $(*)$*, ou seja, é a reta que passa pela origem do espaço e tem a direção do vetor* $v = (a,b,c)$*.*

Exercícios 3.4 *Verifique, em cada caso, se os vetores dados geram o espaço. Caso não gerem, explicite o subespaço gerado por eles.*
a) $V = \mathbb{R}^3,\ u = (1,0,0),\ v = (1,1,0),\ w = (1,1,1)$
b) $V = \mathbb{R}^3,\ u = (1,1,1),\ v = (1,0,1)$
c) $V = \mathbb{R}^2,\ u = (1,2),\ v = (2,1)$
d) $V = \mathbb{R}^2,\ u = (1,2),\ v = (2,4)$
e) Resolva os exercícios $6,\ 7,\ e\ 8$ *da página 129 do livro do Boldrini*

3.5 Base e dimensão para um espaço vetorial

Definição 3.6 *Uma base para um espaço vetorial* V *é um conjunto de vetores linearmente independentes que gera* V*.*

Exemplo 3.15 *O conjunto* $\{(1,0),(01)\}$ *é uma base para* $\mathbb{R}^2$ *pois:*
a) como já vimos, este conjunto gera $\mathbb{R}^2$*;*
b) o conjunto é linearmente independente pois se $a(1,0)+b(0,1) = (0,0)$*, então* $(a,b) = (0,0)$*, logo,* $a = 0$ *e* $b = 0$*.*

Exemplo 3.16 *Do mesmo modo verificamos que o conjunto* $\{(1,0,...,0),\ (0,1,...,0),...,\ (0,0,...,1)\}$ *é uma base para* R^n*, chamada base canônica para* R^n*.*

Assim, $\{(1,0),(0,1)\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Existem várias bases para um mesmo espaço. Por exemplo, já verificamos que o conjunto $\{(1,2),(3,4)\}$ é linearmente independente. Como exercício verifique que este conjunto gera $\mathbb{R}^2$ e conclua que forma uma base para $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 3.17 *O conjunto* $\{(1,0,3),(0,0,2)\}$ *é linearmente independente mas não é uma base de* $\mathbb{R}^3$ *pois não gera* $\mathbb{R}^3$*: o vetor* $(0,2,0)$ *não se escreve como combinação linear de* $(1,0,3)$ *e* $(0,0,2)$ *(verifique).*

Exemplo 3.18 *O conjunto* $\{(1,0),(0,1),(3,7)\}$ *gera o* $\mathbb{R}^2$*, pois para qualquer vetor* $v = (a,b)$*,* $v = a(1,0)+b(0,1)+0(3,7)$*. Mas esse conjunto não é linearmente independente, pois* $3(1,0)+7(0,1)-1(3,7) = (0,0)$*.*

Exercícios 3.5 *Verifique se* B *é base de* V *nos casos abaixo*
a) $V = R^2$ *e* $B = \{(1,1),(2,3)\}$
b) $V = R^2$ *e* $B = \{(1,1),(2,3),(5,0)\}$
c) $V = R^3$ *e* $B = \{(1,2,3)\}$
d) $V = \mathbb{R}^3$ *e* $B = \{(1,0,1),(0,1,0),(1,1,1)\}$
e) $V = \mathbb{R}^2$ *e* $B = \{(1,0),(0,1),(0,0)\}$

Definição 3.7 *Dizemos que espaço vetorial* V *é finitamente gerado quando* V *é não nulo e existe um conjunto finito de vetores que gera* V*.*

Teorema 3.6 *Seja* V *um espaço vetorial finitamente gerado. Então*
a) qualquer conjunto finito de geradores de V *contém uma base de* V*;*
b) se V *tem um conjunto de geradores com* n *vetores então qualquer conjunto com mais de* n *vetores é L.D.;*

c) qualquer base de V tem sempre a mesma quantidade de vetores;
d) qualquer conjunto L.I. pode ser completado para formar uma base de V.

Definição 3.8 *Definimos a dimensão de um espaço vetorial não nulo V sendo o número de vetores de qualquer base de V.*

Assim, $dimR^2 = 2$; $dimR^3 = 3$; $dimR^n = n$.

Exemplo 3.19 *É fácil verificar que o conjunto*

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

forma uma base (chamada base canônica) para o espaço $M(2,3)$ das matrizes 2×3. Logo, $dimM(2,3) = 6$. Isso pode ser generalizado: a dimensão do espaço $M(m,n)$ das matrizes com m linha e n colunas é o produto de m por n. Neste caso, a base canônica é formada por todas as matrizes que têm um de seus elementos igual a 1 e os demais elementos iguais a 0, como no caso de $M(2,3)$.

O conjunto $\{0\}$ formado somente pelo vetor nulo de um espaço vetorial também é um espaço vetorial (chamado espaço nulo), pois satisfaz as condições da definição. Mas esse conjunto não contém vetores linearmente independentes, logo, não possui uma base. Neste caso, convenciona-se que $dim\{0\} = 0$. Por exemplo, $dim\{(0,0,0)\} = 0$.

Teorema 3.7 *Se V é um espaço vetorial de dimensão n, então*
a) qualquer conjunto com n vetores L.I. de V forma uma base de V;
b) qualquer conjunto com n vetores que geram V, forma uma base de V;
c) qualquer conjunto com mais de n vetores é L.D.;
d) qualquer conjunto com menos de n vetores não gera V.

Exemplo 3.20 *O conjunto $\{(2,7),(5,9)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ pois é um conjunto L.I. (verifique) com dois vetores e $dimR^2 = 2$.*

Exemplo 3.21 *O conjunto $B = \{(1,2)\}$ não é uma base de $\mathbb{R}^2$ pois $dim\mathbb{R}^2 = 2$. Mas podemos completar B de modo a formar uma base de $\mathbb{R}^2$. Como $dim\mathbb{R}^2 = 2$ precisamos completar com um vetor de $\mathbb{R}^2$ que seja L.I. com $(1,2)$. Por exemlo, o vetor $(0,1)$ (verifique que os dois vetores são L.I.). Assim, $B = \{(1,2),(1,0)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.*

Exemplo 3.22 *Os vetores $u = (1,2)$, $v = (3,4)$ e $w = (5,6)$ são L.D., pois $dimR^2 = 2$. Vamos verificar se estes vetores geram $\mathbb{R}^2$:*

$$(x,y) = a(1,2)+b(3,4)+c(5,6) \Rightarrow (x,y) = (a+3b+5c, 2a+4b+6c) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} a+3b+5c = x \\ 2a+4b+6c = y \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{llll} a & +3b & +5c & = x \\ & -2b & -4c & = y-2x \end{array} \right.$$

. Assim, temos um sistema escalonado com duas equações e três incógintas (a, b e c). Fazendo $c = 1$ obtemos $a = 1 - 2x + \frac{3}{2}y$ e $b = -2 + x - \frac{1}{2}y$. Assim, $\mathbb{R}^2 = [(1,2),(3,4),(5,6)]$. Assim, $(5,6) = -(1,2) + 2(3,4)$. Logo, $\mathbb{R}^2 = [(1,2),(3,4)]$. Como $(1,2)$ e $(3,4)$ são L.I., então $\{(1,2),(3,4)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 3.23 *Os vetores* $u = (1, 2, 3)$ *e* $v = (2, -3, 7)$ *não geram o espaço* $\mathbb{R}^3$*, pois* $dim\mathbb{R}^3 = 3$*. Mas, é possível encontrar um vetor* w *tal que* $\{(1, 2, 3), (2, -3, 7), w\}$ *seja uma base de* $\mathbb{R}^3$*, pois* $(1, 2, 3)$ *e* $(2, -3, 7)$ *são L.I. (verifique).*

Exemplo 3.24 *Seja o espaço vetorial* $V = \{(x, y, x - y, x + y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ *(prova-se que* V *é um espaço, provando que* V *é um subespaço de* $\mathbb{R}^4$*). Podemos escrever* $V = \{x(1, 0, 1, 1) + y(0, 1, -1, 1) : x, y \in \mathbb{R}\}$*. Logo,* $V = [(1, 0, 1, 1), (0, 1, -1, 1)]$*, isto é,* V *é gerado por dois vetores L.I. (verifique). Assim,* $B = \{(1, 0, 1, 1), (0, 1, -1, 1)\}$ *é uma base de* V*. Portanto,* $dimV = 2$*.*

Exemplo 3.25 *Seja o espaço vetorial* $V = \{(x + y + 2z, x + z, x + y + 2z) : x, y \in \mathbb{R}\}$*. Procedendo como no exemplo acima, chegamos em* $V = [(1, 1, 1), (1, 0, 1), (2, 1, 2)]$*, ou seja,* $\{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (2, 1, 2)\}$ *é um conjunto de geradores de* V *mas que não é uma base (verifique que os vetores são L.D.). Como* $(1, 1, 1) = (2, 1, 2) - ((1, 0, 1)$ *então* $V = [(1, 1, 1), (1, 0, 1), (2, 1, 2)] = [(1, 0, 1), (2, 1, 2)]$ *(1). Como* $(1, 0, 1)$ *e* $(2, 1, 2)$ *são L.I. (verifique) (2), então por (1) e (2),* $\{(1, 0, 1), (2, 1, 2)\}$ *é uma base de* V*. Assim,* $dimV = 2$*.*

Exercícios 3.6
1) Verifique se qualquer vetor de $\mathbb{R}^2$ *se escreve como combinação linear dos vetores* $\{(1, 0), (1, 1), (0, 1)\}$*. Este conjunto forma uma base de* $\mathbb{R}^2$*? Justifique sua resposta.*
2) Verifique que o conjunto $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0)\}$ *é L.I.. Eles formam uma base de* $\mathbb{R}^3$*? Justifique sua resposta. Eles formam uma base para* $\mathbb{R}^2$*? Justifique sua resposta.*
3) Escreva $(4, 6)$ *como combinação linear dos vetores* $(1, 0)$ *e* $(2, 3)$*.*
4) Encontre uma base e a dimensão para o espaço $V = \{(x + 2y, 2x + 4y) : x, y \in \mathbb{R}\}$
5) Encontre uma base e a dimensão para o espaço $V = \{(x+y, 2x+y+z, x+y-2z) : x, y \in \mathbb{R}\}$
6) Mostre que se $W = [v_1, v_2, \cdots, v_m]$ *entãdo* $dimW \leq m$*.*

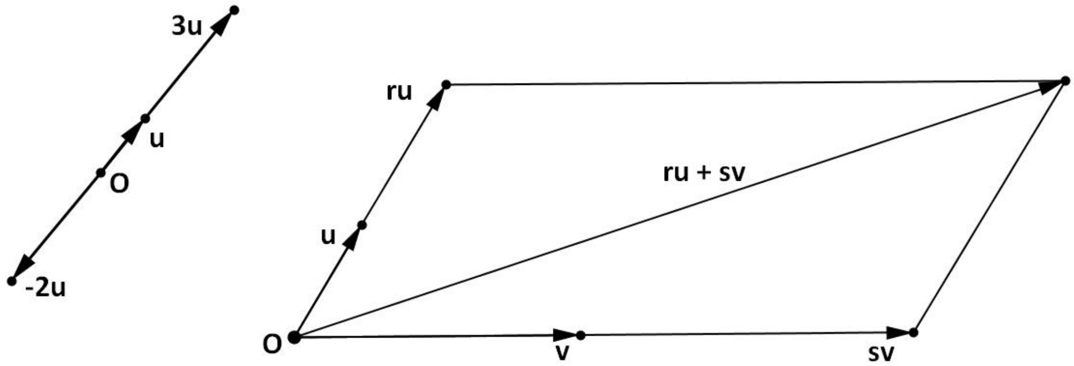
Teorema 3.8 *Seja* W *um subespaço de* V*. Então*
a) $dimW \leq dimV$*;*
b) se $dimW = dimV$ *então* $W = V$*.*

Exemplo 3.26 *Seja* $W = [(1, 1, 5), (0, 2, 1), (0, 0, 7)]$*. Como os três vetores geram* W *e são L.I. (verifique) então formam uma base para* W*. Logo,* $dimW = 3$*. Como* W *é um subespaço de* $\mathbb{R}^3$*, então* $W = \mathbb{R}^3$*.*

Exemplo 3.27 *Seja* $W = [(1, 2, 3)]$ *Então* $dimW = 1$*. Logo,* $W \neq \mathbb{R}^3$*.*

Exemplo 3.28 *Seja* $W = [(1, 2), (2, 0)]$*. Temos* $dimW = 2$ *(verifique). Logo,* $W = \mathbb{R}^2$*.*

Nos espaços $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, cada ponto P está associado ao vetor $\overrightarrow{OP}$, onde O é a origem do sistema cartesiano. Assim, um subespaço gerado por um vetor resulta em uma reta passando pela origem do sistema cartesiano.
No caso de um subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por dois vetores L.I., este subespaço será um plano passando pela origem do sistema cartesiano.



Subespaços de $\mathbb{R}^2$. Se W é um subespaço de $\mathbb{R}^2$, então $dimW \leq dim\mathbb{R}^2 = 2$. Se $dimW = 2$ então $W = \mathbb{R}^2$. Se $dimW = 0$ então $W = \{(0,0)\}$. Se $dimW = 1$ então W é uma reta passando pela origem do sistema.
Subespaços de $\mathbb{R}^3$. Se W é um subespaço de $\mathbb{R}^3$, então $dimW \leq dim\mathbb{R}^3 = 3$. Se $dimW = 3$ então $W = \mathbb{R}^3$. Se $dimW = 0$ então $W = \{(0,0,0)\}$. Se $dimW = 1$ então W é uma reta passando pela origem do sistema cartesiano. Se $dimW = 2$ então W é um plano passando pela origem do sistema cartesiano.

