Teoria dos Erros

1. *Introdução*

As grandezas físicas são determinadas experimentalmente por medidas ou combinações de medidas. Essas medidas tem uma incerteza intrínseca que advém das características dos equipamentos utilizados na sua determinação e também do operador. Assim, a experiência mostra que, sendo uma medida repetida várias vezes com o mesmo cuidado e procedimento pelo mesmo operador ou por vários operadores, os resultados obtidos não são, em geral, idênticos.

Ao fazermos a medida de uma grandeza física achamos um número que a caracteriza. Quando este resultado vai ser aplicado, é freqüentemente necessário saber com que confiança podemos dizer que o número obtido representa a grandeza física. Deve-se, então, poder expressar a incerteza de uma medida de forma que outras pessoas possam entende-las e para isso utiliza-se de uma linguagem universal. Também deve-se utilizar métodos adequados para combinar as incertezas dos diversos fatores que influem no resultado.

A maneira de se obter e manipular os dados experimentais, com a finalidade de conseguir estimar com a maior precisão possível o valor da grandeza medida e o seu erro, exige um tratamento adequado que é o objetivo da chamada "Teoria dos Erros", e que será abordada aqui na sua forma mais simples e suscinta.

2. *Algarismos significativos*

Vamos considerar uma situação hipotética em que temos um objeto AB e desejamos medi-lo com uma régua graduada em centímetros, como se mostra na Figura 1.

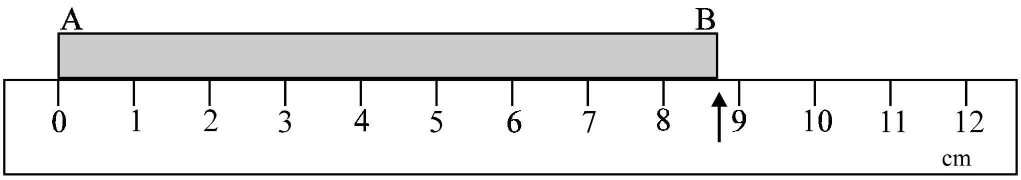

Figura 1 - Medida de um objeto com uma régua graduada em centímetros

Na leitura do comprimento do objeto AB, podemos afirmar com certeza que ele possui 8 cm exatos, mas a fração de 1 cm a mais dos 8 cm não podemos afirmar com certeza qual é. Esta fração não se pode medir, mas pode ser avaliada ou estimada pelo experimentador dentro de seus limites de percepção.

Se 3 experimentadores fossem anotar o comprimento de AB:

1) Todos os três anotariam os 8 cm exatos.
2) Mas poderiam avaliar a fração do 1 cm restante de formas diferentes, como:

fração de 1 cm = 0,7 cm
fração de 1 cm = 0,8 cm
fração de 1 cm = 0,6 cm

e nenhum dos três estariam errados.

Logo o comprimento de AB poderia ser anotado como sendo:

AB = 8 cm + 0,7 cm, ou
AB = 8 cm + 0,8 cm, ou
AB = 8 cm + 0,6 cm

Se, por exemplo, um quarto experimentador anotasse a fração do 1 cm como sendo 0,75 cm, que sentido se poderia atribuir a esse resultado?

Ao se medir com uma régua graduada em centímetro, tem sentido avaliar décimos de centímetros (milímetros) mas é discutível ou mesmo inaceitável avaliar centésimos ou frações menores. Em medições, é costume fazer estimativas com aproximações até décimos da menor divisão da escala do instrumento. Estimar centésimos ou milésimos da menor divisão da escala está fora da percepção da maioria dos seres humanos.

Se tomarmos a medida que representa o comprimento do objeto AB como 8,7 cm, observamos que ela apresenta 2 dígitos ou algarismos. Um, o 8, que representa a medida exata, isenta de qualquer dúvida, e o outro, o 7, que resultou da medida da fração de 1 cm avaliada na escala, logo, é no algarismo 7 que residirá a dúvida ou incerteza da medida do comprimento.

Podemos então, dizer que as medidas realizadas pelos três experimentadores é composta de 1 algarismo exato, (não duvidoso, o 8) e o algarismo duvidoso (onde reside a incerteza da leitura, o 7 ou o 8 ou o 6).

Definimos então, **algarismos significativos** de uma medida como todos os algarismos que temos certeza (os exatos) e mais um duvidoso (sempre o algarismo duvidoso é o último da direita).

