II.D.2 - Observáveis

* Propriedades dos auto-valores e auto-vetores de um operador Hermitiano

(i) "Os auto-valores de um operador Hermitiano são reais"

Prova: $A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \Rightarrow \langle\psi|A|\psi\rangle = \lambda\langle\psi|\psi\rangle$

Mas: $\langle\psi|A|\psi\rangle^* = \langle\psi|A^\dagger|\psi\rangle \underset{A^\dagger = A}{=} \langle\psi|A|\psi\rangle$

Assim, $\langle\psi|A|\psi\rangle$ é real. Mas $\langle\psi|\psi\rangle$ também é real então λ deve ser real.

(ii) "Dois auto-vetores de um operador Hermitiano correspondentes à dois diferentes auto-valores são ortogonais"

Prova: $A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \quad A|\varphi\rangle = \mu|\varphi\rangle$

$$\langle\varphi|A^\dagger = \mu^*\langle\varphi| \underset{\substack{A^\dagger = A \\ \mu\in\mathbb{R}}}{\Rightarrow} \langle\varphi|A = \mu\langle\varphi|$$

$$\begin{array}{rl} \langle\varphi|A|\psi\rangle & = \lambda\langle\varphi|\psi\rangle \\ \langle\varphi|A|\psi\rangle & = \mu\langle\varphi|\psi\rangle \quad - \\ \hline 0 & = (\lambda-\mu)\langle\varphi|\psi\rangle \end{array}$$

Como $\lambda \neq \mu$ (hipótese) então $\langle \varphi | \psi \rangle = 0$

* Definição de um Observável

Seja: $A|\psi_n^i\rangle = a_n|\psi_n^i\rangle$

onde: → a_n (com $n=1,2,\ldots$) são os autovalores do operador A

→ $|\psi_n^i\rangle$ (com $i=1,2,\ldots,g_n$) correspondem aos autovetores no subespaço $\mathcal{E}_n$ correspondentes ao autovalor a_n (a_n é degenerado com grau g_n). Os g_n $|\psi_n^i\rangle$ são linearmente independentes, ou seja, ortogonais entre si.

Então, sendo A Hermitiano, ele é um "observável" se seu sistema de autovetores forma uma base no espaço de estados, ou seja:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{g_n} |\psi_n^i\rangle\langle\psi_n^i| = \mathbb{1}$$

Também, $P_n = \sum_{i=1}^{g_n} |\psi_n^i\rangle\langle\psi_n^i|$

é o projetor no subespaço $\mathcal{E}_n$.

Note também que podemos representar o operador A por: $A = \sum_n P_n$

II.D.3 Conjuntos de Observáveis Comutativos

Teoremas importantes:

→ Teorema I: "Se dois operadores A e B comutam e se $|\psi\rangle$ é um auto-vetor de A, então $B|\psi\rangle$ também é um auto-vetor de A com mesmo auto-valor"

Prova: $A|\psi\rangle = a|\psi\rangle$ $\quad BA|\psi\rangle = Ba|\psi\rangle$

$(AB = BA)$ $\quad A(B|\psi\rangle) = a(B|\psi\rangle)$

→ Teorema I': "Se 2 operadores A e B comutam todo autoespaço de A é globalmente invariante sob a ação de B."

→ Teorema II: "Se dois observáveis A e B comutam e se $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ são dois autovetores de A com diferentes auto-valores então: $\langle\psi_1|B|\psi_2\rangle = 0$"

Prova: Temos: $A|\psi_1\rangle = a_1|\psi_1\rangle \quad a_1 \neq a_2$

$A|\psi_2\rangle = a_2|\psi_2\rangle$

$$A(B|\psi_1\rangle) = a_1 \underbrace{(B|\psi_1\rangle)}_{\text{auto-vetor de } A \text{ com autovalor } a_1} \quad (\text{Teorema I})$$

Portanto: $\langle\psi_2|(B|\psi_1\rangle) = \langle\psi_2|B|\psi_1\rangle = 0$

Outra Prova: $[A,B]=0$

$\langle\psi_1|[A,B]|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|AB-BA|\psi_2\rangle = 0$

