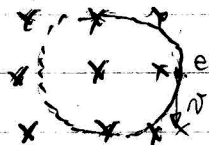


Capítulo IV : Aplicação dos Postulados a Casos simples: spin 1/2 e siste- mas de 2 níveis



$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow$ um elétron com velocidade \vec{v}
na presença campo magnético
 \vec{B} move-se numa trajetória
circular ($q\vec{v}B = m\vec{v}^2/r$)

essa carga circulando por sua vez consiste
numa corrente i , que por sua vez produz
campo magnético $|\vec{B}| = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$

pt uma corrente i numa 'órbita' de área A
definimos o momento de dipolo magnético $\vec{\mu}_e = iA\hat{m}$
(\hat{m} = vetor normal a área).

O Torque exercido por um campo magnético
nesse dipolo é dado por $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ (análogo
ao torque exercido por um campo elétrico
num dipolo elétrico $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$)

O momento angular é definido como $\vec{L} = m\vec{v} \times \vec{r}$
A corrente i é: $i = \frac{e}{T}$, mas $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $v = \omega r$ $T = \frac{2\pi r}{v}$

ou seja $i = \frac{e v}{2\pi r}$

$$\therefore \mu_e = iA = \frac{e v}{2\pi r} \cdot A = \frac{e v}{2\pi r} \cdot \pi r^2 = \frac{e v r}{2}$$

fazendo μ_e/L : $\frac{\mu_e}{L} = \frac{e v r}{2 m v r} \Rightarrow \frac{\mu_e}{L} = \frac{e}{2m}$

ou seja o momento de dipolo magnético
e o momento angular são proporcionais

Escreve-se em geral: $\frac{\mu_e}{h} = \frac{g_e \mu_b}{h}$ onde

$$g_e = 1 \quad \text{e} \quad \mu_b = \frac{e\hbar}{2m} = 0,927 \times 10^{-3} \text{ amp} \cdot \text{m}^2, \quad \mu_b \text{ e'}$$

chamado de magneton de Bohr e $g_e =$ fator orbital

IV. A - Partícula de spin $1/2$: Quantização do momento angular.

IV. A.1 - Demonstração experimental

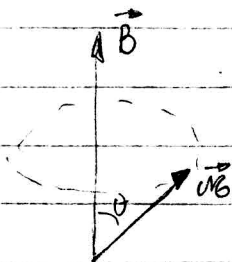
Assumimos que o átomo tenha um momento magnético permanente $\vec{\mu}_B$ (como átomos são neutros não há força de Lorentz). A força resultante no átomo é devido a energia potencial $\vec{F} = -\vec{\nabla} W$ $W = -\vec{\mu}_B \cdot \vec{B}$ (átomos paramagnéticos)

origem do momento magnético eletrônico $\vec{\mu}_B$:
 \vec{J} movimento dos elétrons em torno do núcleo
 $\vec{S} \Rightarrow$ momento magnético intrínseco. spin

Prata: $\vec{\mu}_B = \gamma \vec{J}$

$\gamma =$ fator ou razão giromagnético do nível

$$\vec{F} = \vec{\nabla} (\vec{\mu}_B \cdot \vec{B}) \quad \vec{\Gamma} = \vec{\mu}_B \times \vec{B} \quad \frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{\Gamma} = \gamma \vec{J} \times \vec{B}$$



torque ou momento exercido sobre \vec{J}

$$\vec{F} = \vec{\nabla} (\vec{M} \cdot \vec{B})$$

03

$$\vec{F} = \vec{\nabla} (M_x B_x) + \vec{\nabla} (M_y B_y) + \vec{\nabla} (M_z B_z)$$

Mas \vec{M} é intrínseco ao átomo e não depende de x, y ou z . Devido à precessão de \vec{M} ser muito rápida, somente a média no tempo de M_x e M_y contribuem para o potencial W ; e essas médias são ambas nulas. Considerando esses dois fatos ficamos com:

$$\vec{F} = M_z \vec{\nabla} B_z = M_z \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial B_z}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \hat{k} \right)$$

Mas, devido à construção do aparato Stern-Gerlach, por simetria, B_z não depende de y . Também, no eixo central do aparato, B_z não varia com x .