Exemplos:

15,4 cm: temos 3 algarismos significativos (1 e 5 são exatos e 4 é o duvidoso)
21,31 m/s: temos 4 algarismos significativos (2,1 e 3 são exatos e 1 é o duvidoso)
8,0 m/s^2: temos 2 algarismos significativos (8 é o exato e 0 é o duvidoso)
6 N: temos 1 algarismo significativo e ele próprio é o duvidoso
1,6 x 10^{-19}: temos 2 algarismos significativos

É importante salientarmos aqui, que a quantidade de algarismos significativos de uma determinada medida não se altera quando de uma transformação de unidades. Por exemplo, na medida o objeto AB:

8,7 cm: 2 algarismos significativos
8,7 x 10^{-3} m = 0,0087 m: 2 algarismos significativos
8,7 x 10^{-5} km = 0,000087 km: 2 algarismos significativos
8,7 x 10 mm = 87 mm: 2 algarismos significativos

Os dígitos ou algarismos de um número contam-se da esquerda para a direita, a partir do primeiro não nulo, e são significativos todos os exatos e somente o primeiro duvidoso.

3. *Incertezas*

É a fração avaliada da menor divisão da escala, isto é, no dígito duvidoso é que reside a incerteza da medida. Se tomarmos, como exemplos, a medida do objeto AB como sendo 8,6 cm, sendo o algarismo 6 o duvidoso, isto significa que a medida AB poderia ser 8,5 ou 8,7 cm; 8,4 ou 8,8 cm. No primeiro caso a amplitude da incerteza é ±0,1 cm e no segundo ±0,2 cm. De forma geral, a amplitude da incerteza é fixada pelo experimentador. Caso ele faça opção para a amplitude de ±0,2, a medida do objeto AB = (8,6 ±0,2) cm. Desta forma o experimentador nos revela que a medida é confiável dentro dos limites de 8,4 a 8,8 cm, mas que o valor mais provável da medida, na sua opinião, é AB = 8,6 cm.

A incerteza de uma medida pode ser classificada em dois tipos:

a) Incerteza absoluta

Define-se como incerteza absoluta de uma medida, a amplitude de incertezas fixada pelo experimentador, com o sinal ±. A incerteza absoluta, depende da perícia do experimentador, de sua segurança, da facilidade de leitura da escala e do próprio instrumento utilizado na medição. Apesar de não ser norma, costuma-se adotar como incerteza absoluta, o valor da metade da menor divisão da escala tomado em módulo. Na medida AB=(8,6 ± 0,2) cm, 0,2 cm é a incerteza absoluta.

b) Incerteza Relativa

A incerteza relativa é igual ao quociente entre a incerteza absoluta e a medida da grandeza e é, freqüentemente expressa em termos percentuais. Por exemplo, para a medida AB = (8,6 ± 0,2) cm, temos:

Incerteza absoluta = ±0,2 cm

Incerteza relativa = (±0,2/8,6) = ±0,023 ou 2,3%

Poderíamos dizer que quanto menor a incerteza relativa, maior a "qualidade" da medida. Quando o valor de uma grandeza é obtido a partir de uma medida única, costuma-se exprimi-lo com a respectiva incerteza absoluta.

4. *Arredondamento*

Um número é arredondado para outro, com o número de algarismos significativos desejados, pelo cancelamento de um ou mais algarismos da direita para a esquerda. Duas regras podem ser utilizadas neste caso:

1. "Quando o algarismo suprimido é menor do que 5, o imediatamente anterior permanece igual."
2. "Quando o algarismo suprimido é maior ou igual a 5, o imediatamente anterior é acrescido de uma unidade."

Exemplos:

L = 2,143 m $\Rightarrow$ L = 2,14 m, depois de arredondado

L = 0,0506 m $\Rightarrow$ L = 0,051 m, depois de arredondado

5. *Flutuações nas medidas*

Ao se realizar várias medidas experimentais, de uma certa grandeza física, temos como objetivo alcançar o seu "valor verdadeiro" ou "valor real". Mas atingir este objetivo é praticamente impossível. Pode-se chegar, após uma série de medidas, a um valor que mais se aproxima do valor real, ou seja, ao valor mais provável de uma grandeza medida.

O "valor real" seria aquele obtido teoricamente por meio de algum modelo "exato" (que incluísse todos os efeitos físicos) ou então aquele obtido por meio de uma medida experimental "perfeita". Ambos os casos são situações ideais não alcançadas na prática.

Se conhecermos o valor real da grandeza e o compararmos com o valor medido podemos definir o que denominamos "Erro".

"Erro é a diferença entre o valor medido e o verdadeiro valor da grandeza"

"Erro = valor medido – valor real"

As flutuações que acompanham todas as medidas são as causas que limitam o objetivo de se atingir o valor verdadeiro da grandeza. E estas flutuações ou erros são de origem sistemáticas e de origem acidentais ou aleatórias.

