# II.C.3. Representação dos kets e bras

Seja: $|\psi\rangle = \sum_i c_i |u_i\rangle$ com $c_i = \langle u_i|\psi\rangle$

Então, a representação de $|\psi\rangle$ na base $|u_i\rangle$ é o vetor coluna:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Seja $|\varphi\rangle = \sum_i b_i |u_i\rangle$. Então:

$$\langle\varphi| = \langle\varphi|\mathbb{1} = \langle\varphi| P_{\{u_i\}} = \sum_i \langle\varphi|u_i\rangle\langle u_i|$$

$= \sum_i b_i^* \langle u_i|$, onde os $b_i^*$'s são as componentes do bra $\langle\varphi|$ na base $\langle u_i|$

Considere agora o produto escalar:

$$\langle \varphi | \Psi \rangle = \langle \varphi | \mathbb{1} | \Psi \rangle = \langle \varphi | P_{\{v_i\}} | \Psi \rangle =$$

$$= \sum_i \underbrace{\langle \varphi | v_i \rangle}_{b_i^*} \underbrace{\langle v_i | \Psi \rangle}_{c_i} = \sum_i b_i^* c_i$$

Considerando a representação proposta para $|\Psi\rangle$ na forma de um vetor coluna, obteremos esse resultado para $\langle \varphi | \Psi \rangle$ se representarmos $\langle \varphi |$ na forma de um vetor linha:

$$(b_1^*, b_2^*, b_3^*, \dots, b_i^*, \dots)$$

Pois: $( \qquad ) \left( \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right) = (\text{número}) = (\text{produto escalar})$

## II.C.4 Representação dos Operadores

Dada uma base $\{|u_i\rangle\}$, um operador $A$ terá elementos de matriz $A_{ij}$ definidos por:

$A_{ij} = \langle u_i|A|u_j\rangle$. Logo, na base $\{|u_i\rangle\}$ o operador $A$ representado pela matriz:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & \cdots \\ A_{31} & A_{32} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

### Representação do Ket

$|\psi'\rangle = A|\psi\rangle$

$$c_i' = \langle u_i|\psi'\rangle = \langle u_i|A|\psi\rangle$$

$$= \langle u_i|A|\sum_j |u_j\rangle\langle u_j|\psi\rangle =$$

$$= \langle u_i|A|\sum_j |u_j\rangle c_j = \sum_j \underbrace{\langle u_i|A|u_j\rangle}_{A_{ij}} c_j$$

Portanto: $c_i' = \sum_j A_{ij} c_j$

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ c_3' \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & \cdots \\ A_{31} & A_{32} & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Analogamente, pode-se mostrar que:

$$\langle \varphi | A | \psi \rangle = (b_1^* \; b_2^* \; b_3^* \ldots) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{pmatrix} (c_1^* \, c_2^* \, c_3^* \ldots) = \begin{pmatrix} c_1c_1^* & c_1c_2^* & \ldots \\ c_2c_1^* & c_2c_2^* & \ldots \\ c_3c_1^* & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

## Representação do adjunto $A^+$ de $A$

$$(A^+)_{ij} = \langle u_i | A^+ | u_j \rangle = \langle u_j | A | u_i \rangle^* = A_{ji}^*$$

se $A$ é hermitiano então $A^+ = A$, ou seja $(A^+)_{ij} = A_{ij} = A_{ji}^*$. Ou seja, a matriz é composta por elementos na diagonal que são reais e por elementos simétricos em relação à diagonal que são complexos conjugados um do outro:

$$A_{ii} = A_{ii}^* \quad e \quad A_{ij} = A_{ji}^*$$

## II.C.5 Mudança de Representação

Sejam duas bases discretas $\{|u_i\rangle\}$ e $\{|t_k\rangle\}$. Kets, bras e operadores são matrizes diferentes quando representados nessas duas bases.

A matriz de mudança de base $S$ é definida através dos elementos de matriz: $S_{ik} = \langle u_i | t_k \rangle$ que representam a decomposição de cada ket $|t_k\rangle$ na velha base $\{|u_i\rangle\}$.

Também: $S^{\dagger}_{ki} = (S^{\dagger})_{ki} = \langle u_i | t_k \rangle^* = \langle t_k | u_i \rangle$

Para obter as componentes do vetor $|\psi\rangle$ na nova base $\{|t_k\rangle\}$ à partir das componentes na base antiga $\{|u_i\rangle\}$ basta inserir a relação de completeza:

$\langle t_k|\psi\rangle$ = as componentes de $|\psi\rangle$ na nova base $\{|t_k\rangle\}$

$$\langle t_k|\psi\rangle = \langle t_k|\mathbb{1}|\psi\rangle = \langle t_k|\sum_i |u_i\rangle\langle u_i|\psi\rangle =$$

$$= \sum_i \langle t_k|u_i\rangle \underbrace{\langle u_i|\psi\rangle}_{c_i} = \sum_i S^{+}_{ki}\, c_i$$

onde os $c_i$'s são as componentes na base antiga.