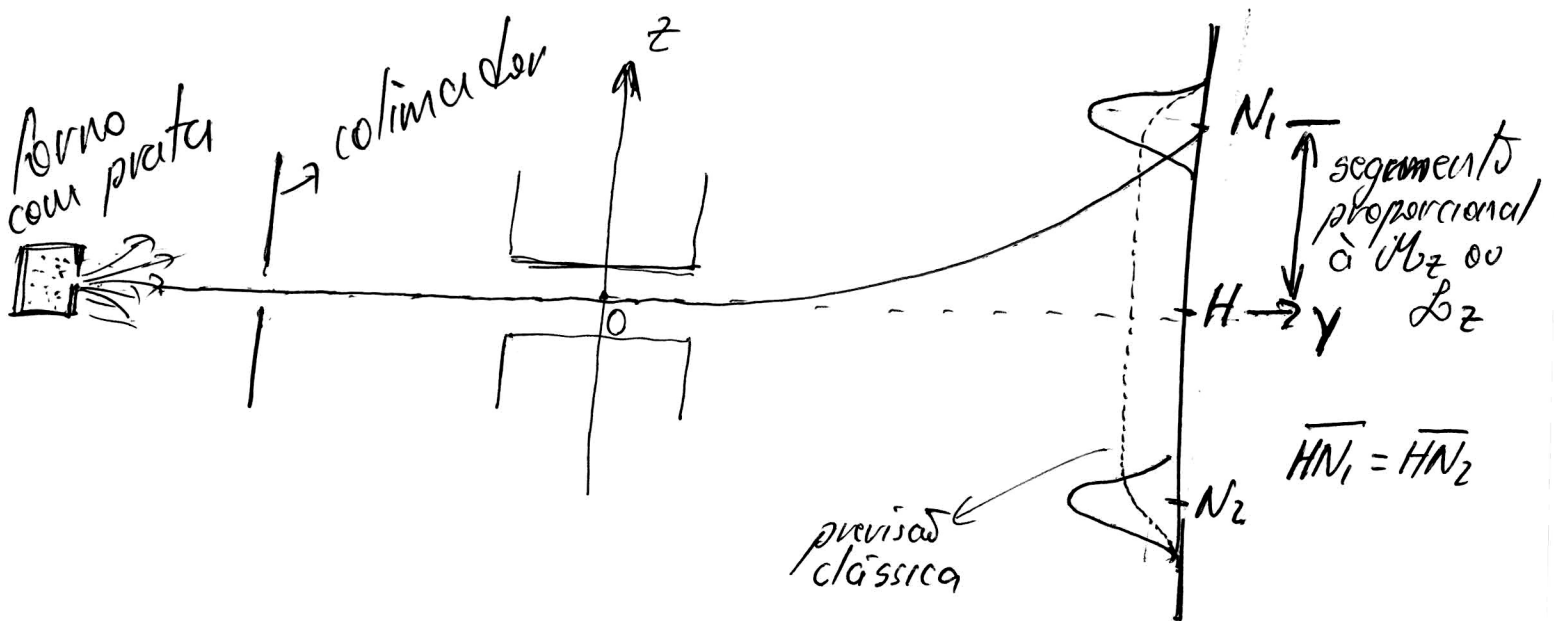
$$\text{Logo: } \vec{F} = M_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \hat{k} \propto M_z \hat{k} \propto L_z \hat{k}$$

Assim, a força no átomo é paralela à Oz e proporcional a M_z . Visto que esta força produz a deflexão HN (ver Fig. 1.a) do feixe, esta será proporcional

a M_z ou L_z . Conseqüentemente, medir HN é equivalente a medir M_z ou L_z .

Classicamente, M_z de estar isotropicamente distribuído (todos os valores de M_z no intervalo $-|M| \rightarrow |M|$ devem ser encontrados).

No entanto, o resultado obtido é bem diferente



O resultado acima indica que somente dois valores para M_z são permitidos, correspondendo às deflexões HN_1 e HN_2 acima. Ou seja, M_z (e L_z) é quantizado, com um espectro discreto de somente dois autovalores.