5.1. Erros sistemáticos

Chamam-se erros sistemáticos as flutuações originárias de falhas nos métodos empregados ou de falhas do operador.

Por exemplo:

- Uma régua calibrada errada ou na escala de um instrumento
- Um relógio descalibrado que sempre adianta ou sempre atrasa
- A influência de um potencial de contato numa medida de voltagem
- O tempo de resposta de um operador que sempre se adianta ou se atrasa nas observações
- O operador que sempre superestima ou sempre subestima os valores das medidas

Nas medidas em que o valor verdadeiro da grandeza é desconhecido, as flutuações de origem sistemática quase sempre passam desapercebidas. Por sua natureza estes erros tem amplitudes constantes, e influem sempre num mesmo sentido, ou para mais, ou para menos. É o caso da dilatação de uma régua; a extensão de "1 mm" marcado na escala não corresponde realmente a 1 mm. Medidas com esta régua ficarão sujeitas a erros sistemáticos que influirão no resultado sempre num mesmo sentido e com a mesma amplitude.

5.2. Erros acidentais ou aleatórios

Chamam-se erros acidentais ou aleatórios aqueles cujas causas são fortuitas, acidentais e variáveis. Suas amplitudes estão compreendidas dentro da aproximação dos instrumentos. Um operador, repetindo diversas vezes a medida de uma grandeza física, mesmo que tenha o máximo cuidado, pode não ter valores repetidos iguais. Isto ocorre devido a flutuações que podem estar relacionadas:

- à imperícia do operador;
- à variação na capacidade de avaliação (p. ex.,número de medidas efetuadas, cansaço);
- ao erro de paralaxe na leitura de uma escala;
- a reflexos variáveis do operador (p. ex., no caso de apertar um cronômetro ou de pressionar o tambor de um micrômetro)
- erro cometido na avaliação da menor divisão da escala.

Os erros acidentais ou aleatórios podem ser minimizados pela perícia do operador, mas jamais eliminados por completo. **Aos erros acidentais ou aleatórios são aplicados a teoria dos erros.**

5.3. Erros grosseiros

Erros grosseiros são aqueles provenientes de falhas grosseiras do experimentador, como:

- engano de leitura – o experimentador lê 10 no lugar de 100
- troca de unidades

A maneira de eliminar este tipo de erro é sendo cuidadoso ao realizar as medidas.

6. *Teoria dos erros aplicada a um conjunto de medidas experimentais*

Quando realizamos medidas experimentais obtemos uma série de valores que em geral não são idênticos. Nosso objetivo é saber qual deve ser o valor mais provável da grandeza medida, qual a diferença entre este valor e cada valor medido em particular. Com a finalidade de representar matematicamente estes efeitos que define-se quantidades demostradas pela estatística.

6.1. Valor médio de uma grandeza

Sejam $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ as n medidas realizadas de uma mesma grandeza física X. O valor médio desta grandeza denotado por $\overline{X}$ é definido pela média aritmética dos valores medidos, ou seja,

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Deste modo, $\overline{X}$ representa o valor mais provável da grandeza medida. Ao se realizar várias medidas, os valores obtidos tendem a estar mais próximos deste valor. O valor médio é o que melhor representa o "valor real" da grandeza.

A média aritmética tem duas características importantes em estatística:

a) a soma algébrica dos desvios de cada um dos valores medidos, ($X_i - \overline{X}$), calculados com relação a média aritmética é zero.

b) A soma dos quadrados dos desvios calculados com relação a média aritmética, é mínima.

6.2. Desvios

Não se pode afirmar que o valor mais provável seja o valor real da grandeza. Assim, representando-se uma medida qualquer da grandeza X por X_i, não se pode dizer que a diferença

($X_i - \overline{X}$) seja o erro da medida X_i. Neste caso quando se conhece o valor mais provável, não se fala em "erro", mas sim em Desvio ou Discrepância da medida.

Desvio é a diferença entre um valor medido e o valor adotado que mais se aproxima do valor real (em geral o valor médio).

Se representarmos por "d_i" , o desvio de cada medida em relação ao valor médio, teremos:

$$d_1 = X_1 - \overline{X}$$
$$d_2 = X_2 - \overline{X}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$d_i = X_i - \overline{X}$$

7. *Dispersão das medidas em relação ao valor médio*

É interessante saber de quanto as medidas individuais X_i se afastam, em média, do valor médio, ou seja, de que maneira as medidas X_i se distribuem em torno do valor médio. A esse fato denominamos "dispersão". Para medir a dispersão são utilizadas algumas propriedades da série de medidas, tais como o Desvio médio, Desvio Relativo, a Variância e o Desvio Padrão.