3.6 Espaço das linhas de uma matriz

Dada uma matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$,
suas linhas $L_1 = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})$, $L_2 = (a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n})$, $\cdots$, $L_m = (a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn})$ podem ser tomadas como vetores que geram um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.9 *As linhas de matrizes linha-equivalentes geram o mesmo espaço vetorial.*

Teorema 3.10 *As linhas não nulas de uma matriz escalonada $m \times n$ são L.I. (quando consideradas como vetores de $\mathbb{R}^n$).*

Exemplo 3.29 *Os vetores $u = (1,2,0,3,5)$, $v = (0,0,0,0,7)$ e $w = (0,0,3,1,2)$ são L.I. pois podemos formar com eles uma matriz escalonada.*

Exemplo 3.30 *Se desejarmos encontrar uma base e a dimensão para o espaço V gerado pelos vetores $u = (1,0,2,1)$, $v = (2,1,0,-1)$ e $w = (1,1,-2,-2)$, colocamos estes vetores como linhas de uma matriz e a escalonamos*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \end{bmatrix} L_3 \to L_3 - 2L_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, pelo Teorema 3.9, $V = [(1,0,2,1),(2,1,0,-1),(1,2,-2,-2)] = [(1,0,2,1),(0,1,-4,-3)]$ e pelo Teorema 3.10, os vetores $(1,0,2,1)$ e $(0,1,-4,-3)$ são L.I.. Logo $B = \{(1,0,2,1),(0,1,-4,-3)\}$ é uma base para V, portanto, $dimV = 2$.

Exemplo 3.31 *Se quisermos completar o conjunto L.I. $\{(1,1,2),(1,1,5)\}$, para formarmos uma base para $\mathbb{R}^3$, colocamos estes vetores como linhas de uma matriz e a escalonamos e depois*

completamos a matriz (escalonada) com os vetores que faltam para completar uma base:
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} L_2 \to L_2 - L_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ *Assim, aumentamos com a linha 2 para obter uma matriz* 3×3 *escalonada. Logo,* $\{(1,1,2),(1,1,5),(0,3,-5)\}$ *é uma base para* $\mathbb{R}^3$.

Exercício 3.7
1. Encontre a dimensão de W *nos casos abaixo:*
a) $W = [(1,2,3,4,5),(7,8,9,10,11),(1,1,1,1,1),(5,4,3,2,1)]$
b) $W = [(1,0,1,0,1),(0,1,0,1,0),(1,1,0,1,1),(2,5,-1,5,2)]$
2. Em cada ítem do exercício anterior, a partir da base de W*, encontre vetores que, junto com os vetores da base de* W*, formam uma base para* $\mathbb{R}^5$

3.7 Interseção, soma e soma direta

Teorema 3.11 *Sejam* U *e* W *subespaços de um espaço vetorial* V*. Então*
a) $U \cap W = \{v \ : \ v \in U \text{ e } v \in W\}$ *é um subespaço de* V*;*
b) $U + W = \{u + w : u \in U \text{ e } w \in W\}$ *é um subespaço de* V*.*

Exemplo 3.32 *Sejam* $U = \{(x,y,0) : x,y \in \mathbb{R}\}$ *e* $W = \{(0,y,z) : y,z \in \mathbb{R}\}$*. Então*
a) $U \cap W = \{(0,y,0) : y \in \mathbb{R}\}$
b) $U+W = \mathbb{R}^3$ *pois* $U+W \subset \mathbb{R}^3$ *e se* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$*, então* $(x,y,z) = (x,0,0)+(0,y,z) \in U+W$*. Logo,* $\mathbb{R}^3 \subset U+W$ *e portanto,* $\mathbb{R}^3 = U+W$*.*

No exemplo anterior, temos que $U \cup W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \text{ ou } y = 0\}$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ pois $(1,0,0),(0,0,1) \in U \cup W$ mas $(1,0,0)+(0,0,1) = (1,0,1) \notin U \cup W$. Vemos então que nem sempre a união de subespaços é um subespaço.

Definição 3.9 *Um espaço vetorial* V *é soma direta dos subespaços* U *e* W *se* $V = U + W$ *e* $U \cap W = \{O\}$*.*
Notação: $V = U \oplus W$

Teorema 3.12 *Se* $V = U \oplus W$ *então qualquer vetor* v *de* V *se escreve de maneira única como* $v = u + w$ *para* $u \in U$ *e* $w \in W$*.*

No exemplo anterior, $\mathbb{R}^3 = U + W$ mas $\mathbb{R}^3$ não é soma direta de U e W pois $U \cap W = \{(0,y,0) : y \in \mathbb{R}\} \neq (0,0,0)$, por exemplo, $(0,5,0) \in U \cap W$. Note que $(2,4,5) = (2,4,0) + (0,0,5) = (2,0,0) + (0,4,5) = (2,2,0) + (0,2,5)$ e os vetores $(2,4,0),(2,0,0),(2,2,0) \in U$ e $(0,0,5),(0,4,5),(0,2,5) \in W$.

Exemplo 3.33 *Para* $U = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ *e* $W = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$*, temos* $U \cap W = \{(0,0)\}$ *e* $\mathbb{R}^2 = U + W$ *pois se* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*,* $(x,y) = (x,0) + (0,y) \in U + W$*. Assim,* $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$*. Observe que a única maneira de se escrever um vetor* (x,y) *como soma de um vetor de* U *com um vetor de* W *é fazendo* $(x,y) = (x,0) + (0,y)$*. Por exemplo,* $(1,2) = (1,0) + (0,2)$*.*

Teorema 3.13 *Se* U *e* W *são subespaços de um espaço vetorial* V*, então* $dim(U + W) = dimU + dimW - dim(U \cap W)$*.*

Exemplo 3.34 *Já vimos que se* $U = \{(x, y, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ *e* $W = \{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$. *Então* $U \cap W = \{(0, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$ *e* $U + W = \mathbb{R}^3$.
$U = \{(x, y, 0) : x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} = [(1, 0, 0), (0, 1, 0)]$. *Logo, uma base de* U *é* $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ *pois os vetores* $(1, 0, 0)$ *e* $(0, 1, 0)$ *são L.I. Logo,* $dimU = 2$
$W = \{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) : y, z \in \mathbb{R}\} = [(0, 1, 0), (0, 0, 1)]$. *Logo, uma base de* W *é* $\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ *pois os vetores* $(0, 1, 0)$ *e* $(0, 0, 1)$ *são L.I. Logo,* $dimW = 2$
$U \cap W = \{(0, y, 0) : y \in \mathbb{R}\} = \{y(0, 1, 0) : y \in \mathbb{R}\} = [(0, 1, 0)]$. *Logo, uma base de* W *é* $\{(0, 1, 0)\}$ *pois o vetor* $(0, 1, 0)$ *é L.I. Portanto,* $dim(U \cap W) = 1$.
Temos $U + W = \mathbb{R}^3$. *Logo,* $dim(U + W) = 3$.
Observamos neste exemplo, a validade do teorema anterior, isto é,
$3 = dim(U + W) = dimU + dimW - dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1$.

Exemplo 3.35 *Seja* $U = [(1, 2, 0, 1), (1, 2, 1, 2), (2, 4, 1, 3)]$ *subespaço do* $\mathbb{R}^4$. *Vamos encontrar um subespaço* W *do* $\mathbb{R}^4$ *tal que* $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$. *Colocando os geradores de* U *em uma matriz e escalonando-a obtemos uma base de* U *(as linhas não nulas da matriz escalonada):* $B = \{(1, 2, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\}$. *Para completar os geradores de* U *de modo a formar uma base de* $\mathbb{R}^4$, *basta tomar dois vetores do* $\mathbb{R}^4$ *que, juntos com a base de* U, *possam ser colocados como uma matriz escalonada. Por exemplo, podemos tomar os vetores* $(0, 1, 0, 0)$ *e* $(0, 0, 0, 1)$. *Assim, para* $W = [(0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)]$, *como* $\mathbb{R}^4 = [(1, 2, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)]$, *temos* $\mathbb{R}^4 = U + V$. *Como* $dimU = dimV = 2$ *então pelo Teorema 3.13,* $dim(U \cap W) = 0$, *ou seja,* $U \cap W = \{(0, 0, 0, 0)\}$. *Assim,* $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Exercícios 3.8
1. Sejam $U = [(1, 2, 3, -2, 5), (1, 3, 4. - 1, 3), (1, 1, 2, -3, 7)]$ *e*
$W = [(1, 4, 5, 0, 1), (2, 8, 12, 0, 2), (1, 4, 3, 0, 1)]$ *e seja* $V = U + W$.
a) Encontre $dimV$ *e* $dim(U \cap W)$
b) $V = U \oplus W$*? Porque?*
c) Encontre subespaços U' *e* W' *de* $\mathbb{R}^5$ *tais que* $\mathbb{R}^5 = U \oplus U'$ *e* $\mathbb{R}^5 = W \oplus W'$
2. Sejam $U = [(1, 0, 0, 0)(0, 1, 1, 1), (2, 1, 1, 1)]$ *e* $W = [(1, 0, 0, 2), (1, 0, 1, 0), (2, 0, 1, 2)]$
a) Encontre $dim(U + W)$ *e* $dim(U \cap W)$
b) $\mathbb{R}^5 = U + W$*?*
c) $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$*?*
3. Sejam $U = [(1, 2, 1), (2, 0, 2)]$ *e* $W = [(1, 1, 1), (2, 1, 2)]$
a) Encontre $dim(U + W)$ *e* $dim(U \cap W)$
b) $\mathbb{R}^3 = U + W$*?*
c) $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$*?*
d) Encontre subespaços U' *e* W' *de* $\mathbb{R}^3$ *tais que* $\mathbb{R}^3 = U \oplus U'$ *e* $\mathbb{R}^3 = W \oplus W'$
(Exercícios do livro do Boldrini página 130: 18, 19, 20 e 22)

3.8 Aplicação às Equações Lineares

Consideremos um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \cdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Considerando a matriz dos coeficientes A, a matriz das incógnitas X e a matriz dos termos independentes B,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

o sistema pode ser escrito na forma $AX = B$. Se as matrizes X_1 e X_2 são soluções desse sistema então $A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = B + B = 2B$. Assim, $AX_1 + AX_2 = B$ se, e somente se, $B = 2B$, ou seja, B é uma matriz nula. Logo, $X_1 + X_2$ é também solução se, e somente se, $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$. Neste caso, dizemos que o sistema é homogêneo. Note que se o sistema for homogêneo, se X for uma solução do sistema e se r for um escalar, então $A(rX) = r(AX) = rO = O$, onde O é a matriz nula $m \times 1$. É claro que $AO_{n\times 1} = O_{m\times 1}$. Assim, se o sistema for homogêneo então o conjunto das soluções deste sistema forma um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Portanto, o conjunto das soluções de um sistema linear homogêneo é um espaço vetorial.

Variáveis livres

Em um sistema na forma escalonada, dizemos que uma variável é livre se ela não inicia nenhuma das equações do sistema. No exemplo a seguir, as variáveis x e z iniciam, respectivamente, a primeira e a segunda equações do sistema escalonado. Logo x e z não são variáveis livres, enquanto que as demais variáveis, y, s e t, são as variáveis livres do sistema. Note que podemos atribuir quaisquer valores às variáveis livres e obter os valores das demais para encontrar soluções para o sistema.

Exemplo 3.36 *Dado o sistema abaixo*

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & + & s & + & t & = & 0 \\ 2x & + & 2y & - & z & + & 2s & - & t & = & 0 \\ x & + & y & + & 4z & + & s & + & 4t & = & 0 \end{cases}$$

para encontrar uma base e a dimensão do espaço das soluções, colocamos o sistema na forma escalonada:

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & + & s & + & t & = & 0 \\ & & & & 3z & + & & & 3t & = & 0 \end{cases}$$

de onde tiramos as variáveis livres y, s e t. Para obter uma base para o espaço das soluções do sistema, colocamos valores para y, s e t na forma na forma escalonada, garantindo vetores (x, y, z, s, t) L.I. :

$y = 1$, $s = 0$ *e* $t = 0$*:* $(-1, 1, 0, 0, 0)$

$y = 0$, $s = 1$ *e* $t = 0$*:* $(-1, 0, 0, 1, 0)$

$y = 0$, $s = 0$ *e* $t = 1$*:* $(0, 0, -1, 0, 1)$

Assim, $B = \{(-1, 1, 0, 0, 0),\ (-1, 0, 0, 1, 0),\ (0, 0, -1, 0, 1)\}$ *é uma base para o espaço das* *soluções do sistema, tendo portanto este espaço dimensão* 3.

Exercício 3.9 *Encontre uma base e a dimensão para o espaço das soluções para cada sistema abaixo.*

a) $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4s + 5t = 0 \\ 7x + 8y + 9z + 10s + 11t = 0 \\ x + y + z + s + t = 0 \\ 5x + 4y + 3z + 2s + t = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + z + t = 0 \\ y + s = 0 \\ x + y + s + t = 0 \\ x + 5y - z + 5s + 2t = 0 \end{cases}$

Exemplo 3.37 *Sejam* $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x+y+z+t = 0\}$ *e* $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x - y - z + 2t = 0\}$. *Então* $U \cap W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+t = 0$ *e* $x - y - z + 2t = 0\}$. *Portanto* U *é o espaço das soluções da equação* $x+y+z+t = 0$, W *é o espaço das soluções da equação* $x - y - z + 2t = 0$ *e* $U \cap W$ *é o espaço das soluções do sistema* $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y - z + 2t = 0 \end{cases}$. *Como exercício, encontre uma base e a dimensão para estes espaços e verifique se* $U + W = \mathbb{R}^4$.

Exercícios 3.10 .

1. Encontre uma base e a dimensão para os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$.
a) $U = \{(x,y,z,t) \in R^4 : x+y+z = 0$ *e* $x - y - z + t = 0\}$
b) $W = \{(x,y,z,t) \in R^4 : x + 2y - z + 3t = 0$ *e* $2x + 4y + z - 2t = 0\}$
c) $U \cap W$
d) $U + W$
2. Sejam $U = \{(x,y,z) : x+y+z = 0\}$ *e* $W = \{(x,y,z) : x - y + 2z = 0\}$
a) Encontre $dim(U + W)$ *e* $dim(U \cap W)$
b) $\mathbb{R}^3 = U + W$*?*
c) $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$*?*
3. Sejam $U = \{(x,y,z,s,t) : x+y+z+s+t = 0, \ y - z + s - t = 0$ *e* $s - 2t = 0\}$ *e* $W = \{(x,y,z,s,t) : x+y+z+s+t = 0$ *e* $z + s + t = 0\}$
a) Encontre $dim(U + W)$ *e* $dim(U \cap W)$
b) $\mathbb{R}^5 = U + W$*?*
c) $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$*?*
4. Exercício 25 da página 132 do livro do Boldrini.