Obs: Uma análise das condições do experimento permite concluirmos que \vec{r} e \vec{p} podem ser tratados classicamente.

De acordo com o experimento de Stern-Gerlach os átomos de prata são partículas com spin $1/2$. Nosso objetivo aqui é aplicar os conhecimentos adquiridos no capítulo anterior sobre kets, observáveis, previsões físicas, como distinguir os vários estágios de um experimento: preparação, evolução e medida.

No experimento obtém-se que o observável S_z tem dois autovalores possíveis $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$ não degenerados correspondentes aos autovetores:

$$S_z |+\rangle = +\frac{\hbar}{2} |+\rangle$$

$$S_z |-\rangle = -\frac{\hbar}{2} |-\rangle$$

com $\langle +|+\rangle = \langle -|-\rangle = 1$ e $\langle +|-\rangle = 0$

$$|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -| = \mathbb{1}$$

Assim S_z sozinho forma um C.S.C.O. e o espaço de estado de spin nesse caso é bi-dimensional.

Um estado geral nesse espaço de estado (\mathcal{E}_S) pode ser expresso como:

$$|\psi\rangle = \alpha |+\rangle + \beta |-\rangle \quad , |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

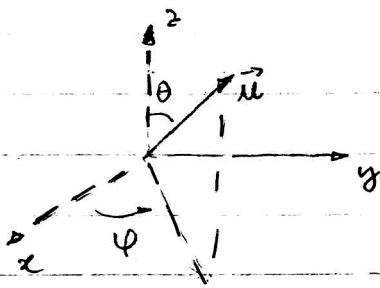
Na base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ S_z é portanto representado pela matriz diagonal:

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

As componentes S_x e S_y de \vec{S} são também matrizes hermitianas 2×2 na base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, que não comutam entre si, mas satisfazem relações bem definidas (ver no cap. 6 sobre momento angular). Vamos assumir sem demonstrar aqui que S_x e S_y são representadas por:

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Para a componente S_u de \vec{S} na direção do vetor unitário \vec{u} $S_u = \vec{S} \cdot \vec{u}$



$$S_u = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = \sin\theta \cos\varphi \hat{i} + \sin\theta \sin\varphi \hat{j} + \cos\theta \hat{k}$$

(ver detalhes na próxima página)

A determinação dos autovalores e autovetores não apresenta dificuldades e os resultados são:

autovalores: $\pm \hbar/2$ para S_x, S_y e S_u

autovetores: $| \pm \rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |+\rangle \pm |-\rangle \}$

$| \pm \rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |+\rangle \pm i |-\rangle \}$

$|+\rangle_u = \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} |+\rangle + \sin\frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} |-\rangle$

$|-\rangle_u = -\sin\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} |+\rangle + \cos\frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} |-\rangle$

$$\rightarrow S_u = \vec{S} \cdot \vec{u} = S_x \sin\theta \cos\varphi + S_y \sin\theta \sin\varphi + S_z \cos\theta$$

substituindo S_x, S_y e S_z :

$$S_u = \frac{\hbar}{2} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \sin\theta \cos\varphi + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \sin\theta \sin\varphi + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cos\theta \right\}$$

$$S_u = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

\rightarrow o fato dos autovalores de S_x, S_y, S_z , e S_u serem os mesmos: $\pm \hbar/2$, deve-se ao fato de que qualquer direção do espaço tem as mesmas propriedades e podemos rodar o aparelho de Stern - Gerlach

$$S_u = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

• Autovalores: $\pm \hbar/2$

$$\begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(\cos\theta - \lambda)(-\cos\theta - \lambda) - \sin^2\theta = 0$$

$$-\cos^2\theta + \lambda^2 - \sin^2\theta = 0$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \lambda^2$$

$$\lambda = \pm 1 \rightarrow \text{autoval.} \begin{cases} +\hbar/2 \\ -\hbar/2 \end{cases}$$