7.1. Desvio médio (δ)

Desvio médio é a soma dos módulos dos desvio de cada medida em relação a média pelo número de medidas, ou seja,

$$\delta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|X_i - \overline{X}\right|$$

7.2. Desvio relativo (d_r)

O desvio relativo é definido como a razão entre o desvio médio e o valor médio da grandeza, ou seja,

$$d_r = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|X_i - \overline{X}\right|}{\overline{X}}$$

O desvio relativo é geralmente dado em termos percentuais. Ele representa em porcentagem, o quanto o valor medido difere do valor médio.

7.3. Variância

A variância é definida como a média aritmética dos quadrados dos desvios de todos os valores da grandeza, em relação ao valor médio, ou seja,

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

7.4. Desvio padrão

O desvio padrão é simplesmente a raiz quadrada da variância e portanto expresso na mesma unidade da grandeza medida:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$$

Este valor representa uma estimativa da dispersão em torno do valor médio quando se tem poucos valores (uma amostra) de um universo maior de valores (população).

Nesta disciplina, apesar de algumas regras existentes e não bem definidas, utilizaremos a tendência geral de indicar o desvio padrão com 2 algarismos significativos, além dos zeros à esquerda, apesar de em alguns casos ser necessário utilizar 1 algarismo.

Exemplos: Os valores obtidos são:

$$\overline{X} = 0{,}0000543268\, m \quad e \quad s = 0{,}0000002315\, m$$

Na forma correta: $\overline{X} = 0{,}00005433\, m \quad e \quad s = 0{,}00000023\, m$

8. <u>*Propagação de erros*</u>

Muitas grandezas físicas não podem ser medidas diretamente e são obtidas por meio de operações com outras medidas. Se desejarmos medir a massa média de um sistema por meio de várias medidas força e aceleração, utilizaremos,

$$\overline{M} = \frac{\Delta F}{\Delta a} \ ,$$

mas, tanto ΔF quanto Δa, são afetadas de desvios e na divisão ($\Delta F / \Delta a$) tais desvios se combinarão e afetarão o valor da massa média. Desta forma, quando se deseja relacionar grandezas que contém desvios tem-se a propagação de "erros" ou "desvios". As equações aqui listadas são completamente demostradas pela estatística e cálculo diferencial integral e que não cabem fazê-las neste momento do curso.

Sejam as medidas de certas grandezas físicas *a, b* e *c* e seus respectivos desvios padrões s_a, s_b e s_c.

1. Soma ou subtração

Valor médio da soma ou subtração: $\overline{S} = \overline{a} \pm \overline{b}$

Desvio padrão da soma ou subtração: $s_s = \pm\sqrt{s_a{}^2 + s_b{}^2}$

2. Produto

Valor médio do produto: $\overline{P} = \overline{a}.\overline{b}.\overline{c}$

Desvio Padrão do produto: $s_P = \pm \left[\overline{P} \left(\frac{s_a{}^2}{\overline{a}^2} + \frac{s_b{}^2}{\overline{b}^2} + \frac{s_c{}^2}{\overline{c}^2} \right)^{1/2} \right]$

3. Quociente

Valor médio do quociente: $\overline{Q} = \frac{\overline{a}}{\overline{b}}$

Desvio Padrão do quociente: $s_Q = \pm \left[\overline{Q} \left(\frac{s_a{}^2}{\overline{a}^2} + \frac{s_b{}^2}{\overline{b}^2} \right)^{1/2} \right]$

4. Caso geral

$$\overline{V} = \overline{a}^{\,x}.\overline{b}^{\,y}.\overline{c}^{\,z}$$

onde x, y e z são valores positivos ou negativos.

$$s_V = \pm\left[V\left(\frac{x^2.s_a{}^2}{\overline{a}^2}+\frac{y^2.s_b{}^2}{\overline{b}^2}+\frac{z^2.s_c{}^2}{\overline{c}^2}\right)^{1/2}\right]$$

5. A grandeza V é uma função de múltiplo constante

$$\overline{V} = G.\overline{a}\ ,$$

onde G é o fator constante.

$$s_V = \pm\left[\overline{V}\left(\frac{s_a}{\overline{a}}\right)\right]$$

6. Potência constante

$$\overline{V} = \overline{a}^{\,p}$$

onde p é uma potência constante.