3.9 Coordenadas de um vetor em relação a uma base

Seja V um espaço vetorial e seja $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ uma base de V. Para qualquer vetor $v \in V$, v se escreve como uma combinação linear dos vetores da base: $v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$. Além disso, só existe uma maneira de expressar v como uma combinação dos vetores da base B pois se $v = b_1v_1 + b_2v_2 + ... + b_nv_n$, então $a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = b_1v_1 + b_2v_2 + ... + b_nv_n$, logo,

$(a_1-b_1)v_1+(a_2-b_2)v_2+...+(a_n-b_n)v_n=0$. Como B é uma base, seus vetores são L.I. Logo, $a_1-b_1=a_2-b_2=...=a_n-b_n=0$, ou seja, $a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ \cdots,\ a_n=b_n$.

Definição 3.10 *Uma base ordenada de um espaço vetorial V é uma base onde é considerado a ordem dos vetores nesta base.*

Definição 3.11 *Sejam V um espaço vetorial e $B=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ uma base ordenada de V. Para $v=a_1v_1+a_2v_2+...+a_nv_n$, os escalares $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ são chamados coordenadas de v em relação à base B e $[v]_B=\begin{bmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}$ é chamado o vetor das coordenadas de v em relação à base B.*

Note que, mudando a posição dos vetores da base, muda também o vetor das coordenadas.

Exemplo 3.38 *Sejam $B=\{(1,0),(0,1)\}$ e $B'=\{(0,1),(1,0)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$ e seja $v=(3,5)$ um vetor. Então $[v]_B=\begin{bmatrix}-3\\ 5\end{bmatrix}$ e $[v]_{B'}=\begin{bmatrix}5\\ -3\end{bmatrix}$.*

Exercício 3.11 *Seja $B=\{(1,2,1),(0,1,2),(0,0,1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Encontre $[v]_B$ nos casos abaixo.*
a) $v=(0,3,-2)$ *b)* $v=(0,1,1)$ *c)* $v=(1,2,1)$ *d)* $v=(2,3,4)$

3.10 Mudança de base

Seja V um espaço vetorial e sejam $B=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ e $B'=\{w_1,w_2,...,w_n\}$ bases ordenadas de V. Para $v\in V$, sejam $v=x_1v_1+x_2v_2+...+x_nv_n$, e $v=y_1w_1+y_2w_2+...+y_nw_n$ as representações de v como combinação linear dos vetores das duas bases. Então,

$$[v]_B=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} \text{ e } [v]_{B'}=\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}$$

Como os vetores de B' são vetores de V e como B é uma base de V, então os vetores de B' se escrevem como combinações lineares dos vetores de B:

$$(*)\left\{\begin{array}{l} w_1=a_{11}v_1+a_{21}v_2+\ldots+a_{n1}v_n\\ w_2=a_{12}v_1+a_{22}v_2+\ldots+a_{n2}v_n\\ \qquad\qquad\vdots\\ w_n=a_{1n}v_1+a_{2n}v_2+\ldots+a_{nn}v_n\end{array}\right.$$

Assim, $v=y_1w_1+y_2w_2+...+y_nw_n\Rightarrow$
$v=y_1(a_{11}v_1+a_{21}v_2++a_{n1}v_n)+$
$y_2(a_{12}v_1+a_{22}v_2++a_{n2}v_n)+$
....+
$y_n(a_{1n}v_1+a_{2n}v_2++a_{nn}v_n)\Rightarrow$
$v=(a_{11}y_1+a_{12}y_2+...+a_{1n}y_n)v_1+$
$(a_{21}y_1+a_{22}y_2+...+a_{2n}y_n)v_2+$

....+
$(a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n)v_n$
Mas $v = x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n$, logo,

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ \vdots \\ x_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

e portanto,

$$[v]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = [I]_B^{B'}[v]_{B'},$$ onde a matriz $[I]_B^{B'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ é chamada matriz de mudança da base B' para a base B (é a transposta da matriz dos coeficientes do sistema (*)). Esta nomenclatura é a que está no livro do Boldrini e a adotamos por considerá-la mais adequada. Nos livros do Lipschutz e do Coelho, a matriz $[I]_B^{B'}$ é chamada de matriz de mudança da base B para a base B'. Assim, enunciamos o que segue.

Teorema 3.14 *Seja V um espaço vetorial e sejam B e B' bases ordenadas de V. Então, para cada $v \in V$, $[v]_B = [I]_B^{B'}[v]_{B'}$*

Exemplo 3.39 *Sejam $B = \{(3,-2),(-4,3)\}$ e $B' = \{(1,0),(0,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$. Vamos encontrar a matriz de mudança da base B' para a base B e também o vetor das coordenadas de $v = (2,3)$ em relação à base B.*
Para encontrar $[I]_B^{B'}$, escrevemos os vetores de B' como combinação linear dos vetores de B:
$(1,0) = 3(3,-2) + 2(-4,3)$
$(0,1) = 4(3,-2) + 3(-4,3)$
A transposta da matriz dos coeficientes é a matriz procurada: $[I]_B^{B'} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Como $[v]_B = [I]_B^{B'}[v]_{B'}$ e $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ então $[(2,3)]_B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 13 \end{bmatrix}$, ou seja, $(2,3) = 18(3,-2) + 13(-4,3)$.

Exemplo 3.40 *No exemplo anterior, vamos encontrar $[I]_{B'}^{B}$ e realizar o produto $[I]_B^{B'}[I]_{B'}^{B}$. Resolvendo, encontramos $[I]_{B'}^{B} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ e $[I]_B^{B'}[I]_{B'}^{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ que é a matriz identidade. O próximo teorema mostra que isso sempre acontece, ou seja, $[I]_B^{B'}$ é sempre a inversa da matriz $[I]_{B'}^{B}$.*

Teorema 3.15 *Seja V um espaço vetorial e sejam B e B' bases ordenadas de V. Então, a inversa da matriz $[I]_B^{B'}$ é a matriz $[I]_{B'}^{B}$.*

Exercícios 3.12

1. Para $B_1 = \{(0,1),(1,0)\}$, $B_2 = \{(-1,2),(2,-3)\}$, $B_3 = \{(2,3),(-5,-7)\}$ *bases ordenadas de* $\mathbb{R}^2$ *e* $v = (4,5)$*, encontre:*

a) $[v]_{B_1}$ *b)* $[v]_{B_2}$ *c)* $[v]_{B_3}$ *d)* $[I]_{B_2}^{B_1}$ *e)* $[I]_{B_3}^{B_2}$ *f)* $[I]_{B_3}^{B_1}$

2. No exercício anterior verifique que $[I]_{B_3}^{B_2}[I]_{B_2}^{B_1} = [I]_{B_3}^{B_1}$.

3. Para $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$*, encontre a matrizes de mudança de base* $[I]_{B'}^{B}$ *e* $[I]_{B}^{B'}$*, onde* B' *é a base canônica de* $M(2,2)$*:*

$B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

4. Fazer o exercício 29 da página 133 do livro do Boldrini.

Respostas:

1. $[I]_{B_2}^{B_1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $[I]_{B_3}^{B_1} = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $[I]_{B_3}^{B_2} = \begin{bmatrix} 17 & -29 \\ 7 & -12 \end{bmatrix}$,

$[v]_{B_1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$, $[v]_{B_2} = \begin{bmatrix} 22 \\ 13 \end{bmatrix}$, $[v]_{B_3} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$

3. $[I]_{B'}^{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $[I]_{B}^{B'} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3.11 Espaços de polinômios sobre $\mathbb{R}$

Um polinômio com coeficientes reais é uma expressão da forma $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n$, onde $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ são números reais. Dizemos que $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n$ tem grau n se $a_n \neq 0$. Convencionamos que o polinômio nulo $n(t) = 0$ tem grau $-\infty$.

Exemplo 3.41 *Temos que:* $1 - 5t^2$ *tem grau* 2*;* $t^3 - 3t^2 + t + 1$ *tem grau* 3*;* 2 *tem grau* 0 *e* $3t^2 + t^7$ *tem grau* 7.

Seja P o conjunto de todos os polinômios com coeficientes reais. Consideramos que dois polinômios saõ iguais quando eles têm todos os coeficientes iguais:
$a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \cdots + b_nt^n \Rightarrow a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ \cdots a_n = b_n.$

No conjunto P define-se as operações de adição de polinômios e produto de polinômio por escalar como segue:
Para $f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n$, $g(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \cdots + b_nt^n$ e $r \in \mathbb{R}$,
$h(t) = f(t) + g(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + \cdots + (a_n + b_n)t^n$
$k(t) = rf(t) = ra_0 + ra_1t + ra_2t^2 + \cdots + ra_nt^n$

Neste caso, verifica-se sem dificuldades que P é um espaço vetorial real. O vetor nulo deste espaço é o polinômio nulo $n(t) = 0$ $(= 0 + 0t + 0t^2 + \cdots + 0t^n)$.
Por exemplo, para $f(t) = 5 - 3t^3 + t^5$ e $g(t) = t^2 + 2t^3$ tomando $h = f + g$ então $h(t) = 5 + t^2 - t^3 + t^5$ pois $f(t) = 5 + 0t + 0t^2 - 3t^3 + 0t^4 + t^5$ e $g(t) = 0 + 0t + t^2 + 2t^3 + 0t^4 + 0t^5$.

Subespaços P_n
Seja P o espaço dos polinômios sobre $\mathbb{R}$ e P_n o conjunto dos polinômios de graus menores ou iguais a n, isto é, $P_n = \{a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n \ : \ a_i \in \mathbb{R}\}$. Verifica-se facilmente que P_n é um subespaço de P. Por exemplo, $P_2 = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 \ : \ a_i \in \mathbb{R}\}$ é o espaço dos polinômios de graus menores ou iguais a 2.

Definição 3.12 *Dizemos que um conjunto infinito de vetores é (LD) se contém um subconjunto finito de vetores linearmente dependente. Caso contrário, dizemos que o conjunto é linearmente independente (LI).*

No espaço P dos polinômios, o conjunto $\{1, t, t^2, t^3, \cdots\}$ é LI, pois para qualquer subconjunto finito, digamos, $\{1, t, t^2, \cdots, t^n\}$, se $a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n = 0 = 0 + 0t + 0t^2 + \cdots + 0t^n$ então $a_0 = a_1 = \cdots = 0$, mostrando que são LI.
Também, $\{t, t^3, t^8\}$ é LI pois é um subconjunto de $\{1, t, t^2, \cdots, t^8\}$ que é LI.
Temos também que $\{1, t, t^2, t^3, \cdots\}$ gera P, pois todo polinômio se escreve na forma $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n$. Também P não é finitamente gerado, pois não existe um limite para o grau dos polinômios, apesar de todo polinômio ter um grau finito.
Assim, $\{1, t, t^2, t^3, \cdots\}$ é uma base de P. Verifica-se facilmente que $\{1, t, t^2, t^3, \cdots t^n\}$ é uma base de P_n. Portanto, $dimP_n = n + 1$.
Quando um espaço V não é finitamente gerado, dizemos que V tem dimensão infinita e denotamos $dimV = \infty$. Assim, $dimP = \infty$.

Exemplo 3.42 *O conjunto W dos polinômios de graus maiores ou iguais a 2, não é um subespaço do espaço dos polinômios pois $f(x) = 1 + x + x^2$ e $g(x) = 1 - x^2$ são polinômios de W, mas $h(x) = f(x) + g(x) = 2 + x$ tem grau 1, logo, h não está em W.*

Exercícios 3.13
1. *Seja P o espaço dos polinômios. Verifique se W é subespaço de P nos casos abaixo.*
   a) W é o conjunto dos polinômios com coeficientes inteiros.
   b) W é o conjunto dos polinômios com grau 2, isto é,
   $W = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \ \mathbb{R}, a_2 \neq 0\}$.
   c) $W = \{a + bt^2 + ct^5 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.
2. *No exercício anterior, encontre a dimensão de W, nos casos onde W é um espaço vetorial.*
3. *Verifique se B é uma base para P_2 nos caos abaixo.*
   a) $B = \{1 + t, 1, 1 + t^2\}$.
   b) $B = \{1 + t, 1 - t, 1 - t^2\}$.
   c) $B = \{2, 3t, 4t^2\}$.
   d) $B = \{1, 1 + t, 1 - t, t^2\}$.
   e) $B = \{1 + t, 1 - t^2, 1 + t^3\}$.

3.12 Espaços de funções

Se A é um subconjunto do conjunto dos números reais, define-se $F(A)$ o conjunto das funções de A em $\mathbb{R}$. A soma de funções e o produto de funções por escalar são definidos como segue:
Para f e g em $F(A)$ e $r \in \mathbb{R}$, define-se:

$h = f + g,\ h(x) = f(x) + g(x)$.
$k = rf, k(x) = rf(x)$.
Aqui também, $F(A)$ é um espaço vetorial real. Seu vetor nulo é a função constante nula: $n(x) = 0$.

Assim, o conjunto $F(\mathbb{R})$ das funções reais definidas em todo $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial.
Para $f(x) = sen^2(x)$ e $g(x) = cos^2(x)$, sabemos que $f, g \in F(\mathbb{R})$. Denotando $h = f + g$, então $h(x) = sen^2(x) + cos^2(x) = 1$, isto é, h é a função constante $h(x) = 1$. Denotando $k = -3f$, então $k(x) = -3sen^2(x)$.

O espaço P dos polinômios sobre os reais é um subespaço de $F(\mathbb{R})$. Como P tem dimensão infinita então $dimF(\mathbb{R}) = \infty$.
Os conjuntos $C(\mathbb{R}) = \{f \in F(\mathbb{R})\ :\ \text{f é contínua}\ \}$ e $D(\mathbb{R}) = \{f \in F(\mathbb{R})\ :\ \text{f é diferenciável}\ \}$ são subespaços de $F(\mathbb{R})$, e ambos têm P como subespaço.