• Autovetores:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\cos\theta c_1 + \sin\theta e^{-i\varphi} c_2 = c_1$$

$$c_1 (1 - \cos\theta) = \sin\theta e^{-i\varphi} c_2$$

$$c_2 = \frac{(1 - \cos\theta)}{\sin\theta e^{-i\varphi}} c_1$$

normalização $c_1^2 + \frac{(1 - \cos\theta)^2 c_1^2}{\sin^2\theta} = 1$

$$c_1^2 \left(1 + \frac{(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)}{\sin^2\theta} \right) =$$

$$c_1^2 = \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta + \cos^2\theta + 1 - 2\cos\theta}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta + 1 - 2\cos\theta$$

$$\cos\theta C_1 + \sin\theta e^{-i\varphi} C_2 = C_1$$

$$C_1 (\cos\theta - 1) + \sin\theta e^{-i\varphi} C_2 = 0$$

$$C_1 (\cos\theta - 1) = -\sin\theta e^{-i\varphi} C_2$$

$$C_2 = \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta e^{-i\varphi}} C_1$$

$$|\mu\rangle_+ = C_1 |+\rangle + \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta e^{-i\varphi}} C_1 |-\rangle$$

$$C_1^2 + \frac{(1 - \cos\theta)^2}{\sin^2\theta} C_1^2 = 1$$

$$C_1^2 \left(1 + \frac{(1 - \cos\theta)^2}{\sin^2\theta} \right) = 1$$

$$C_1^2 \left[\frac{\sin^2\theta + (1 - \cos\theta)^2}{\sin^2\theta} \right] = 1$$

$$C_1^2 = \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta + 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta}$$

$$C_1^2 = \frac{\sin^2\theta}{2 - 2\cos\theta} \rightarrow C_1 = \frac{\sin\theta}{\sqrt{2} (1 - \cos\theta)^{1/2}}$$

$$C_2 = \frac{(1 - \cos\theta) C_1}{\sin\theta e^{-i\varphi}} = \frac{(1 - \cos\theta) \cdot \sin\theta}{\sin\theta e^{-i\varphi} \sqrt{2} (1 - \cos\theta)^{1/2}}$$

$$C_2 = \frac{(1 - \cos\theta)^{1/2}}{\sqrt{2} e^{-i\varphi}}$$

$$|u\rangle_+ = \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}(1-\cos\theta)^{1/2}} |+\rangle + \frac{(1-\cos\theta)^{1/2}}{\sqrt{2} e^{-i\varphi}} |-\rangle$$

$$|u\rangle_+ = \frac{\sin\theta}{2 \sin\theta/2} |+\rangle + \frac{\sin\theta/2}{e^{-i\varphi}} |-\rangle$$

$$|u\rangle_+ = \frac{2 \sin\theta/2 \cos\theta/2}{2 \sin\theta/2} |+\rangle + \frac{\sin\theta/2}{e^{-i\varphi}} |-\rangle$$

$$|u\rangle_+ = \cos\theta/2 |+\rangle + \sin\theta/2 e^{i\varphi} |-\rangle \times \frac{e^{-i\varphi/2}}{e^{-i\varphi/2}}$$

$$|u\rangle_+ = \frac{1}{e^{-i\varphi/2}} \left[\frac{\cos\theta}{2} e^{-i\varphi/2} |+\rangle + \sin\theta e^{i\varphi/2} |-\rangle \right]$$

como fase global não afeta o estado podemos escrever.

$$|u\rangle_+ = \frac{\cos\theta}{2} e^{-i\varphi/2} |+\rangle + \sin\theta e^{-i\varphi/2} |-\rangle$$

(Relações utilizados:

