III-C. Interpretação Física dos Postulados sobre os Observáveis e suas medidas

III.C.1 - As regras de quantização são consistentes com a interpretação probabilística da função de onda.

Vamos considerar, por simplicidade, o problema unidimensional de uma partícula no estado normalizado $|\Psi\rangle$. A probabilidade de uma medida da sua posição leve a um resultado entre x e $x+dx$ é (4º Postulado):

$$d\mathcal{P}(x) = |\langle x|\Psi\rangle|^2 dx = |\Psi(x)|^2 dx$$

($|x\rangle$ representa um autovetor do operador X com autovalor x)

O autovetor $|p\rangle$ do operador P por sua vez é dado pela onda plana:

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}$$

A probabilidade de encontrar para a partícula no estado $|\Psi\rangle$ um momento p entre p e $p+dp$ é dada por:

$$d\mathcal{P}(p) = |\langle p|\Psi\rangle|^2 dp = |\bar{\Psi}(p)|^2 dp$$

Recuperamos então, a interpretação probabilística da função de onda, assim como sua transformada de Fourier

III.C.2 - Quantização de Algumas Quantidades Físicas

O 3º Postulado nos diz que os valores possíveis de obtermos na medição de uma quantidade física são os autovalores do observável correspondente. Isso não significa no entanto que todas as quantidades são quantizadas pois existem observáveis cujo espectro é contínuo. Exemplo de um caso onde obtém-se a quantização dos resultados é o átomo de hidrogênio.

III.C.3 - O Processo de medida

Como vimos, tanto no experimento de duas fendas quanto no dos fótons polarizados, há uma perturbação intrínseca associada ao processo de medidas. Depois da medida há uma mudança abrupta do estado do sistema. No entanto é impossível prever qual será essa perturbação já que ela depende do resultado da medida em si.

Essa incerteza no resultado "não" está relacionada com o erro experimental, causado por imperfeições na medida, o qual pode ser sistematicamente reduzido por aperfeiçoamentos no equipamento.

III.C.4 Valor médio de um observável num dado estado.

O 4º Postulado nos diz que após a medida de uma quantidade física a probabilidade de obtermos um valor a_n é dada por:

$$\mathcal{P}(a_n) = |\langle u_n | \psi \rangle|^2$$ (p/ o caso de espectro não degenerado discreto)

O valor médio de um observável A no estado $|\psi\rangle$, o qual denotamos por $\langle A \rangle_\psi$ (ou simplesmente $\langle A \rangle$), é definido como a média dos resultados obtidos quando um grande número N de medidas desse observável são realizadas em sistemas os quais estão todos no estado $|\psi\rangle$. Vamos mostrar que se $|\psi\rangle$ é normalizada então:

$$\langle A \rangle_\psi = \langle \psi | A | \psi \rangle \qquad (C\text{-}4)$$

Vamos considerar que o espectro de A seja discreto. Das N medidas de A (o sistema está no estado $|\psi\rangle$) o autovalor a_n será obtido $\mathcal{N}(a_n)$ vezes com:

$$\frac{\mathcal{N}(a_n)}{N} \xrightarrow[N \to \infty]{} \mathcal{P}(a_n)$$

e $\sum_n \mathcal{N}(a_n) = N$

O valor médio dos resultados desses N experimentos é a soma dos valores obtidos dividido por N:

$$\langle A \rangle_\psi = \frac{1}{N} \sum_n a_n \mathcal{N}(a_n)$$

Mas: $\frac{\mathcal{N}}{N} = \mathcal{P}(a_n)$ assim: $\langle A \rangle_\psi = \sum_n a_n \mathcal{P}(a_n)$

Substituindo: $\mathcal{P}(a_n) = \sum_{i=1}^{g_n} |c_n^i|^2 = \sum_{i=1}^{g_n} \langle \psi | u_n^i \rangle \langle u_n^i | \psi \rangle$

temos: $\langle A \rangle_\psi = \sum_n a_n \sum_{i=1}^{g_n} \langle \psi | u_n^i \rangle \langle u_n^i | \psi \rangle$

Como: $A|u_n^i\rangle = a_n |u_n^i\rangle$ temos:

$$\langle A \rangle_\psi = \sum_n \sum_{i=1}^{g_n} \langle \psi | A | u_n^i \rangle \langle u_n^i | \psi \rangle$$

$$\langle A \rangle_\psi = \langle \psi | A | \underbrace{\sum_n \sum_{i=1}^{g_n} | u_n^i \rangle \langle u_n^i |}_{= \mathbb{1} \text{ (Relação de Completeza)}} \psi \rangle$$

Ou seja: $\langle A \rangle_\psi = \langle \psi | A | \psi \rangle$ c.q.d.

Pode-se mostrar que no caso do espectro contínuo vale o mesmo resultado.