Se V e W são espaços vetoriais, de modo análogo ao que foi feito para $F(A)$, podemos verificar que $F(V, W) = \{f : V \longrightarrow W\ :\ f \text{ é função }\}$, o conjunto das funções de V em W é também um espaço vetorial.

4 Transformações Lineares

4.1 Definição e exemplos

Definição 4.1 *Sejam V e W espaços vetoriais e seja $T : V \to W$ uma função. Dizemos que T é uma transformação linear, se T satisfaz:*
a) $T(v + w) = T(v) + T(w)$, para quaisquer $v, w \in V$;
b) $T(av) = aT(v)$, para qualquer $v \in V$ e qualquer a escalar.

Proposição 4.1 *Sejam V e W espaços vetoriais e seja $T : V \to W$ uma função. Então T é uma transformação linear se, e somente se, T satisfaz:*
$T(av + bw) = aT(v) + bT(w)$, para quaisquer $v, w \in V$ e para quaisquer a, b escalares;

Exemplo 4.1 *Se V é um espaço vetorial, então a função identidade $T : V \to V,\ T(v) = v$, e a função nula, $T : V \to W,\ T(v) = O_W$, onde O_W é o vetor nulo de W, são transformações lineares.*

Observação. Se $T : V \to W$ é uma transformação linear então $T(O_V) = O_W$, onde O_V e O_W são os vetores nulos de V e W, respectivamente. Assim, se $T(O_V) \neq O_W$ então T não é uma transformação linear.

Exemplos 4.2 *São transformações lineares:*
1) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y) = (x, y, 0)$
2) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y, z) = (x - 2z, 3y)$
3) $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z, s, t) = (2x - s, 0, z)$
4) Se A é uma matriz $m \times n$, a função $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, tomada por $T_A(x_1, x_2, \cdots, x_n) =$

$(y_1, y_2, \cdots, y_m)$, *onde* $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. *Ou seja,* $T_A(v) = Av$ *onde* v *no produto* Av *é tomado como vetor coluna e* Av *é tomado como vetor de* $\mathbb{R}^m$.

Subexemplo. Para $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, *obtida por*

$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-5y \\ 3y \\ -2x+y \end{bmatrix}$, *então* T_A *é uma transformação linear definida por* $T_A(x, y) = (x - 5y, 3y, -2x + y)$.

5) $T : D(\mathbb{R}) \to D(\mathbb{R})$, $T(f) = f'$, *onde* $D(\mathbb{R})$ *é o conjunto das funções diferenciáveis de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$ *e* f' *é a derivada de* f.

Não são transformações lineares:

6) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (x + 1, y + 2, z - 3)$.

7) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ T(x, y) = xy$

8) $T : M(2, 2) \to \mathbb{R},\ T(A) = det(A)$

Teorema 4.2 *Sejam* U *e* V *espaços vetoriais e sejam* $\{v_1, ..., v_n\}$ *uma base para* V *e* $u_1, \cdots, u_n$ *vetores de* U. *Então existe uma única transformação linear* $T : V \to U$ *tal que* $T(v_i) = u_i$ *para todo* $i \in \{1, ..., n\}$.

Exemplo 4.3 *Seja* $\{(1, 1), (0, 1)\}$ *uma base de* $\mathbb{R}^2$ *e sejam* $(2, 0, 5)$ *e* $(1, -1, 3)$ *vetores de* $\mathbb{R}^3$. *Então existe uma transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $T(1, 1) = (2, 0, 5)$ *e* $T(0, 1) = (1, -1, 3)$. *Para encontrar* T, *basta escrever* (x, y) *como combinação linear da base dada e aplicar* T: *como* $(x, y) = x(1, 1) + (y - x)(0, 1)$ *e* T *é uma transformação linear então* $T(x, y) = xT(1, 1) + (y - x)T(0, 1) = x(2, 0, 5) + (y - x)(1, -1, 3) = (x + y, x - y, 2x + 3y)$.

Exercício 4.1 *Resolver os exercícios* 2, 3, 4 *da página* 171 *do livro do Boldrini.*

4.2 Núcleo e Imagem

Definição 4.2 *Seja* $T : V \to W$ *uma transformação linear. O núcleo de* T *é o conjunto dos vetores* $v \in V$ *tais que* $T(v) = O_W$. *A imagem de* T *é o conjunto das imagens dos elementos do domínio de* T.

Notação. Núcleo de T: $N(T) = \{v \in V \ : \ T(v) = O_W\}$.

Imagem de T: $Im(T) = \{T(v) \ : \ v \in V\} = \{w \in W \ : \ w = T(v) \text{ para algum } v \in V\}$.

Teorema 4.3 *Seja* $T : V \to W$ *uma transformação linear. Então o núcleo de* T *é um subespaço de* V *e a imagem de* T *é um subespaço de* W.

Exemplo 4.4 *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definida por* $T(x, y, z) = (x+y, y+z, x-z)$. *Vamos encontrar as dimensões do núcleo e da imagem de* T.

$Im(T) = \{T(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{(x + y, y + z, x - z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{x(1, 0, 1) +$

$y(1,1,0)+z(0,1,-1)|\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}$. Assim, $Im(T)=[(1,0,1),(1,1,0),(0,1,-1)]$ e sabemos como encontrar uma base para $Im(T)$. Assim, $B=\{(1,0,1),(0,1,-1)\}$ é uma base para $Im(T)$, portanto, $dimIm(T)=2$.
$N(T)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ T(x,y,z)=(0,0,0)\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ (x+y,y+z,x-z)=(0,0,0)\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x+y=0,\ y+z=0$ e $x-z=0\}$. Assim, $N(T)$ é o espaço das soluções do sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x+y=0\\ y+z=0\\ x-z=0\end{cases}$$

Resolvendo, encontramos $B'=\{(1,-1,1)\}$ base para $N(T)$. Assim, $dimN(T)=1$.

Uma transformação linear $T:V\to W$ é injetiva se elementos distintos do domínio têm imagens distintas, isto é, se $u\neq v$ então $T(u)\neq T(v)$. Isso é equivalente a dizer que se $T(u)=T(v)$ então $u=v$.

Uma transformação linear $T:V\to W$ é sobrejetiva se todo elemento do contradomínio é imagem de algum elemento do domínio, isto é, se $w\in W$ então existe $v\in V$ tal que $T(v)=w$. Assim, T é sobrejetiva se, e somente se, $W=Im(T)$, isto é, se, e somente se, $dim\ W=dimIm(T)$.

Uma transformação linear $T:V\to W$ é bijetiva se T é injetiva e sobrejetiva.

Teorema 4.4 *Seja $T:V\to W$ uma transformação linear. Então T é injetiva se, e somente se, $N(T)=\{O_V\}$.*

Exemplo 4.5 *No exercício anterior, resolvendo chegamos que o núcleo de T tem dimensão 1. Logo, $N(T)\neq(0,0,0)$. Assim, pelo teorema anterior T não é injetiva.*

Exercício 4.2 *Verifique que a transformação linear $T:R^2\to R^3$ definida por $T(x,y)=(x+y,x+2y,3x+3y)$ é injetiva.*

Exercício 4.3 *Seja $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ transformação linear definida por $T(x,y,z)=(x+y,y-z)$. Verifique que T não é injetiva.*

Teorema 4.5 *Seja $T:V\to W$ uma transformação linear. Se $\{v_1,...,v_n\}$ uma é base de V então $\{T(v_1),\cdots,T(v_n)\}$ gera $Im(T)$. Isto é, $Im(T)=[T(v_1),T(v_2),\ldots,T(v_n)]$*

Exemplo 4.6 *Seja $T:R^3\to R^3$, $T(x,y,z)=(x+y+z,x+2y-2z,y-3z)$. A Imagem de T é gerada por $T(1,0,0)$, $T(0,1,0)$ e $T(0,0,1)$, ou seja, por $(1,1,0)$, $(1,2,1)$ e $(1,-2,-3)$. Escalonando a matriz $\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&1\\1&-2&-3\end{bmatrix}$, chegamos na matriz $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$. Logo,$\{(1,1,0),(0,1,1)\}$ é uma base para $Im(T)$.*

Teorema 4.6 *(Teorema do núcleo e da imagem) Seja $T:V\to W$ uma transformação linear, sendo V espaço de dimensão finita. Então $dimV=dimN(T)+dimIm(T)$.*

Exemplo 4.7 *No exemplo anterior, $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $T(x,y,z)=(x+y+z,x+2y-2z,y-3z)$, conhecendo as dimensões do domínio ($=3$) e da imagem ($=2$), podemos concluir que $dimN(T)=1$, sem precisar encontrar a base do núcleo de T.*

Exemplo 4.8 *No exemplo acima, sabemos que* $dimN(T) = 1$. *Qual seria uma base para* $N(T)$*? Sabemos que* $N(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ T(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$*, ou seja,* $N(T) = \{(x, y, z) \ : \ x + y + z = 0,\ x + 2y - 2z = 0$ *e* $y - 3z = 0\}$. *Assim* $N(T)$ *é o conjunto das soluções do sistema*
$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases}$. *Resolvendo o sistema chegamos, por exemplo, na base* $(4, -3, -1)$ *para* $N(T)$.

Exercícios.
1) Mostre que uma transformação linear $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ não pode ser injetiva.
2) Mostre que uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ não pode ser sobrejetiva.
3) Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Mostre que:
a) se $dimV > dimW$ então T não é injetiva;
b) se $dimV < dimW$ então T não é sobrejetiva.
4) Seja $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ dada por $F(x, y, z, s, t) = (x+y+z+s+t, 2x+3y+4z-5s+t, x+4y+6z-8s)$.
a) Encontre uma base para a imagem de F
b) Qual a dimensão do núcleo de F?
c) Encontre uma base para N(F).
5) Seja $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $G(x, y, z) = (x + y - 2z, y + 3z, x + 2y + z)$
a) Encontre uma base para o núcleo de G
b) Qual a dimensão da imagem de G?
c) Encontre uma base para ImG.

Teorema 4.7 *Sejam* V *e* W *espaços vetoriais de mesma dimensão e seja* $T : V \to W$ *uma transformação linear. São equivalentes:*
a) T *é injetiva*
b) T *é sobrejetiva*

Definição 4.3 *Dizemos que uma transformação linear* $T : V \to W$ *é um isomorfismo se* T *é bijetiva. Neste caso, dizemos que* V *e* W *são isomorfos.*

Teorema 4.8 *Se* V *e* W *são espaços vetoriais de mesma dimensão (finita) então* V *e* W *são isomorfos.*

Temos então que qualquer espaço vetorial real V de dimensão finita é isomorfo a $\mathbb{R}^n$ onde n é a dimensão de V.

Por exemplo, o espaço P_4 dos polinômios de graus menores ou iguais a 4 é isomorfo a $\mathbb{R}^5$; o espaço das matrizes reais $M(2, 3)$ é isomorfo a $\mathbb{R}^6$.

4.3 Composta e inversa de transformações lineares

Sejam $T : V \to W$ e $F : W \to U$ são transformações lineares. Se $v \in V$ então $T(v) \in W$. Logo podemos aplicar F em $T(v)$ e obter $F(T(v)) \in U$. Desse modo, podemos definir uma função de V em U, que é chamada a composição de T e F e é denotada por $FoT : V \to U$, e $(FoT)(v) = F(T(v))$.

Observe que para poder definir FoT é necessário que o domínio de F seja igual à imagem de T (ou simplesmente que o domínio de F esteja contido na imagem de T).

Exemplo 4.9 *Sejam* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *e* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *definidas por* $T(x, y) = (x + y, x - y, 2x)$ *e* $F(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x, -y)$ *então* $(ToF) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ *é definida por* $(FoT)(x, y) = F(T(x, y)) = F(x + y, x - y, 2x) = (2x, 3x - y, 3x + y, y - x)$.

Teorema 4.9 *Se* $T : V \to W$ *e* $F : W \to U$ *são transformações lineares então* $FoT : V \to U$ *também é uma transformação linear.*

Seja $T : V \to W$ uma transformação linear bijetiva. A inversa de T é a função denotada por $T^{-1} : W \to V$, onde $T^{-1}(w) = v$ se, e somente se, $T(v) = w$. Também, $ToT^{-1} : W \to W$ é a função identidade em W e $T^{-1}oT : V \to V$ é a função identidade em V.

Teorema 4.10 *Se* $T : V \to W$ *é uma transformação linear bijetiva então* $T^{-1} : W \to V$ *também é uma transformação linear.*

Exemplo 4.10 *Seja a transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *definida por* $T(x, y, z) = (x + y, y + z, x + y + z)$. *Para verificar se* T *é injetiva basta verificar se* $N(T) = \{(0, 0, 0)\}$. *Temos:* $(x, y, z) \in N(T) \Leftrightarrow T(x, y, z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (x + y, y + z, x + y + z) = (0, 0, 0)$. *Resolvendo o sistema chegamos que a única solução é* $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$, *ou seja,* $N(T) = \{(0, 0, 0)\}$. *Assim,* T *é injetiva e como o domínio e a imagem de* T *tem a mesma dimensão, então* T *é bijetiva. Portanto existe a inversa* $T^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *e* $T^{-1}(x, y, z) = (a, b, c) \Leftrightarrow T(a, b, c) = (x, y, z) \Leftrightarrow (a + b, b + c, a + b + c) = (x, y, z) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a + b = x \\ b + c = y \\ a + b + c = z \end{cases}$$

Resolvendo o ssistema chegamos em $a = -y + z,\ b = x + y - z$ *e* $c = z - x$. *Assim, a inversa é dada por* $T^{-1}(x, y, z) = (-y + z, x + y - z, z - x)$.

Exercício 4.4

1) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *definida por* $T(x, y) = (x + y, 2x - y)$.
a) Mostre que T *é uma transformação linear.*
b) Mostre que T *é bijetiva.*
c) Encontre T^{-1}.
2) Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *definida por* $T(x, y, z) = (2x - 3y + z, 4x - y, 3x)$.
a) Mostre que T *é uma transformação linear.*
b) Mostre que T *é bijetiva.*
c) Encontre T^{-1}.
d) Encontre ToT
3) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *definida por* $T(x, y) = (x + y, y)$.
a) Mostre que T *é uma transformação linear.*
b) Mostre que T *é bijetiva.*
c) Encontre T^{-1}, ToT, ToT^{-1} *e* $T^{-1}oT^{-1}$.