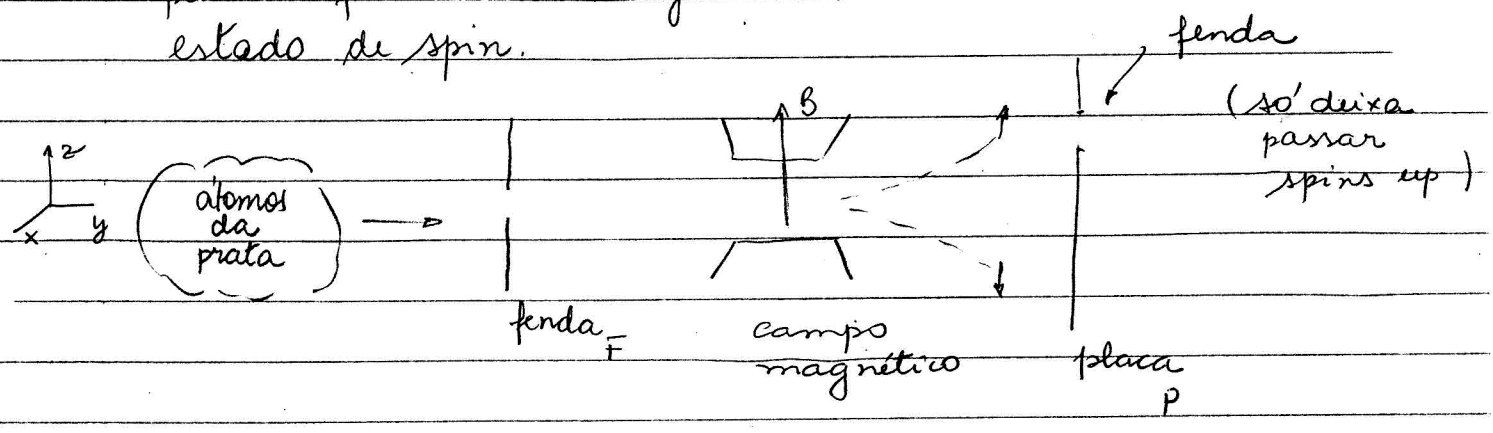
$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} \quad \begin{array}{l} + \text{ se } A/2 \text{ está } 1^\circ \text{ e } 2^\circ \text{ Q.} \\ - \text{ se } A/2 \text{ está } 3^\circ \text{ e } 4^\circ \text{ Q.} \end{array}$$

IV-B Aplicação para o caso do Spin 1/2

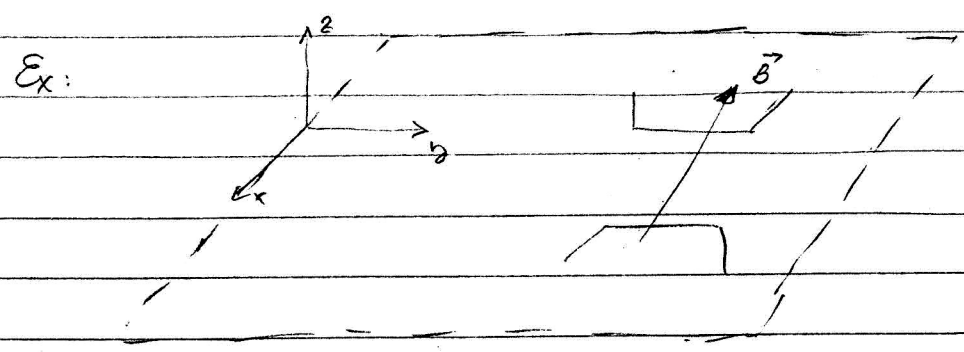
IV. B.1 - Preparação experimental dos estados de spin

Como preparar o feixe de átomos de prata para que eles estejam todos no mesmo estado de spin.



No exemplo ilustrado acima os átomos que passam a placa P encontram-se no autoestado $|+\rangle$. O aparato funcionou como um "polarizador de átomos".

Para preparar estados nas outras direções basta girar o aparato de Stern-Gerlach de modo que o campo magnético \vec{B} seja paralelo a um vetor unitário \vec{u}



$$\text{Seja } \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = |\alpha| \quad \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = |\beta|$$

Se $0 \leq \theta \leq \pi$ então $\tan \frac{\theta}{2} = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|$
 Determina θ unicamente. Como somente
 fases relativas contribuem para
 previsões físicas podemos escolher:

$$\varphi = \text{Arg } \beta - \text{Arg } \alpha$$

$$\chi = \text{Arg } \beta + \text{Arg } \alpha$$

$$\text{Ou: } \text{Arg } \beta = \frac{1}{2} \chi + \frac{1}{2} \varphi$$

$$\text{Arg } \alpha = \frac{1}{2} \chi - \frac{1}{2} \varphi$$

$$\text{Assim: } \alpha = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{\frac{1}{2}(\chi - \varphi)}$$

$$\beta = \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{\frac{1}{2}(\chi + \varphi)}$$