Mas: $\langle\psi_1|AB|\psi_2\rangle = a_1\langle\psi_1|B|\psi_2\rangle$

$\langle\psi_1|BA|\psi_2\rangle = a_2\langle\psi_1|B|\psi_2\rangle$

Logo: $(a_1-a_2)\langle\psi_1|B|\psi_2\rangle = 0$

Mas, por hipótese: $a_1 \neq a_2 \Rightarrow a_1-a_2 \neq 0$

Então: $\langle\psi_1|B|\psi_2\rangle = 0$

→ <u>Teorema III</u>: "Se dois observáveis A e B comutam podemos construir uma base ortonormal do espaço de estados com auto-vetores comuns a A e B"

<u>Prova</u>: Se A é um observável então existe um conjunto de autovetores $\{|u_n^i\rangle\}$ de A tal que: $A|u_n^i\rangle = a_n|u_n^i\rangle$ $\quad n = 1, 2, \dots$

$i = 1, 2, \dots, g_n$

e tal que: $\langle u_n^i | u_{n'}^{i'} \rangle = \delta_{nn'}\delta_{ii'}$

Ordeno a base da seguinte maneira:

$$\underbrace{|u_1^1\rangle, |u_1^2\rangle, \dots, |u_1^{g_1}\rangle}_{\mathcal{E}_1}, \underbrace{|u_2^1\rangle, \dots, |u_2^{g_2}\rangle}_{\mathcal{E}_2}, \underbrace{|u_3^1\rangle, \dots}_{\mathcal{E}_3} \dots$$

A matriz de B nesta base é:

	$\mathcal{E}_1$	$\mathcal{E}_2$	$\mathcal{E}_3$	...
$\mathcal{E}_1$		0	0	0
$\mathcal{E}_2$	0		0	0
$\mathcal{E}_3$	0	0		0
⋮	0	0	0	

→ matriz "bloco-diagonal"

Há duas possibilidades:

(i) a_n é não degenerado: $\mathcal{E}_n$ tem dimensão 1 e B é diagonal em $\mathcal{E}_n$

(ii) a_n é degenerado: diagonalizo o bloco associado à $\mathcal{E}_n$:

$$\langle v_n^i | B | v_n^j \rangle = \beta_i^{(n)} \delta_{ij}$$

onde: $B|v_n^i\rangle = \beta_i^{(n)} |v_n^i\rangle$ com $|v_n^i\rangle = \sum_{k=1}^{g_n} c_k^i |u_n^k\rangle$

Note que $|v_n^i\rangle$ é uma nova base em $\mathcal{E}_n$, a qual diagonaliza B nesse sub-espaço, mas cujos vetores continuam sendo auto-vetores de A com auto-valor a_n:

$$A|v_n^i\rangle = a_n |v_n^i\rangle$$

Se repetirmos esse processo para todos os blocos da matriz B teremos ambos, A e B, diagonais.

Conjunto Completo de Observáveis Comutativos (C.S.C.O.)

Se A é um observável (é Hermitiano e seus autovetores formam uma base) e nenhum de seus auto-valores é degenerado, então temos uma base única $\{|u_n\rangle\}$ para o espaço $\mathcal{E}$. Nesse caso dizemos que A por si só forma um C.S.C.O. pois, dado um auto-valor de A, fica especificado inequivocamente um auto-vetor.

Por outro lado, se um ou alguns dos auto-valores de A são degenerados, não temos uma base única pois podemos escolher várias combinações com os auto-vetores diferentes correspondentes a um dado auto-valor degenerado. Nesse caso, escolhemos um outro observável B que comute com A e construímos uma base ortonormal de autovetores comuns a A e B. Se essa base for única, ou seja, se para cada par de autovalores $\{a_n, b_p\}$ corresponder um único vetor base, então

A e B formam um C.S.C.O.. Caso contrário, escolhemos um terceiro operador C, que comute com A e B simultaneamente, e repetimos o processo até que um C.S.C.O. seja encontrado.

(Consultar exercícios 11 e 12 deste Capítulo (exercícios resolvidos))