4.4 Operador linear

Já vimos que, para uma matriz $A_{m\times n}$, podemos associar uma transformação linear $T_A : R^n \to R^m$. Veremos agora que dada uma transformação linear $T : V \to W$, é possível associar uma matriz A a T. Faremos isso para o caso de T ser um operador linear. Para o caso geral, o procedimento é semelhante e pode ser encontrado nos livros listados na bibliografia.

Definição 4.4 *Um operador linear sobre um espaço vetorial V é uma transformação linear $T : V \to V$.*

Já vimos também que se V é um espaço vetorial e $B = \{v_1, ..., v_n\}$ é uma base de V, então cada v em V se escreve de maneira única como combinação linear dos elementos da base, isto é, existem únicos escalares $a_1, \cdots, a_n$ tais que $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$. Assim, considerando B como base ordenada, podemos tomar o vetor das coordenadas de v em relação à base B:

$$[v]_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

4.5 Matriz de um operador linear

Sejam V um espaço vetorial, $B = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base de V e $T : V \to V$ um operador linear. Como $T(v_i) \in V$ para todo i, então cada $T(v_i)$ se escreve como combinação linear da base (ordenada) B:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{n1}v_n \\ T(v_2) &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{n2}v_n \\ &\vdots \\ T(v_n) &= a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \cdots + a_{nn}v_n \end{aligned}$$

A transposta da matriz dos coeficientes é chamada a matriz de T em relação à base B e é denotada por $[T]_B$. Assim, $[T]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{21} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Teorema 4.11 *Sejam V um espaço vetorial, $B = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base de V e $T : V \to V$ um operador linear. Então $[T]_B[v]_B = [T(v)]_B$.*

Exemplo 4.11 *Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (2x + y, x - y)$ e seja $B = \{(0, 1), (1, 1)\}$ uma base de V. Temos:*

$$T(0, 1) = (1, -1) = -2(0, 1) + 1(1, 1)$$
$$T(1, 1) = (3, 0) = -3(0, 1) + 3(1, 1)$$

Assim, $[T]_B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Para $v = (-2, 5)$, $T(v) = T(-2, 5) = (1, -7)$. Assim, $v = (-2, 5) = 7(0, 1) - 2(1, 1)$ e $T(v) = -8(0, 1) + 1(1, 1)$. Logo, $[v]_B = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$ *e* $[T(v)]_B = \begin{bmatrix} -8 \\ 1 \end{bmatrix} = [T]_B[v]_B$.

Considerando a base canônica $B' = \{(1, 0), (0, 1)\}$, temos

$T(1,0) = (2,1) = 2(1,0) + 1(0,1)$
$T(0,1) = (1,-1) = 1(1,0) - 1(0,1)$.
Logo, $[T]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = [T]_B$.

Já vimos que se A é uma matriz $n \times n$ então A está associada a uma transformação linear $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Se B é a base canônica de $\mathbb{R}^n$ verifica-se que $[T_A]_B = A$.

Teorema 4.12 *Seja V um espaço vetorial e sejam $B = \{v_1, ..., v_n\}$ e $B' = \{w_1, ..., w_n\}$ bases de V. Se $T : V \to V$ é um operador linear então $[T]_{B'} = P[T]_B P^{-1}$ onde $P = [I]^B_{B'}$ é a matriz de mudança da base B para a base B'.*

Exemplo 4.12 *No exemplo anterior, temos*
$(0,1) = 0(1,0) + 1(0,1)$ *e*
$(1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$.
Logo a matriz de mudança de base é $P = [I]^B_{B'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [I]^{B'}_B$.
Assim, $[T]_{B'} = P[T]_B P^{-1}$, *isto é,* $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Definição 4.5 *Dizemos que duas matrizes $n \times n$ A e B são semelhantes se existe uma matriz $n \times n$ inversível P tal que $A = P^{-1}BP$.*

Teorema 4.13 *Duas matrizes representam o mesmo operador linear T se, e somente se elas são semelhantes.*

Exercícios.
1) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (2x - 5y, 2y)$
a) Encontre $[T]_B$ para $B = \{(1,0),(0,1)\}$
b) Encontre $[T]_{B'}$ para $B' = \{(1,2),(2,1)\}$
2) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z) = (2x + y, y - z, x + y + z)$
a) Encontre$[T]_B$ para $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$
b) Encontre $[T]_{B'}$ para $B' = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$

5 Autovalores e Autovetores

Definição 5.1 *Sejam V um espaço vetorial e $T : V \to V$ um operador linear. Dizemos que um escalar λ é um autovalor de T, se existe um vetor não nulo $v \in V$ tal que $T(v) = \lambda v$. Neste caso, dizemos que v é um autovetor de T, associado ao autovalor λ.*

Exemplos 5.1
1) Seja $T : V \to V$ definido por $T(v) = 2v$. Então 2 é um autovalor (o único) de T e todo vetor não nulo de V é um autovetor associado ao autovalor 2.
2) Seja $T : V \to V$ a aplicação nula. Então 0 é um autovalor (o único) de T e todo vetor não

nulo de V *é um autovetor associado ao autovalor* 0.

3) Seja $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ *definida por* $T(x,y)=(-y,x)$. *Então* $T(x,y)=\lambda(x,y)\Rightarrow(-y,x)=(\lambda x,\lambda y)\Rightarrow -y=\lambda x$ *e* $x=\lambda y\Rightarrow -y=\lambda^2y\Rightarrow\lambda^2=-1$ *ou* $y=0$. *Como* $\lambda\in\mathbb{R}$ *então* $\lambda^2\neq-1$, *logo,* $y=0$ *e, portanto,* $x=\lambda y=0$, *ou seja,* $(x,y)=(0,0)$. *Assim, não existem autovalores para* T.

3b) Seja $T:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ *definida por* $T(x,y)=(-y,x)$, *onde* $\mathbb{C}$ *é o corpo dos números complexos e estamos considerando* $\mathbb{C}^2$ *um espaço vetorial complexo. Desenvolvendo como no exemplo anterior, chegamos que* $x=\lambda y$ *e* $\lambda^2=-1$. *Como estamos trabalhando num espaço vetorial complexo, temos dois autovalores:* $\lambda_1=i$ *e* $\lambda_2=-i$. *Assim, para* $\lambda_1=i$ *temos* $x=iy$ *e os autovetores associados ao autovalor* $\lambda_1=i$ *são da forma* (iy,y), $y\neq0$; *para* $\lambda_2=-i$ *temos* $x=-iy$ *e os autovetores associados ao autovalor* $\lambda_2=-i$ *são da forma* $(-iy,y), y\neq0$;

4) Seja $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ *definida por* $T(x,y)=(x,x-2y)$. *Se* (x,y) *é um autovetor associado a um autovalor* λ *então*

$$T(x,y)=\lambda(x,y)\Rightarrow(x,x-2y)=(\lambda x,\lambda y)\Rightarrow\begin{cases} x &=\lambda x\\ x-2y &=\lambda y\end{cases}$$

Se $x=0$ *então* $y\neq0$ *e* $-2y=\lambda y$. *Logo,* $\lambda=-2$. *Assim,* -2 *é um autovalor de* T *e os vetores da forma* $v=(0,y)$, $y\neq0$, *são autovetores associados ao autovalor* -2. *Se* $x\neq0$ *então* $\lambda=1$ *e* $x-2y=y$, *ou seja,* $x=3y$. *Assim,* 1 *é um autovalor de* T *e os vetores da forma* $v=(3y,y)$, $y\neq0$, *são autovetores associados ao autovalor* 1.

5.1 Autovalores e Autovetores de uma matriz

Definição 5.2 *Seja* A *uma matriz* $n\times n$. *Um autovalor de* A *é um escalar* λ *para o qual existe um vetor coluna* v $n\times1$ *não nulo, tal que* $Av=\lambda v$. *O vetor* v *aqui é também chamado de autovetor associado ao autovalor* λ .

Dada uma matriz $n\times n$ A, *vamos proceder de modo a procurar os autovalores e autovetores de* A. *Se* v *é um autovetor de* A *associado ao autovalor* λ, *então* $Av=\lambda v=\lambda Iv$ *onde* I *é a matriz identidade* $n\times n$. *Logo,* $Av-\lambda Iv=O$, *ou seja,* $(A-\lambda I)v=O$.

Podemos considerar $(A-\lambda I)v=O$ *como um sistema com* n *equações lineares a* n *incógnitas onde* $(A-\lambda I)$ *é a matriz dos coeficientes e* v *é a matriz das incógnitas. O sistema possui solução não nula se, e somente se, o posto da matriz* $A-\lambda I$ *é menor que* n. *Neste caso,* $A-\lambda I$ *é equivalente por linhas a uma matriz escalonada* M *com, pelo menos, uma linha nula, ou seja,* $detM=0$. *Portanto,* $det(A-\lambda I)=detM=0$.

Assim, existe um vetor $v\neq O$ *tal que* $Av=\lambda v$ *se, e somente se,* $det(A-\lambda I)=0$.

Denotando $P(\lambda)=det(A-\lambda I)$, *temos que os autovalores de* A *são as raízes de* $P(\lambda)$.

Definição 5.3 *O polinômio* $P(\lambda)=det(A-\lambda I)$ *definido acima é chamado o polinômio característico de* A.

Exemplo 5.2 *Para* $A=\begin{bmatrix}-1&4\\1&2\end{bmatrix}$, $P(\lambda)=det(A-\lambda I)=det\begin{bmatrix}-1-\lambda&4\\1&2-\lambda\end{bmatrix}=(-1-\lambda)(2-\lambda)-4\Rightarrow P(\lambda)=-2-\lambda+\lambda^2-4=\lambda^2-\lambda-6$.

Assim, as raízes do polinômio característico $P(\lambda)=\lambda^2-\lambda-6$ *são* $\lambda=-2$ *e* $\lambda=3$.

Para $\lambda = -2$, *existe um vetor coluna* v *tal que* $Av = -2v$. *Assim,* $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1x + 4y \\ x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x \\ -2y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -1x + 4y & = -2x \\ x + 2y & = -2y \end{cases}$. *Resolvendo o sistema, chegamos que as soluções são da forma* $x = -4y$. *Assim, os autovetores associados ao autovalor* $\lambda = -2$ *são os vetores* $v = \begin{bmatrix} -4y \\ y \end{bmatrix}$, $y \neq 0$.
Para $\lambda = 3$, *procedendo da mesma forma, concluímos que os autovetores associados ao autovalor* $\lambda = 3$ *são da forma* $v = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}$, $x \neq 0$.

Exercício 5.1 *Para a matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ *encontre os autovalores e autovetores associados.*
Resposta: $\lambda = 1$ *com autovetores associados da forma* $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$, $x \neq 0$ *ou* $y \neq 0$.
$\lambda = -5$ *com autovetores associados da forma* $v = \begin{bmatrix} 2z \\ 3z \\ -6z \end{bmatrix}$, $z \neq 0$.

Exercício 5.2 *Para a matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ *encontre os autovalores e autovetores associados.*
Resposta: $\lambda = 1$ *com autovetores associados da forma* $v = \begin{bmatrix} -y \\ y \\ 2y \end{bmatrix}$, $y \neq 0$.
$\lambda = 2$ *com autovetores associados da forma* $v = \begin{bmatrix} -2y \\ y \\ 4y \end{bmatrix}$, $y \neq 0$. $\lambda = 3$ *com autovetores associados da forma* $v = \begin{bmatrix} -y \\ y \\ 4y \end{bmatrix}$, $y \neq 0$.

5.2 Polinômio característico de um operador linear

Sejam $T : V \to V$ *um operador linear,* B *uma base de* V *e* $[T]_B$ *a matriz de* T *na base* B. *Temos então para* $v \in V$, $v \neq O$: $T(v) = \lambda v \Leftrightarrow [T(v)]_B = [\lambda v]_B = \lambda [v]_B$. *Mas* $[T(v)]_B = [T]_B [v]_B$
Assim, $T(v) = \lambda v \Leftrightarrow [T]_B [v]_B = \lambda [v]_B \Leftrightarrow ([T]_B - \lambda I)[v]_B = 0 \Leftrightarrow det([T]_B - \lambda I) = 0$ *(como no caso de autovalores de matrizes)* $\Leftrightarrow P(\lambda) = 0$ *onde* $P(\lambda) = det([T]_B - \lambda I)$ *é o polinômio característico de* $[T]_B$.

O polinômio P acima é chamado o polinômio característico de T e suas raízes são os autovalores de T. Observe que P independe da base B pois se B' é outra base de V então $[T]_{B'} = A[T]_B A^{-1}$ para alguma matriz A. Logo, $det([T]_{B'} - \lambda I) = det(A[T]_B A^{-1} - \lambda AIA^{-1}) = det(A([T]_B - \lambda I)A^{-1}) = det(A)det([T]_B - \lambda I)det(A^{-1}) = det(A)det(A^{-1})det([T]_B - \lambda I) = det([T]_B - \lambda I)$.

Exemplo 5.3 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x, 8x - 3y)$. Tomando $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ a base canônica, temos:*
$T(1, 0) = (1, 8) = 1(1, 0) + 8(0, 1)$
$T(0, 1) = (0, -3) = 0(1, 0) - 3(0, 1)$
Logo, $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$ *e* $P(\lambda) = det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 8 & -3-\lambda \end{bmatrix} = (1 - \lambda)(-3 - \lambda)$, *cujas raízes são* $\lambda = 1$ *e* $\lambda = -3$.
Para $\lambda = 1$, $T(x, y) = 1(x, y) = (x, y)$. Como $T(x, y) = (x, 8x-3y)$ então $x = x$ e $y = 8x-3y$, ou seja, x é qualquer e $y = 2x$. Assim, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 1$ são da forma $(x, 2x), x \neq 0$.
Para $\lambda = -3$, $T(x, y) = -3(x, y) = (-3x, -3y)$. Como $T(x, y) = (x, 8x - 3y)$ então $-3x = x$ e $-3y = 8x - 3y$, ou seja, $x = 0$. Assim, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = -3$ são da forma $(0, y), y \neq 0$.