Estado Geral: $|\psi\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle$
 com $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

Um estado geral sempre pode ser expresso como:

$$|\psi\rangle = e^{i\chi/2} \left[\frac{\cos\theta}{2} e^{-i\psi/2} |+\rangle + \frac{\sin\theta}{2} e^{i\psi/2} |-\rangle \right]$$

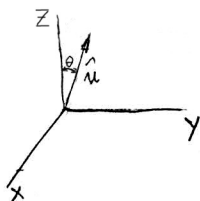
que é a menos do fator de fase $e^{i\chi/2} = |+\rangle_u$

Isso significa que para preparar o sistema no estado $|\psi\rangle$ basta colocar o aparelho de Stern-Gerlach, (com furo em N_1) tal que seu eixo (\vec{B}) esteja direcionado ao longo do vetor \vec{u}

IV.B.2 - Medidas de Spin

- colocando-se 2 aparelhos de Stern-Gerlach um depois do outro, podemos verificar as previsões dos postulados. O 1º atua como um polarizador: o feixe que emerge dele tem todos os átomos de prata com o mesmo estado de spin.

Esse feixe entra então num segundo aparelho que é usada para medir uma componente específica do spin (Ele é o analisador)

Experimento 1:1.º polarizador \rightarrow estado inicial $|\psi\rangle = |+\rangle$ 2.º analizador $\rightarrow \vec{B} \parallel \hat{z}$ mede S_z $|\psi'\rangle = |+\rangle$ Experimento 2:1.º polarizador \rightarrow estado inicial $|\psi\rangle = \frac{\cos\theta}{2}|+\rangle + \frac{\sin\theta}{2}|-\rangle$ $(\vec{B} \parallel \vec{u}$: forma $\nabla \theta$ ∇z e está no plano xOz)2.º analizador $\rightarrow \vec{B} \parallel \hat{z}$ mede $S_z \rightarrow$ resultados: $\frac{\cos^2\theta}{2}$ de obter $+\hbar/2$ e $\frac{\sin^2\theta}{2}$ de obter $-\hbar/2$ Experimento 3:1.º polarizador \rightarrow estado inicial $|\psi\rangle = \frac{\cos\theta}{2}|+\rangle + \frac{\sin\theta}{2}|-\rangle$ 2.º analizador $\rightarrow \vec{B} \parallel \hat{x}$ mede $S_x \rightarrow$ resultados

$$|\langle +|\psi\rangle|^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$$

$$|\langle -|\psi\rangle|^2 = \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$$

Valores médios

Se considerarmos o 2.º experimento descrito anteriormente obtemos $\frac{N \cos^2 \theta}{2}$ chegam em N_1 e $\frac{N \sin^2 \theta}{2}$ em N_2

(onde $N = \#$ total de átomos de prata)

O valor médio de S_z : $\langle S_z \rangle = \frac{1}{N} \left\{ \frac{\hbar}{2} \cdot \frac{N \cos^2 \theta}{2} - \frac{\hbar}{2} \frac{N \sin^2 \theta}{2} \right\}$
 $= \frac{\hbar}{2} \cos \theta$

Considerando que : $\begin{cases} S_z |+\rangle = +\frac{\hbar}{2} |+\rangle \\ S_z |-\rangle = -\frac{\hbar}{2} |-\rangle \end{cases}$

e $|\psi\rangle = \frac{\cos \theta}{2} |+\rangle + \frac{\sin \theta}{2} |-\rangle$

e' fácil ver que $\langle \psi | S_z | \psi \rangle = \langle S_z \rangle$

$\langle \psi | S_z | \psi \rangle = \left(\frac{\cos \theta}{2} \langle + | + \frac{\sin \theta}{2} \langle - | \right) \cdot S_z \cdot \left(\frac{\cos \theta}{2} | + \rangle + \frac{\sin \theta}{2} | - \rangle \right)$

$\langle \psi | S_z | \psi \rangle = \frac{\cos^2 \theta}{2} \langle + | S_z | + \rangle + \frac{\cos \theta \sin \theta}{2} \langle - | S_z | + \rangle$

$+ \frac{\cos \theta \sin \theta}{2} \langle + | S_z | - \rangle + \frac{\sin^2 \theta}{2} \langle - | S_z | - \rangle$

$= \frac{\cos^2 \theta}{2} \frac{\hbar}{2} - \frac{\sin^2 \theta}{2} \frac{\hbar}{2} = \langle S_z \rangle$ c.q.d.