* $\langle A \rangle$ é a média sobre um conjunto de medidas idênticas e não a média temporal.
* Se $|\Psi\rangle$ é o estado do sistema não normalizado então: $$\langle A \rangle_\Psi = \frac{\langle \Psi | A | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle}$$
* Para calcular $\langle A \rangle_\Psi$ temos que especificar a representação:

Exemplo 1: $\langle X \rangle_\Psi = \langle \Psi | X | \Psi \rangle$

$$= \int d^3r \langle \Psi | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | X | \Psi \rangle = \int d^3r\, \Psi^*(\vec{r})\, x\, \Psi(\vec{r})$$

Exemplo 2: $\langle P_x \rangle_\Psi = \langle \Psi | P_x | \Psi \rangle =$

$$= \int d^3p \langle \Psi | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | P_x | \Psi \rangle = \int d^3p\, \overline{\Psi}^*(\vec{p})\, p_x\, \overline{\Psi}(\vec{p})$$

ou, na representação $\{|\vec{r}\rangle\}$:

$$\langle P_x \rangle_\Psi = \langle \Psi | P_x | \Psi \rangle = \int d^3r \langle \Psi | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | P_x | \Psi \rangle$$

$$= \int d^3r\, \Psi^*(\vec{r})\, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \Psi(\vec{r})$$

III.C.5 Desvio quadrado médio

Qual a dispersão dos resultados em torno do valor médio?

Por definição: $$\Delta A = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle} \quad \text{(C-23)}$$

Mas: $\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = \langle A^2 - 2\langle A \rangle A + \langle A \rangle^2 \rangle$

$$= \langle A^2 \rangle - 2\langle A \rangle^2 + \langle A \rangle^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$$

Portanto: $\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$

Se usarmos a definição (C-23) pode-se mostrar que (Complemento C_{III}):

$$\Delta X \Delta P_x \geq \hbar/2 \quad \Delta Y \Delta P_y \geq \hbar/2 \quad \Delta Z \Delta P_z \geq \hbar/2$$

III.C-6 Compatibilidade de Observáveis

Sejam dois operadores A e B que comutam: $[A, B] = 0$ e cujos espectros sejam discretos. Seja $\{|a_n, b_p, i\rangle\}$ uma base comum aos operadores A e B com autovalores a_n e b_p. O índice i serve para distinguir quando há mais de um autovetor correspondente ao mesmo par de autovalores (a_n, b_p). Dizemos que existe pelo menos um estado $|a_n, b_p, i\rangle$ para o qual podemos determinar simultaneamente A e B e os resultados obtidos serão a_n e b_p. Esses dois observáveis que podem ser obtidos simultaneamente são ditos Observáveis Compatíveis. Se, por outro lado, A e B não comutam eles são ditos incompatíveis, pois em geral um estado não poderá ser autoestado de ambos simultaneamente.

Quando dois observáveis são compatíveis as previsões físicas são as mesmas, independentemente da ordem em que A e B são medidos.

Assumindo que o sistema está inicialmente num estado normalizado arbitrário:

$$|\Psi\rangle = \sum_{n,p,i} c_{n,p,i}\, |a_n, b_p, i\rangle$$ temos:

$$\mathcal{P}(a_n, b_p) = \mathcal{P}(b_p, a_n) = \sum_i |c_{n,p,i}|^2 = \sum_i |\langle a_n, b_p, i|\Psi\rangle|^2$$

Isso significa que a medida de B não leva a nenhuma perda de informação de uma medida em A, desde que o tempo que separa as duas medidas seja bastante curto para que o sistema não evolua.

O estado do sistema imediatamente após as duas medidas é dado por:

$$|\Psi''_{n,p}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\sum_i |c_{n,p,i}|^2}} \sum_i c_{n,p,i}\, |a_n, b_p, i\rangle$$

Preparação de um estado

Consideremos o sistema físico no estado $|\Psi\rangle$ e a medida do observável A (cujo espectro assumiremos como discreto). Se a medida leva a um autovalor não degenerado a_n, então o estado do sistema imediatamente após a medida está completamente determinado sem ambiguidade. Por outro lado, se a_n é degenerado necessitamos de um outro observável B que comute com A. ~~Se~~ o par (a_n, b_p) de autovalores de A e B for não degenerado teremos então um estado único bem definido.

Conclusão: "Para o estado do sistema depois de uma medida estar completamente definido unicamente pelo resultado obtido, a medida precisa ser feita num C.S.C.O. (conjunto completo de observáveis comutativos)"

No caso degenerado o estado após a medida será:

$$|\psi_n'\rangle = \frac{1}{\sqrt{\sum_i |c_n^i|^2}} \sum_{i=1}^{g_n} c_n^i |u_n^i\rangle$$

o qual depende do estado inicial via os c_n^i