Exercícios 5.3 *Página 195 do livro do Boldrini: 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,13,16.*

5.3 Diagonalização

Definição 5.4 *Dizemos que um operador linear T sobre um espaço vetorial V é diagonalizável se existe uma base B de V tal que $[T]_B$ é uma matriz diagonal.*

Teorema 5.1 *Seja T um operador linear no espaço vetorial V. Então T é diagonalizável se, e somente se, existe uma base B de V formada por autovetores de T.*

Exemplo 5.4 *No exemplo anterior, para o operador linear $T : R^2 \to R^2$ definido por $T(x, y) = (x, 8x - 3y)$, podemos tomar os autovetores $(1, 2)$ e $(0, -5)$. Como estes vetores são L.I. então $B = \{(1, 2), (0, -5)\}$ é uma base para R^2 (pois $dim R^2 = 2$). Assim,*
$T(1, 2) = (1, 2) = 1(1, 2) + 0(0, -5)$
$T(0, -5) = (0, 15) = 0(1, 2) - 3(0, -5)$
Logo, $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

Exemplo 5.5 *Para $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definida por $T(x, y) = (-y, x)$, vimos que temos dois autovalores: $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = -i$ com autovetores da forma (iy, y), $y \neq 0$ e $(-iy, y), y \neq 0$. Os autovetores $v_1 = (i, 1)$ e $v_2 = (-i, 1)$ formam uma base de $\mathbb{C}^2$ (verifique) e*
$T(v_1) = T(i, 1) = (-1, i) = i(i, 1) + 0(-i, 1)$
$T(v_2) = T(-i, 1) = (-1, -i) = 0(i, 1) - i(-i, 1)$
Assim, para $B = \{v_1, v_2\}$ *temos* $[T] = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$.

Definição 5.5 *Dizemos que uma matriz A é diagonalizável se existe uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal.*

Teorema 5.2 *Uma matriz quadrada de ordem n é diagonalizável se, e somente se, A tem n autovetores linearmente independentes. Neste caso tomando uma matriz P, onde as colunas de P são os n autovetores L.I. de A então a matriz $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal.*

Exemplo 5.6 *Para $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, já vimos que A possui dois autovalores, com autovetores associados da forma $(-4y, y)$ e (x, x). Logo, podemos considerar os vetores $v = (-4, 1)$ e $w = (1, 1)$ formando uma base de $\mathbb{R}^2$, pois são L.I.. Assim, para $P = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}$. Logo, $P^{-1}AP = \cdots = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$*
Verifique que PAP^{-1} não é uma matriz diagonal.

O problema então de saber se uma matriz de ordem n, ou um operador linear sobre um espaço de dimensão n, é diagonalizável, consiste em verificar se o operador linear possui uma base formada por autovetores, isto é, se existem n autovetores que são L.I.

Os próximos resultados valem tanto para operadores lineares quanto para matrizes, já que podemos identificar matrizes com operadores lineares e identificar espaço vetorial de dimensão n com $\mathbb{R}^n$.

Teorema 5.3 *Se $v_1,\ v_2, \cdots, v_m$ são autovetores associados, respectivamente, a autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ então $v_1,\ v_2, \cdots, v_m$ são vetores L.I.*

Teorema 5.4 *Sejam T um operador linear em V, e $n = dimV$. Se T possui n autovalores distintos então T é diagonalizável.*

Exemplo 5.7 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x, x - 2y)$. Já vimos que seus autovalores são 1 e -2. Logo, T é diagonalizável.*

Exemplo 5.8 *Já vimos que a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ possui dois autovalores distintos: $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -2$. Logo, A é diagonalizável.*

Definição 5.6 *Seja T um operador linear em um espaço V e seja λ um autovalor de T. O conjunto $E_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}$ é chamado de autoespaço de λ.*

Fica como exercício verificar que E_λ é um subespaço de V.

Para verificar se um operador linear $T : V \to V$ é diagonalizável procedemos da seguinte forma:
1. Encontramos os autovalores de T;
2. Para cada autovalor λ de T encontramos uma base para E_λ , ou seja, encontramos o número máximo de autovetores L.I. associados a λ ;
3. Consideramos $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ o conjunto de todos os autovetores encontrados no ítem

anterior.
Se $n = dimV$ *então* B *é uma base de* V *formada por autovetores, portanto,* T *é diagonalizável.*
Caso contrário, T *não é diagonalizável.*

Exemplo 5.9 *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (3x - 3y - 4z, 3y + 5z, -z)$. *Resolvendo, encontramos os autovalores de T:* $\lambda_1 = 3$ *com autovetores associados da forma* $(x, 0, 0)$, $x \neq 0$ *e* $\lambda_2 = -1$ *com autovetores associados da forma* $(z, -20z, 16z)$, $z \neq 0$. *Temos que uma base para* E_{λ_1} *é* $B_1 = \{(1, 0, 0)\}$ *e uma base para* E_{λ_2} *é* $B_2 = \{(1, -20, 16)\}$. *Assim, não é possível encontrar 3 autovetores linearmente independetes. Logo,* T *não é diagonalizável.*

Exemplo 5.10 *Para a matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$, *já vimos que os autovalores são* $\lambda = 1$, *com autovetores associados da forma* $(x, y, 0)$, *e* $\lambda = -5$ *com autovetores associados da forma* $(2z, 3z, -6z)$, $z \neq 0$. *Assim, para* $\lambda = 1$ *obtemos dois autovetores L.I.:* $(1, 0, 0)$ *e* $(0, 1, 0)$, *e para* $\lambda = -5$, *obtemos o autovetor* $(2, 3, -6)$. *Portanto,* $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (2, 3, -6)\}$ *é uma base de* $\mathbb{R}^3$ *formada por autovetores. Tomando*
$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$, *temos* $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/6 \\ 0 & 1 & 3/6 \\ 0 & 0 & -1/6 \end{bmatrix}$ *e* $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

Exercício 5.4
1) Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ *verifique se* A *é diagonalizável. Caso seja, encontre a matriz* P *tal que* $P^{-1}AP$ *seja uma matriz diagonal.*
2) Idem para $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.
3) Verifique se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $T(x, y) = (12x - 10y, 15x - 13y)$ *é diagonalizável. Caso seja, encontre uma base* B *de* $\mathbb{R}^2$ *tal que* $[T]_B$ *seja uma matriz diagonal.*
4) Idem para $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $T(x, y) = (y, -x)$
5) Idem para $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $T(x, y) = (5x + y, -4x + y)$.
6) Idem para $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ *dada por* $T(x, y) = (x + y, -x + y)$.
Respostas.
1) Autovetores: 0 *e* 3*;* $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$
2) Autovalores: -2 *e* 3*;* $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$
3) $B = \{(1, 1), (2, 3)\}$
4) Não é diagonalizável pois não possui autovalores.
5) Não é diagonalizável pois não possui dois autovetores L.I.
6) $B = \{(1, i), (1, -i)\}$

6 Produto Interno

Neste capítulo vamos considerar espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ou seja, os espaços vetoriais podem ser reais ou complexos, dependendo de ser $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

6.1 Definição e exemplos

Definição 6.1 *Seja V um espaço vetorial. Um produto interno sobre V é uma função de $V \times V$ em $\mathbb{K}$, denotada por $\langle \ \ , \ \rangle$, satisfazendo:*
a) $\langle v, v\rangle \in \mathbb{R}$, $\langle v, v\rangle \geq 0$ e $\langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = O$, para todo $v \in V$;
b) $\langle au + bv, w\rangle = a\langle u, w\rangle + b\langle v, w\rangle$, para todos $u, v, w \in V$, $a, b \in \mathbb{K}$;
c) $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$, para todos $u, v \in V$. Aqui, $\overline{a}$ denota o complexo conjugado de a.

A partir da definição, podemos também concluir que:
d) $\langle w, au + bv\rangle = \overline{a}\langle w, u\rangle + \overline{b}\langle w, v\rangle$, para todos $u, v, w \in V$, $a, b \in \mathbb{K}$, por (b) e (c);
e) $\langle v, O\rangle = \langle v, 0v\rangle = \overline{0}\langle v, v\rangle = 0\langle v, v\rangle = 0$ e $\langle O, v\rangle = \overline{\langle v, O\rangle} = \overline{0} = 0$, para todo $v \in V$, por (d).

Observe que no caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, temos:
c) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$;
d) $\langle w, au + bv\rangle = a\langle w, u\rangle + b\langle w, v\rangle$;

Podemos estender (b) e (d) para somas finitas:
b') $\langle a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n, w\rangle = a_1\langle v_1, w\rangle + a_2\langle v_2, w\rangle + \cdots + a_n\langle v_n, w\rangle$
d') $\langle w, a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n\rangle = a_1\langle w, v_1\rangle + a_2\langle w, v_2\rangle + \cdots + a_n\langle w, v_n\rangle$

Exemplo 6.1 *O produto escalar em $\mathbb{R}^2$, definido por $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = x_1x_2 + y_1y_2$ é um produto interno sobre $\mathbb{R}^2$ (verificar); o produto escalar em $\mathbb{C}^2$, definido por $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = x_1\overline{x}_2 + y_1\overline{y}_2$ é um produto interno sobre $\mathbb{C}^2$ (verificar).*

Exemplo 6.2 *O produto interno do exemplo anterior pode ser expandido para qualquer espaço $\mathbb{K}^n$, para $u = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $v = (y_1, y_2, ..., y_n)$:*

Em $\mathbb{C}^n$: $\langle u, v\rangle = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + \cdots + x_n\overline{y}_n$ é um produto interno sobre $\mathbb{C}^n$.

Em $\mathbb{R}^n$: $\langle u, v\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ é um produto interno sobre $\mathbb{R}^n$.

O produto interno definido acima é chamado de produto interno usual de $\mathbb{K}^n$. Podemos ter vários produtos internos para um mesmo espaço. No exemplo a seguir, definimos um outro produto interno sobre $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 6.3 *Em $\mathbb{R}^2$, para $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$, definimos $\langle u, v\rangle = \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = 2x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + y_1y_2$ é um produto interno, pois:*
a) se $v = (x_1, y_1)$ então $\langle v, v\rangle = 2x_1x_1 - x_1y_1 - x_1y_1 + y_1y_1 = 2x_1^2 - 2x_1y_1 + y_1^2 = x_1^2 + x_1^2 - 2x_1y_1 + y_1^2 = x_1^2 + (x_1 - y_1)^2 \geq 0$ e $x_1^2 + (x_1 - y_1)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ e $x_1 + y_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = y_1 = 0$. Assim, $\langle v, v\rangle \geq 0$ e $\langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = (0, 0)$.
Como exercício, verifique os ítens (b) e (c) da definição de produto interno.

Exemplo 6.4 *Para V, o espaço das funções contínuas reais no intervalo $[a, b]$, verifica-se facilmente, a partir de propriedades de integrais, que $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$ onde $f, g \in V$, é um produto interno em V.*

Exercícios do Boldrini - pag 247 - 2 e 11a; do Lipschutz - pag 315 - 6.3

6.2 Bases Ortogonais

Definição 6.2 *Seja V um espaço vetorial com produto interno. Dizemos que dois vetores u e v de V são ortogonais se $\langle u, v\rangle = 0$.*
Notação: $u \perp v$ quando u e v são ortogonais.

Exemplo 6.5 *No espaço $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual, os vetores $u = (1, 2)$ e $v = (2, -1)$ são ortogonais, pois $\langle u, v\rangle = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 0$.*

Teorema 6.1 *Seja V um espaço vetorial com produto interno. Então:*
a) $O \perp v$, para todo $v \in V$;
b) $u \perp v \Rightarrow v \perp u$, para todos $u, v \in V$;
c) $u \perp v \Rightarrow au \perp v$, para todos $u, v \in V$ e para todo $a \in \mathbb{K}$;
d) $u \perp w$ e $v \perp w \Rightarrow (u + v) \perp w$, para todos $u, v, w \in V$;
e) $u \perp v$ para todo $v \in V \Rightarrow u = O$.

De (c) e (d) do teorema anterior, temos que se $u \perp w$ e $v \perp w \Rightarrow (au + bv) \perp w$ e $w \perp (au + bv)$, para todos $u, v, w \in V$ e $a, b \in \mathbb{K}$.

Teorema 6.2 *Sejam $v_1, v_2, ..., v_n$ vetores não nulos e ortogonais dois a dois. Então o conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é L.I..*

Definição 6.3 *Uma base ortogonal é uma base formada por vetores que são dois a dois ortogonais.*

Como um conjunto com n vetores L.I. em um espaço com dimensão n formam uma base, então n vetores não nulos que são dois a dois ortogonais, formam uma base ortogonal num espaço de dimensão n.

Exemplo 6.6 *Vimos que no espaço $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual, os vetores $u = (1, 2)$ e $v = (2, -1)$ são ortogonais. Como $\dim\mathbb{R}^2 = 2$, então $B = \{(1, 2), (2, -1)\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^2$. Verifica-se facilmente que $\{(1, 0), (1, 2)\}$ é uma base não ortogonal de $\mathbb{R}^2$.*

Exemplo 6.7 *As bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e de $\mathbb{C}^n$ são bases ortogonais com o produto interno usual.*

Quando se trabalha com bases ortogonais fica mais simples a determinação das coordenadas de vetores em relação à base. Considere $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ base ortogonal de um espaço vetorial V. Se v é um vetor de V, seja a representação de v na base B dada por $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$. Então $\langle v, v_1\rangle = \langle a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n, v_1\rangle = a_1\langle v_1, v_1\rangle + a_2\langle v_2, v_1\rangle + \cdots + a_n\langle v_n, v_1\rangle = a_1\langle v_1, v_1\rangle + a_2 \cdot 0 + \cdots + a_n \cdot 0 = a_1\langle v_1, v_1\rangle$. Assim, $a_1 = \dfrac{\langle v, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}$. De modo análogo verifica-se que para cada i, $a_i = \dfrac{\langle v, v_i\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle}$.