$= \frac{\hbar}{2} \cos \theta$

Da mesma maneira para calcular $\langle S_x \rangle$ e $\langle S_y \rangle$ basta usar as representações de S_x e S_y na base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$

Ex: $\langle S_x \rangle$

$$\text{seja } |+\rangle = \frac{\cos\theta}{2} |+\rangle + \frac{\sin\theta}{2} |-\rangle$$

$$S_x \text{ é dado por } S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle S_x \rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \hbar/2 \\ \hbar/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ \sin\theta/2 \end{pmatrix}$$

$$\langle S_x \rangle = (\cos\theta/2 \quad \sin\theta/2) \cdot \begin{pmatrix} \hbar/2 \sin\theta/2 \\ \hbar/2 \cos\theta/2 \end{pmatrix}$$

$$\langle S_x \rangle = \frac{\hbar}{2} (\sin\theta/2 \cos\theta/2 + \cos\theta/2 \sin\theta/2) = \frac{\hbar}{2} \sin\theta/2 \cos\theta/2 = \frac{\hbar}{2} \sin\theta$$

$$(\sin(A) \cdot \sin(B) = 2 \sin(A+B))$$

$$\text{Calcular: } \sum_u \langle + | S_x | + \rangle_u = \frac{\hbar}{2} \sin\theta \cos\varphi$$

$$\sum_u \langle + | S_y | + \rangle_u = \frac{\hbar}{2} \sin\theta \sin\varphi$$

$$\sum_u \langle + | S_z | + \rangle_u = \frac{\hbar}{2} \cos\theta$$

Ver comment pag 402

Evolução de uma partícula de Spin 1/2 num campo magnético uniforme

Consideremos agora um átomo de prata num campo magnético \vec{B}_0 ($\vec{B}_0 \parallel O_z$). A energia potencial clássica do momento magnético ($\vec{\mu} = \gamma \vec{S}$) desse átomo é: $W = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_0 = -\gamma \vec{S} \cdot \vec{B}_0 = -\gamma B_0 S_z$
Chamamos $\omega_0 = -\gamma B_0$

Em mec. Quântica $S_z \rightarrow$ observável S_z e a energia clássica W se torna o hamiltoniano H
 $H = \omega_0 S_z$. Como H independe do tempo:

$$H|+\rangle = +\frac{\hbar\omega_0}{2}|+\rangle \quad \text{e} \quad \text{(ou seja os autovalores de } H \text{ são os autovalores de } S_z \text{)}$$

$$H|-\rangle = -\frac{\hbar\omega_0}{2}|-\rangle$$

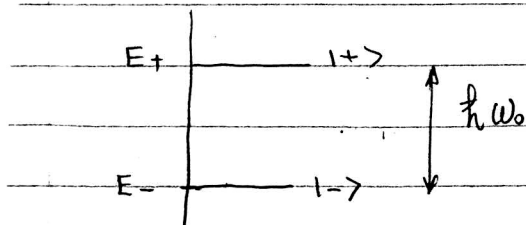
Nesse caso H tem dois autovalores:

$$E_+ = +\frac{\hbar\omega_0}{2} \quad \text{e} \quad E_- = -\frac{\hbar\omega_0}{2}$$

$E_+ - E_- =$ separação entre 2 níveis

$$E_+ - E_- = \frac{\hbar\omega_0}{2} + \frac{\hbar\omega_0}{2} = \hbar\omega_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2\pi} \cdot 2\pi$$

$$E_{\pm} = \hbar\nu = \frac{\hbar\omega_0}{2\pi} \cdot 2\pi \rightarrow \nu = \frac{\hbar\omega_0}{2\pi\hbar} \quad \nu = \frac{\omega_0}{2\pi}$$