$$s_V = \pm\left[\overline{V}.p.\left(\frac{s_a}{\overline{a}}\right)\right]$$

7. Combinação linear

$$\overline{V} = c_1.\overline{a} + c_2.\overline{b}$$

onde c_1 e c_2 são constantes.

$$s_V = \pm\left[\left(c_1{}^2.s_a{}^2 + c_2{}^2.s_b{}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

8. Soma de potências

$$\overline{V} = \overline{a}^{\,p} + \overline{b}^{\,q}$$

onde p e q são constantes.

$$s_V = \pm\left[\left((p.\overline{a}^{\,p-1})^2.s_a{}^2 + (q.\overline{b}^{\,q-1})^2.s_b{}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

9. Relação logarítmica

$$\overline{V} = p.\log(\overline{a})$$

onde p é constante.

$$s_V = \pm\left[p.\left(\frac{s_a}{\overline{a}}\right)\right]$$

Exemplo: Suponha que você deseja medir o volume de água que pode conter em uma pia. Para isso foram realizadas 10 medidas do comprimento (C), da largura (L) e da profundidade (P) como se mostra no Quadro 1.

Utilizou-se para os cálculos da média e do desvio padrão de cada dimensão da pia as seguintes equações:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad\qquad s_X = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$$

Forma correta de escrever as grandezas medidas:

$$C = \overline{C} \pm s_C \quad \Rightarrow \quad \text{C} = (54{,}25 \pm 0{,}10)\ \text{cm}$$

$$L = \overline{L} \pm s_L \quad \Rightarrow \quad \text{L} = (30{,}66 \pm 0{,}11)\ \text{cm}$$

$$P = \overline{P} \pm s_P \quad \Rightarrow \quad \text{P} = (16{,}35 \pm 0{,}10)\ \text{cm}$$

Quadro 1 – Valores das grandezas lineares do comprimento, largura e profundidade de uma pia e cálculos auxiliares para determinação do desvio padrão de cada grandeza.

Medidas	C (cm)	L (cm)	P (cm)	$(C_i - \overline{C})^2$ (cm^2)	$(L_i - \overline{L})^2$ (cm^2)	$(P_i - \overline{P})^2$ (cm^2)
1	54,2	30,7	16,3	0,0025	0,0016	0,0025
2	54,4	30,5	16,5	0,0225	0,0256	0,0225
3	54,3	30,8	16,4	0,0025	0,0196	0,0025
4	54,2	30,8	16,2	0,0025	0,0196	0,0225
5	54,1	30,6	16,5	0,0225	0,0036	0,0225
6	54,4	30,7	16,4	0,0225	0,0016	0,0025
7	54,3	30,6	16,3	0,0025	0,0036	0,0025
8	54,1	30,8	16,2	0,0225	0,0196	0,0225
9	54,2	30,5	16,3	0,0025	0,0256	0,0025
10	54,3	30,6	16,4	0,0025	0,0036	0,0025
Somas	542,50	306,60	163,50	0,1050	0,1240	0,1050
Médias	54,25	30,66	16,35	0,01050	0,0124	0,01050
Desvios				0,10247	0,11136	0,10247

Cálculo da área média principal da pia

$$\overline{A} = \overline{C} \,.\, \overline{L} \quad \Rightarrow \quad \overline{A} = (54{,}3 \,.\, 30{,}7) = 1\,667{,}01 \text{ cm}^2$$

Cálculo do desvio padrão da área em relação à média

$$s_A = \pm \left[\overline{A} \left(\frac{s_C{}^2}{\overline{C}^2} + \frac{s_L{}^2}{\overline{L}^2} \right)^{1/2} \right] = \pm\, 6{,}2378 \text{ cm}^2$$

Forma correta de escrever a área:

$$A = \overline{A} \pm s_A \quad \Rightarrow \quad \text{A} = (1667{,}0 \pm 6{,}2) \text{ cm}^2$$

Cálculo do volume médio da pia:

$$\overline{V} = \overline{A} \,.\, \overline{P} \quad \Rightarrow \quad \overline{V} = 27338{,}80 \text{ cm}^3$$

Cálculo do desvio padrão do volume:

$$s_V = \pm \left[\overline{V} \left(\frac{s_A{}^2}{\overline{A}^2} + \frac{s_P{}^2}{\overline{P}^2} \right)^{1/2} \right] = \pm\, 195{,}263 \text{ cm}^3$$

Forma correta de escrever o volume:

$$V = \overline{V} \pm s_V \quad \Rightarrow \quad \text{V} = (27338{,}8 \pm 195{,}3) \text{ cm}^3$$