Exemplo 6.8 *Para* $\mathbb{R}^2$ *com o produto interno usual, tomando a base ortogonal* $B = \{(1,2),(2,-1)\}$, *vamos determinar as coordenadas de* $(-2,5)$ *em relação a* B*:* $\langle(-2,5),(1,2)\rangle = -2+10 = 8$; $\langle(-2,5),(2,-1)\rangle = -4-5 = -9$; $\langle(1,2),(1,2)\rangle = 1+4 = 5$; $\langle(2,-1),(2,-1)\rangle = 4+1 = 5$. *Assim,* $a_1 = \dfrac{\langle(-2,5),(1,2)\rangle}{\langle(1,2),(1,2)\rangle} = \dfrac{8}{5}$ *e* $a_2 = \dfrac{\langle(-2,5),(2,-1)\rangle}{\langle(2,-1),(2,-1)\rangle} = \dfrac{-9}{5} = -\dfrac{9}{5}$, *ou seja,* $(-2,5) = \dfrac{8}{5}(1,2) - \dfrac{9}{5}(2,-1)$. *Logo,* $[(-2,5)]_B = \begin{bmatrix} 8/5 \\ -9/5 \end{bmatrix}$.

6.3 Norma

Definição 6.4 *Seja* V *um espaço com com produto interno. A norma de um vetor* v *em relação a esse produto interno é definida por* $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$. *Quando* $\|v\| = 1$ *dizemos que* v *é um vetor unitário.*

Assim, $\langle v,v\rangle = \|v\|^2$.

Observe que se v *é um vetor não nulo, então o vetor* $u = \dfrac{v}{\|v\|}$ *é um vetor unitário com mesma direção e mesmo sentido que* v, *pois*

$$\|u\| = \sqrt{\left\langle \frac{v}{\|v\|}, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle} = \sqrt{\frac{1}{\|v\|^2}\langle v,v\rangle} = \sqrt{\frac{1}{\|v\|^2}\|v\|^2} = 1$$

Propriedades da norma. *Seja* V *um espaço com produto interno. Para* $u, v \in V$ *e* $r \in \mathbb{K}$ *tem-se:*

a) $\|v\| \geq 0$ *e* $\|v\| = 0$ *se, e somente se,* v *é o vetor nulo*
b) $\|rv\| = |r| \cdot \|v\|$
c) $|\langle u,v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ *(desigualdade de Schwarz)*
d) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *(desigualdade triangular)*

Demonstração: *a) e b) seguem da definição de norma.*
c) segue da desigualdade $0 \leq \left\langle u - \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2} \cdot v, u - \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2} \cdot v \right\rangle$.
d) $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u, u+v\rangle + \langle v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle = \|u\|^2 + \langle u,v\rangle + \overline{\langle u,v\rangle} + \|v\|^2 = \|u\|^2 + 2Re\langle u,v\rangle + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2|\langle u,v\rangle| + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2 = \|u\| + \|v\|)^2$, *pois se* $z \in \mathbb{C}$ *então* $Re z \leq |z|$, *onde* $Re z$ *é a parte real do número complexo* z. *Assim,* $\|u+v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2$, *portanto,* $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$. ■

Na geometria analítica a fórmula de ângulo definido por dois vetores é dada por $\cos(\theta) = \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|}$. *Na desigualdade de Scwarz temos que* $\dfrac{|\langle u,v\rangle|}{\|u\|\|v\|} \leq 1$. *Assim, temos que* $-1 \leq \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|} \leq 1$, *o que nos permite estender a definição de ângulo de vetores para qualquer espaço com produto interno, a partir da fórmula* $\cos(\theta) = \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|}$

Definição 6.5 *Seja* V *um espaço com com produto interno. Uma base ortonormal é uma base formada por vetores unitários e que são dois a dois ortogonais.*

Assim, para uma base ortonormal $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *valem* $\langle v_i, v_i\rangle = 1$ *e* $\langle v_i, v_j\rangle = 0$, *caso* $i \neq j$.

Recordamos que para uma base ortogonal $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, *se a representação de* v *na base* B *dada por* $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$, *então* $a_i = \dfrac{\langle v, v_i\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle}$. *Se a base for ortonormal, temos* $\langle v_i, v_i\rangle = \|v_i\|^2 = 1$. *Logo,* $a_i = \langle v, v_i\rangle$, *ficando mais simples ainda encontrar as coordenadas do vetor de* v *em relação à base ortonormal.*

Exemplo 6.9 *As bases canônicas de* $\mathbb{R}^n$ *e de* $\mathbb{C}^n$ *são bases ortonormais com o produto interno usual.*

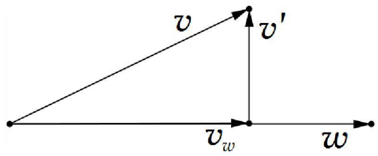
6.4 Construção de bases ortogonais e bases ortonormais

Vamos aqui descrever um processo para construir bases ortonormais a partir de bases quaisquer de um espaço com produto interno.

Definição 6.6 *Para* v *e* w *vetores não nulos, definimos a projeção de* v *na direção de* w *sendo o vetor* $v_w = \dfrac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} \cdot w = \dfrac{\langle v, w\rangle}{||w||^2} \cdot w$

Tomando um vetor $v' = v - cw$, *temos* $v' \perp w \Leftrightarrow 0 = \langle v', w\rangle = \langle v - cw, w\rangle = \langle v, w\rangle - c\langle w, w\rangle = \langle v, w\rangle - c||w||^2 \Leftrightarrow c = \dfrac{\langle v, w\rangle}{||w||^2}$.

Assim, v_w *é o único vetor da forma* cw *tal que* $v - cw$ *é ortogonal a* w, *ou seja,* v_w *é o único vetor na direção de* w *tal que* $(v - v_w) \perp w$.



Teorema 6.3 *Seja* V *um espaço com com produto interno, sejam* $w_1, w_2, \cdots, w_n$ *vetores não nulos dois a dois ortogonais e seja* $w = v - c_1w_1 - c_2w_2 - \cdots - c_nw_n$ *onde* v *é um vetor e, para cada* i, $c_i = \dfrac{\langle v, w_i\rangle}{||w_i||^2}$. *Então* w *é ortogonal a cada* w_i.

Observe que, no teorema anterior, c_iw_i *é a projeção de* v *na direção de* w_i.

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

Seja V *um espaço com com produto interno e seja* $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *uma base de* V. *Sejam:*

$w_1 = v_1$

$w_2 = v_2 - \dfrac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1$

$w_3 = v_3 - \dfrac{\langle v_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \dfrac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} w_2$

. . . .

$w_n = v_n - \dfrac{\langle v_n, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \dfrac{\langle v_n, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} w_2 - \cdots - \dfrac{\langle v_n, w_{n-1}\rangle}{\|w_{n-1}\|^2} w_{n-1}$

Então $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ *é uma base ortogonal para o espaço* V *(verifique a partir do teorema anterior). Normalizando os vetores, isto é, fazendo* $u_i = \dfrac{1}{\|w_i\|} w_i$, *para cada* i, *obtemos a base ortonormal* $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ *(veja o exercício a seguir).*

Exercício 6.1 *Seja* $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *uma base ortogonal de um espaço vetorial com produto interno e sejam* $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$ *escalares não nulos. Mostre que* $B' = \{a_1v_1, a_2v_2, ..., a_nv_n\}$ *também é uma base ortogonal.*

Exemplo 6.10 *Para a base* $B = \{(1,1,1), (1,2,0), (1,0,0)\}$ *do* $\mathbb{R}^3$*, vamos considerar* $v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (1,2,0),\ v_3 = (1,0,0)$ *e vamos construir uma base ortonormal em relação ao produto interno usual de* $\mathbb{R}^3$*, a partir de* B*.*
$w_1 = v_1 = (1,1,1)$ *e* $\|w_1\| = \sqrt{3}$
$w_2 = v_2 - \dfrac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1 = (1,2,0) - \dfrac{\langle (1,2,0),(1,1,1)\rangle}{3}(1,1,1) = (1,2,0) - \dfrac{3}{3}(1,1,1) = (0,1,-1)$
e $\|w_2\| = \sqrt{2}$
$w_3 = v_3 - \dfrac{\langle v_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1 - \dfrac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2}w_2 = (1,0,0) - \dfrac{\langle (1,0,0),(1,1,1)\rangle}{3}(1,1,1) - \dfrac{\langle (1,0,0),(0,1,-1)\rangle}{2}(0,1,-1) = (1,0,0) - 1/3(1,1,1) - 0/2(0,1,-1) = (2/3, -1/3, -1/3)$
e $\|w_3\| = \sqrt{6}/3$

Logo, $B_1 = \{(1,1,1), (0,1,-1), (2/3,-1/3,-1/3)\}$ *é uma base ortogonal. Normalizando os vetores, encontramos uma base ortonormal:*
$B_1 = \{(\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3), (0, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2), (\sqrt{6}/3, -\sqrt{6}/6, -\sqrt{6}/6)\}$.

Exercício 6.2 *Seja* $B = \{(1,0), (0,1)\}$ *a base canônica do* $\mathbb{R}^2$*. Construa, a partir de* B*, uma base ortonormal para* $\mathbb{R}^2$ *em relação ao produto interno dado por:*
$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = 2x_1x_2 + y_1y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$.

6.5 Complemento ortogonal

Definição 6.7 *Seja* S *um subconjunto não vazio de um espaço* V *com produto interno. O complemento ortogonal de* S *é o conjunto dos vetores de* V *que são ortogonais a todos os vetores de* S*.*
Notação: $S^\perp = \{v \in V\ :\ v \perp w \text{ para todo } w \in S\}$

Exemplo 6.11 *Para* $\mathbb{R}^2$ *com o produto interno usual e* $S = \{(1,2)\}$*, temos*
$S^\perp = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ \langle (x,y),(1,2)\rangle = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x + 2y = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x = -2y\} = \{(-2y, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ y \in \mathbb{R}\}$.

Teorema 6.4 *Seja* V *um espaço vetorial com produto interno. Então:*
a) $S^\perp$ *é um subespaço de* V*, para cada subconjunto não vazio* S *de* V*;*
b) $V = W \oplus W^\perp$*, para cada subespaço* W *de* V*.*

Exercício 6.3 *Página 247 do livro do Boldrini - exercícios* 2, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13.
Página 315 do livro do Lipschutz - exercícios 6.3, 6.4, 6.5, 6.14, 6.15, 6.16, 6.17 6.18, 6.26, 6.27.
No livro do Lipschutz, o produto interno dos vetores v *e* w *no* $\mathbb{R}^2$ *e* $\mathbb{R}^3$ *é denotado também por* $v{\cdot}w$*.*

6.6 Operadores Auto-adjuntos ou Hermitianos

Definição 6.8 *Seja T um operador linear sobre um espaço com produto interno V. Dizemos que T é um operador auto-adjunto ou hermitiano se $\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle$.*

Exemplo 6.12 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (2x + y, x - 3y)$ e vamos considerar o produto interno usual do $\mathbb{R}^2$. Para $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ temos:*
$\langle T(x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = \langle (2x_1 + y_1, x_1 - 3y_1), (x_2, y_2)\rangle = 2x_1x_2 + y_1x_2 + x_1y_2 - 3y_1y_2$ *e*
$\langle (x_1, y_1), T(x_2, y_2)\rangle = \langle (x_1, y_1), (2x_2 + y_2, x_2 - 3y_2)\rangle = x_12x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + y_1(-3)y_2 = 2x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 - 3y_1y_2$.
Logo, para todos $u, v \in \mathbb{R}^2$ vale $\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle$, ou seja, T é um operador hermitiano.

Teorema 6.5 *Seja $B = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base ortonormal de um espaço vetorial com produto interno V e seja T um operador hermitiano sobre V. Então:*
a) $[T]_B = (a_{ij})$ tal que $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$;
b) a diagonal de $[T]_B$ consiste de números reais;
c) se V é um espaço vetorial real então $[T]_B$ é uma matriz simétrica.
Demonstração: *a) Como B é uma base ortonormal então $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ de $i \neq j$ e $\langle v_i, v_i\rangle = 1$. Como B é uma base de V, cada vetor $T(v_i)$ se escreve como combinação linear dos vetores de B:*
$T(v_i) = a_{1i}v_1 + \cdots + a_{ji}v_j + \cdots + a_{ni}v_n$. *Assim,*
$$\langle T(v_i), v_j\rangle = \langle a_{1i}v_1, v_j\rangle + \cdots + \langle a_{ji}v_j, v_j\rangle + \cdots + \langle a_{ni}v_n, v_j\rangle =$$
$$= a_{1i}\langle v_1, v_j\rangle + \cdots + a_{ji}\langle v_j, v_j\rangle + \cdots + a_{ni}\langle v_n, v_j\rangle = a_{ji};$$
$T(v_j) = a_{1j}v_1 + \cdots + a_{ij}v_i + \cdots + a_{nj}v_n$. *Assim,*
$$\langle v_i, T(v_j)\rangle = \langle v_i, a_{1j}v_1\rangle + \cdots + \langle v_i, a_{ij}v_i\rangle + \cdots + \langle v_i, a_{nj}v_n\rangle =$$
$$= \overline{a}_{1j}\langle v_i, v_1\rangle + \cdots + \overline{a}_{ij}\langle v_i, v_i\rangle + \cdots + \langle \overline{a}_{nj}v_i, v_n\rangle = \overline{a}_{ij}.$$
Como T é um operador hermitiano então $\langle T(v_i), v_j\rangle = \langle v_i, T(v_j)\rangle$. Logo, $a_{ji} = \overline{a}_{ij}$, para todos i, j.
b) Por (a), $a_{ii} = \overline{a}_{ii}$. Logo, a_{ii} é um número real.
c) Se todo $a_{ij} \in \mathbb{R}$ então $a_{ij} = \overline{a}_{ij} = a_{ji}$, ou seja, $[T]_B = (a_{ij})$ é uma matriz simétrica. ■

Exercício 6.4 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = ((2x - y + 3z, -x + y, 3x - 2z)$ e vamos considerar o produto interno usual do $\mathbb{R}^3$.*
1*) Verifique que T é hermitiano;*
2*) Encontre a matriz de T em relação à base $B = \{(1, 0, 0), (0, 3/5, 4/5), (0, -4/5, 3/5)\}$;*
3*) Encontre a matriz de T em relação à base $B_1 = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$.*

Teorema 6.6 *Seja T um operador hermitiano sobre V. Então:*
a) $\langle T(v), v\rangle$ é um número real;
b) todos os autovalores de T são números reais;
c) autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais;
d) existe uma base ortonormal de V formada por autovetores.