Precessão de Larmor

Vamos assumir que em $t=0$ o estado do sistema, seja dado por:

$$(*) \quad |\psi(0)\rangle = \frac{\cos\theta}{2} e^{-i\varphi/2} |+\rangle + \frac{\sin\theta}{2} e^{i\varphi/2} |-\rangle$$

Para calcular $|\psi(t)\rangle$ usamos

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n \sum_{\beta} c_{n,\beta}(t_0) e^{-iE_n(t-t_0)/\hbar} |\varphi_{n,\beta}\rangle$$

(eq D54 pag. 246 - Cap. 3 onde E_n = autovalor de H associado a autovetor $|\varphi_{n,\beta}\rangle$

$H|\varphi_{n,\beta}\rangle = E_n|\varphi_{n,\beta}\rangle$ e β = índice representa degenerescência)

Assim como $|\psi(0)\rangle$ já está expresso em termos dos autoestados do hamiltoniano

$H = \omega_0 S_z$, temos:

$$(**) \quad |\psi(t)\rangle = \frac{\cos\theta}{2} e^{-i\varphi/2} e^{-iE_+t/\hbar} |+\rangle + \frac{\sin\theta}{2} e^{i\varphi/2} e^{-iE_-t/\hbar} |-\rangle$$

usando $E_{\pm} = \pm \hbar \omega_0 / 2$

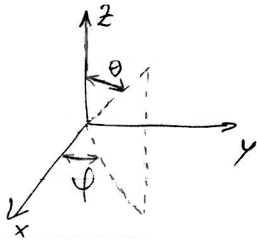
$$|\psi(t)\rangle = \frac{\cos\theta}{2} e^{-i(\varphi + \omega_0 t)/2} |+\rangle + \frac{\sin\theta}{2} e^{i(\varphi + \omega_0 t)/2} |-\rangle$$

como vemos pela eq(*) e (**), o efeito do campo magnético é introduzir uma fase

proporcional ao tempo entre os estados $|+\rangle$ e $|-\rangle$.

$$|u\rangle_+ = \frac{\cos\theta}{2} e^{-i\phi/2} |+\rangle + \frac{\sin\theta}{2} e^{i\phi/2} |-\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = |u(t)\rangle_+ = \frac{\cos\theta}{2} e^{-i(\phi+\omega_0 t)/2} |+\rangle + \frac{\sin\theta}{2} e^{i(\phi+\omega_0 t)/2} |-\rangle$$



θ : ângulo c/ eixo z

ϕ : ângulo com plano Oxz

$$\theta(t) = \theta$$

$$\phi(t) = \phi + \omega_0 t$$

fenômeno conhecido como precessão de Larmor

$\vec{u}(t)$ roda em torno de Oz com velocidade angular ω_0 (proporcional ao campo magnético)

Como $H = \omega_0 S_z \rightarrow S_z$ comuta c/ H e indep. do tempo



S_z é constante de movimento

usando eq (***) podemos verificar que a probabilidade de obter $+\hbar/2$ ou $-\hbar/2$ na medida de S_z é independente do tempo

$$P(+\hbar/2, t) = |\langle + | \psi(t) \rangle|^2 = \cos^2\theta/2$$

$$P(-\hbar/2, t) = |\langle - | \psi(t) \rangle|^2 = \sin^2\theta/2$$

O valor médio de S_z : $\langle S_z \rangle = \langle \psi(t) | S_z | \psi(t) \rangle = \frac{\hbar}{2} \cos \theta$

Por outro lado S_x e S_y não comutam com H
 (verificar $[S_x, H] \neq 0$ - usar as matrizes de
 S_x, S_y e S_z na base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$)

Assim:

$$\langle \psi(t) | S_x | \psi(t) \rangle = \frac{\hbar}{2} \sin \theta \cos(\varphi + \omega_0 t)$$

$$\langle \psi(t) | S_y | \psi(t) \rangle = \frac{\hbar}{2} \sin \theta \sin(\varphi + \omega_0 t)$$