Para um bra temos:

$$\langle \psi|t_k\rangle = \langle \psi|\sum_i |u_i\rangle\langle u_i|t_k\rangle = \sum_i \langle \psi|u_i\rangle\langle u_i|t_k\rangle$$

$$= \sum_i c_i^* S_{ik}$$

Para os elementos de matriz de um operador:

$$\langle t_k | A | t_l \rangle = \langle t_k | \underbrace{\sum_i |u_i\rangle\langle u_i|}_{\mathbb{1}} A \underbrace{\sum_j |u_j\rangle\langle u_j|}_{\mathbb{1}} t_l \rangle$$

$$= \sum_i \langle t_k | u_i \rangle \sum_j \langle u_i | A | u_j \rangle \langle u_j | t_k \rangle$$

Ou seja: $A_{kl} = \sum_{i,j} S^{\dagger}_{ki} A_{ij} S_{jl}$

Analogamente: $A_{ij} = \sum_{k,l} S_{ik} A_{kl} S^{\dagger}_{lj}$

# II.D - Equações de Autovalores. Observáveis

## II.D.1 - Autovalores e autovetores de um operador

Seja $A$ um operador então a equação:

$A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$, onde $\lambda$ é um número complexo e $|\psi\rangle$ é chamado autovetor do operador $A$ com autovalor $\lambda$, é a equação de autovalores do operador linear $A$.

A equação acima tem solução para apenas alguns valores de $\lambda$, chamados de autovalores de $A$. O conjunto de autovalores de $A$ é chamado espectro de $A$.

$\lambda$ é <u>não degenerado</u> se temos apenas um autovetor correspondente a ele (a menos de um fator constante, que pode ser eliminado exigindo-se que $|\psi\rangle$ seja normalizado, ou seja, $\langle\psi|\psi\rangle = 1$)

Se tivermos <u>g</u> autovetores linearmente independentes correspondentes a um único autovalor $\lambda$, este é dito <u>degenerado</u>. O conjunto de $g$ autovetores associados com $\lambda$ corresponde a um autoespaço do autovalor $\lambda$ de dimensão $g$.

Matematicamente : $A|\psi^i\rangle = \lambda|\psi^i\rangle \quad i = 1, 2, \ldots, g$

$$\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij}$$

Seja $|\psi\rangle$ um Ket genérico no autoespaço de $\lambda$, ou seja: $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{g} c_i |\psi^i\rangle$

Aplicando $A$ em $|\psi\rangle$ temos:

$$A|\psi\rangle = A \sum_{i=1}^{g} c_i |\psi^i\rangle = \sum_{i=1}^{g} c_i A|\psi^i\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{g} c_i \lambda |\psi^i\rangle = \lambda \sum_{i=1}^{g} c_i |\psi^i\rangle = \lambda |\psi\rangle$$

Logo: $A|\psi\rangle = \lambda |\psi\rangle$ e $|\psi\rangle$ também é autovetor de $A$ com autovalor $\lambda$

# Encontrando autovalores e autovetores de um operador

Dado um operador linear $A$, como encontrar seus autovalores e autovetores?

Vamos escolher uma representação $\{|u_i\rangle\}$:

$$A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \Rightarrow \langle u_i|A|\psi\rangle = \lambda\langle u_i|\psi\rangle$$

Usando a relação de completeza:

$$\langle u_i|A|\sum_j |u_j\rangle\langle u_j|\psi\rangle = \lambda\langle u_i|\psi\rangle$$

$$\sum_j \langle u_i|A|u_j\rangle c_j = \lambda c_i \Rightarrow \sum_j A_{ij} c_j = \lambda c_i$$

ou: $\displaystyle\sum_j [A_{ij} - \lambda\delta_{ij}]c_j = 0$

A equação acima representa um sistema linear homogêneo de equações com $c_j$ desconhecidos. Uma solução não trivial para o sistema existe se, e somente se: $\det[\mathbf{A} - \lambda I] = 0$ onde $\mathbf{A}$ é a matriz quadrada representando o operador $A$, e $I$ a matriz identidade de mesma dimensão. A equação acima é conhecida como equação característica.

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & & & \\ A_{N1} & \cdots & \cdots & A_{NN}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

A equaçaõ característica é independente da escolha da base. A existência de $N$ autovetores linearmente independentes depende das características de $A$. Em particular, se $A$ for hermitiano, então é sempre possível diagonalizá-lo.