Em vista do ítem (d) do teorema anterior, se T é um operador hermitiano então T é diagonalizável, e a matriz de T em relação à base ortonormal formada por autovetores é uma matriz diagonal, onde a diagonal da matriz consiste de autovalores.

Exemplo 6.13 *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (6x - 3y, -3x - 2y, 15z)$.
T é hermitiano, pois para $u, v \in {}^3,\ u = (x, y, z),\ v = (x_1, y_1, z_1)$,
$\langle (T(u), v\rangle = \langle (6x - 3y, -3x - 2y, 15z), (x_1, y_1, z_1)\rangle = 6xx_1 - 3yx_1 + -3xy_1 - 2yy_1 + 15zz_1$;
$\langle (u, T(v)\rangle = \langle (x, y, z), (6x_1 - 3y_1, -3x_1 - 2y_1, 15z_1)\rangle = 6xx_1 - 3xy_1 + -3yx_1 - 2yy_1 + 15zz_1$.
Logo, $\langle (T(u), v\rangle = \langle (u, T(v)\rangle$*, portanto, T é hermitiano.*
Vamos encontrar uma base ortonormal formada por autovetores.
Tomando $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ *encontramos*
$[T]_B = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$ *e* $P(\lambda) = det \begin{bmatrix} 6-\lambda & -3 & 0 \\ -3 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 15-\lambda \end{bmatrix} = \cdots = (7 - \lambda)(-3 - \lambda)(15 - \lambda)$
Assim, os autovalores são $\lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = -3$ *e* $\lambda_3 = 15$.
Para $\lambda_1 = 7$*, temos* $\begin{cases} 6x - 3y &= 7x \\ -3x - 2y &= 7y \\ 15z &= 7z \end{cases}$ *Assim,* $z = 0$ *e* $x = -3y$ *e os autovetores são da forma* $(-3y, y, 0),\ y \neq 0$*. Seja* $v_1 = (-3, 1, 0)$.
Para $\lambda_2 = -3$*, temos* $\begin{cases} 6x - 3y &= -3x \\ -3x - 2y &= -3y \\ 15z &= -3z \end{cases}$ *Assim,* $z = 0$ *e* $y = 3x$ *e os autovetores são da forma* $(x, 3x, 0),\ x \neq 0$*. Seja* $v_2 = (1, 3, 0)$.
Para $\lambda_3 = 15$*, temos* $\begin{cases} 6x - 3y &= 15x \\ -3x - 2y &= 15y \\ 15z &= 15z \end{cases}$ *Assim,* $x = y = 0$ *e z é qualquer. Os autovetores são da forma* $(0, 0, z),\ z \neq 0$*. Seja* $v_3 = (0, 0, 1)$.
Tomando os autovetores $w_i = \frac{1}{|v_i|}$*, temos* $w_1 = (-3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10}, 0),\ w_2 = (1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10}, 0)$ *e* $w_3 = (0, 0, 1)$*, verificamos que são ortogonais:*
$\langle w_1, w_2\rangle = \langle (-3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10}, 0), (1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10}, 0)\rangle = -3/\sqrt{10}\cdot 1/\sqrt{10} + 1/\sqrt{10}\cdot 3/\sqrt{10} + 0\cdot 0 = 0$;
$\langle w_1, w_3\rangle = \cdots = 0$;
$\langle w_2, w_3\rangle = \cdots = 0$.
Como $w_1,\ w_2$*, e* w_3 *são três vetores unitários e ortogonais, então formam uma base ortonormal de* $\mathbb{R}^3$.

Exercício 6.5 *Nos casos abaixo, verifique se T é um operador hermitiano, considerando o produto interno usual. Caso seja, encontre uma base formada por autovetores.*
a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = (2x + y, x + 2y)$;
b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = (3x + 6y, 6x - 2y)$;
c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = (2x - y, x - 2y)$;
d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (x, 2y + z, y + 2z)$;
e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$.

7 Apêndice

7.1 Corpos

Um corpo é um conjunto não vazio $\mathbb{K}$ *munido de duas operações "+"e "·"tais que*

1. $\forall a, b \in \mathbb{K},\ a+b \in \mathbb{K}$ *e* $a \cdot b \in \mathbb{K}$
2. $\forall a, b \in \mathbb{K},\ a+b = b+a$ *e* $a \cdot b = b \cdot a$
3. $\forall a, b, c \in \mathbb{K},\ (a+b)+c = a+(b+c)$ *e* $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
4. $\exists\ 0 \in \mathbb{K}$ *tal que* $a+0 = 0+a = a,\ \forall a \in \mathbb{K}$
5. $\exists\ 1 \in \mathbb{K}$ *tal que* $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \forall a \in \mathbb{K}$
6. $\forall a \in \mathbb{K}\ \exists\ b \in K$ *tal que* $a+b=0$ *(notação:* $b=-a$*)*
7. $\forall a \in \mathbb{K},\ a \neq 0,\ \exists\ b \in \mathbb{K}$ *tal que* $a \cdot b = 1$ *(notação:* $b = a^{-1}$*)*
8. $\forall a, b, c \in \mathbb{K},\ a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

Exemplo 7.1 *Os conjuntos* $\mathbb{R}$ *(conjunto dos números reais),* $\mathbb{C}$ *(conjunto dos números complexos),* $\mathbb{Q}$ *(conjunto dos números racionais ou fracionários) são corpos com as operações usuais de adição e multiplicação.*

Exemplo 7.2 *O conjunto* $\mathbb{Z}$ *dos números inteiros, com as operações usuais de adição e multiplicação, não é um corpo pois* $2 \in \mathbb{Z}$ *mas não existe* $b \in \mathbb{Z}$ *tal que* $2b = 1$.

Exemplo 7.3 *O conjunto* $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ *com as operações:* $0+0=0;\ 0+1=1+0=1;\ 1+1=0;\ 0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0;\ 1 \cdot 1 = 1$ *é um corpo.*

O exemplo anterior é denominado o corpo dos inteiros módulo 2. Para cada número primo existe um corpo com p elementos, chamado de corpo dos inteiros módulo p e denotado por $\mathbb{F}_p = \{0, 1, 2, ..., p-1\}$.
No corpo $\mathbb{F}_p$ *estão definidas as operações:* $a+b=c$ *onde c é o resto da divisão de* $a+b$ *por p;* $a \cdot b = d$ *onde d é o resto da divisão de* $a \cdot b$ *por p.*

Exemplo 7.4 *No corpo* $\mathbb{F}_7$, $3+4=0,\ 5+5=3,\ 2+2=4,\ 3 \cdot 5 = 1,\ 6 \cdot 6 = 1,\ 4 \cdot 5 = 6$.

Outros exemplos de corpos podem ser encontrados no estudo de Estruturas Algébricas.

7.2 Polinômio Minimal

Denotamos por $K[t]$ *o conjunto dos polinômios com coeficientes em* K*. Assim, escrevemos* $p \in K[t]$ *(ou* $p(t) \in K[t]$ *) para dizer que p é um polinômio sobre* K *ou seja, um polinômio com coeficientes em* K*.*

Definição 7.1 *Um polinômio* $p \in K[t]$ *de grau maior ou igual a 1 é redutível sobre um corpo* K *se* $p = fg$*, onde f e g são polinômios sobre* K *de graus maiores ou iguais a 1. Caso p não seja redutível dizemos que p é irredutível.*

Exemplo 7.5 $p(t) = t^2 + 1$ *é irredutível sobre* $\mathbb{R}$*, mas é redutível sobre* $\mathbb{C}$ *pois* $t^2 + 1 = (t+i)(t-i)$.

Teorema 7.1
1) Se $f,\ g,\ h\ \in K[t]$ e $f = gh$ então o grau de f é igual à soma dos graus de g e de h.
2) Todo polinômio de grau 1 é irredutível.
3) Os únicos polinômios irredutíveis sobre $\mathbb{C}$ são os de grau 1.

Definição 7.2 *Uma raiz de um polinômio $p(t)$ é um elemento a tal que $p(a) = 0$.*
Por exemplo, i é raiz do polinômio $p(t) = t^2 + 1$

Teorema 7.2
1) Se K é um corpo e $a \in K$ uma raiz de $p(t) \in K(t)$ então $p(t) = (t - a)g(t)$ para algum $g(t) \in K[t]$.
2) Se $p(t) \in \mathbb{C}$ é um polinômio de grau n então $p(t) = a(t - a_1)(t - a_2)\cdots(t - a_n)$ onde $a_1,\ a_2,\cdots,a_n$ são as raizes de $p(t)$.
3) Se $a + bi$ é uma raiz do polinômios $p(t) \in \mathbb{R}$ então $a - bi$ também é raiz de $p(t)$.
4) Se p é irredutível sobre $\mathbb{R}$ então p tem grau 1 ou 2.

Se A é uma matriz $n\times n$ e $p(t)$ é um polinômio então $p(A)$ é a matriz $n\times n$ obtida pela substituição de t por A e do termo constante a_0 por $a_0 I$, onde A^m é o produto de A por A m vezes e I é a matriz identidade $n\times n$.

Exemplo 7.6 *Para* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *e* $p(t) = t^2 + 2t - 3$ *então* $p(A) = A^2 + 2A - 3I = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, *sendo I a matriz identidade 2×2.*

Teorema 7.3 *Se $p(t)$ é o polinômio característico da matriz A (ou de um operador linear T com $[T]_B = A$) então $p(A)$ é a matriz nula.*

Definição 7.3 *Dizemos que um polinômio $p(t) \in K[t]$ é mônico se o coeficiente de maior grau em t é 1.*
Por exemplo, $p(t) = t^3 - 2$ é mônico.

Teorema 7.4 *Se A uma matriz quadrada então existe um único polinômio mônico $p(t)$ tal que $p(t)$ é polinômio de menor grau satisfazendo $p(A) = O$.*

Definição 7.4 *Um polinômio mônico satisfazendo as condições do teorema anterior é chamado de polinômio minimal da matriz A.*

Teorema 7.5 *O polinômio característico e o polinômio minimal têm os mesmos fatores irredutíveis.*

Em vista do teorema anterior, temos que as raizes do polinômio minimal são justamente os autovalores.

Exemplo 7.7 *Se $p(t) = (t - 1)^2(t + 2)^3$ é o polinômio característico de uma matriz A então o polinômio minimal de A será um seguintes: $p_1(t) = (t - 1)(t + 2)$, $p_2(t) = (t - 1)(t + 2)^2$, $p_3(t) = (t - 1)(t + 2)^3$, $p_4(t) = (t - 1)^2(t + 2)$, $p_5(t) = (t - 1)^2(t + 2)^2$, $p_6(t) = (t - 1)^2(t + 2)^3$.*

7.3 Forma de Jordan

Embora um operador linear T nem sempre seja diagonalizável, veremos que podemos ter $[T]_B$ em uma forma também simples.

Um bloco de Jordan é uma matriz quadrada da forma:

$$J_n(a) = [a_{ij}]_{n\times n} \text{ onde } a_{ij} = \begin{cases} a & se\ i = j \\ 1 & se\ j = i+1 \\ 0 & nos\ outros\ casos \end{cases}$$

Exemplo 7.8 $J_4(5) = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ *e* $J_2(-2) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Dizemos que uma matriz A está na forma de Jordan se A é uma matriz "diagonal de blocos"onde cada elemento de sua "diagonal"é um bloco de Jordan.

Exemplo 7.9 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & 0 & 0 \\ - & - & - & + & - & - \\ 0 & 0 & 0 & | & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_3(3) & O_{3\times 2} \\ O_{2\times 3} & J_2(-4) \end{bmatrix}$

Já vimos que se $A_{n\times n}$ é uma matriz quadrada (respectivamente, $T : V \to V$ um operador linear) e se λ um autovalor de A (resp. de T), então o conjunto E_λ dos autovetores associados a λ é um espaço vetorial, chamado o autoespaço de λ.

Definição 7.5 *A multiplicidade geométrica de um autovalor λ é a dimensão de E_λ. A multiplicidade algébrica de λ é a multiplicidade de λ como raiz do polinômio característico de A. Isto é, se $p(t) = (t-\lambda)^r q(t)$ e $q(\lambda) \neq 0$ então a multiplicidade geométrica de λ é igual a n.*

Teorema 7.6 *Seja $T : V \to V$ um operador linear e sejam $p(t) = (t-\lambda_1)^{r_1}(t-\lambda_2)^{r_2}\cdots(t-\lambda_n)^{r_n}$, $m(t) = (t-\lambda_1)^{s_1}(t-\lambda_2)^{s_2}\cdots(t-\lambda_n)^{s_n}$ os polinômios característico e minimal de T, respectivamente, onde os λ_i são os autovalores distintos de T. Então existe uma base B de V tal que $[T]_B$ é uma matriz "diagonal de blocos"cujos blocos da diagonal são da forma $J_i(\lambda_j)$ tais que para cada λ_j:*
1) Existe, pelo menos um bloco $J_i(\lambda_j)$ de ordem s_j. Os outros blocos $J_i(\lambda_j)$ são de ordem menor ou igual a s_j.
2) A soma das ordens dos blocos $J_i(\lambda_j)$ é igual a r_j.
3) O número de blocos $J_i(\lambda_j)$ é igual à multiplicidade geométrica de λj.
A matriz $[T]_B$ é chamada a chamada a matriz de Jordam de T.

Bibliografia

1. BOLDRINI, J. L. e outros. **Álgebra linear**. 3ª Ed. São Paulo: Harper e Row do Brasil, 1986.

2. LIPSCHUTZ, S. **Álgebra linear**. 3ª Ed. São Paulo: Editora Makron Books, 1994.

3. COELHO, F. U., LOURENÇO, M. L. **Um curso de álgebra linear**. 2ª Ed. São Paulo: EDUSP, 2005.

Índice