## I-D Partícula num potencial escalar independente do tempo

aproximação clássica $\Rightarrow \lambda = \dfrac{h}{p} \ll \begin{pmatrix} \text{comprimentos} \\ \text{característicos} \\ \text{do experimento} \end{pmatrix}$

Analogia com ótica:

Mecânica Quântica $\Rightarrow$ Mecânica Clássica
Ótica Física $\Rightarrow$ Ótica Geométrica

$\lambda$ pequeno

Potenciais quadrados e degraus variam instantâneamente, logo sempre produzirão efeitos quânticos, não importando quão pequeno seja $\lambda$.

### I.D.1 - Separação de variáveis. Estados estacionários.

Considere a Eq. de Schrödinger para uma partícula submetida a um potencial $V(\vec{r})$ independente do tempo:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r},t) + V(\vec{r}) \Psi(\vec{r},t)$$

Vamos tentar uma solução na forma:

$$\Psi(\vec{r},t) = \varphi(\vec{r}) \chi(t)$$

Substituindo temos:

$$i\hbar\, \varphi(\vec{r}) \frac{d}{dt} \chi(t) = \chi(t) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \varphi(\vec{r}) \right] + \chi(t) V(\vec{r}) \varphi(\vec{r})$$

Dividindo ambos os lados por $\varphi(\vec{r})\chi(t)$:

$$\underbrace{\frac{i\hbar}{\chi(t)}\frac{d\chi(t)}{dt}}_{\text{depende só de } t} = \underbrace{\frac{1}{\varphi(\vec{r})}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(\vec{r})\right] + V(\vec{r})}_{\text{depende só de } \vec{r}}$$

Isso só é possível se ambos os lados forem uma constante, que vamos escolher como $\hbar\omega$.

$$\frac{i\hbar}{\chi(t)}\frac{d\chi(t)}{dt} = \hbar\omega \Rightarrow \chi(t) = A e^{-i\omega t} \quad (D\text{-}5)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(\vec{r}) + V(\vec{r})\varphi(\vec{r}) = \hbar(\omega)\varphi(\vec{r}) \quad (D\text{-}6)$$

Assim: $\psi(\vec{r},t) = \varphi(\vec{r})e^{-i\omega t}$ (D-7)

$|\psi|^2 = |\varphi|^2 \Leftarrow$ ↳ solução estacionária da eq. de Schrödinger

$E = \hbar\omega \Rightarrow$ energia bem definida. (constante de movimento)

Reescrevemos: $\underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})\right)}_{}\varphi(\vec{r}) = E\varphi(\vec{r})$ (D-8)

equação de autovalores: $\Leftarrow$ — $H\varphi(\vec{r}) = E\varphi(\vec{r})$ (D-9)

$\varphi(\vec{r}) \Rightarrow$ autofunção ↳ Hamiltoniano $\Rightarrow$ operador linear

$E \Rightarrow$ autovalores $\Rightarrow$ energias (podem ser quantizadas)

Para distinguirmos entre os vários valores possíveis de $E$ (e respectivos autovetores) vamos indexá-los: $H\varphi_n(\vec{r}) = E_n\varphi_n(\vec{r})$

e obtemos as soluções estacionárias:

$$\psi_n(\vec{r},t) = \varphi_n(\vec{r})\, e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}}$$

Pelo princípio da superposição temos uma solução geral: $\Psi(\vec{r},t) = \sum_n c_n \varphi_n(\vec{r})\, e^{-\frac{i E_n t}{\hbar}}$ (D-14)

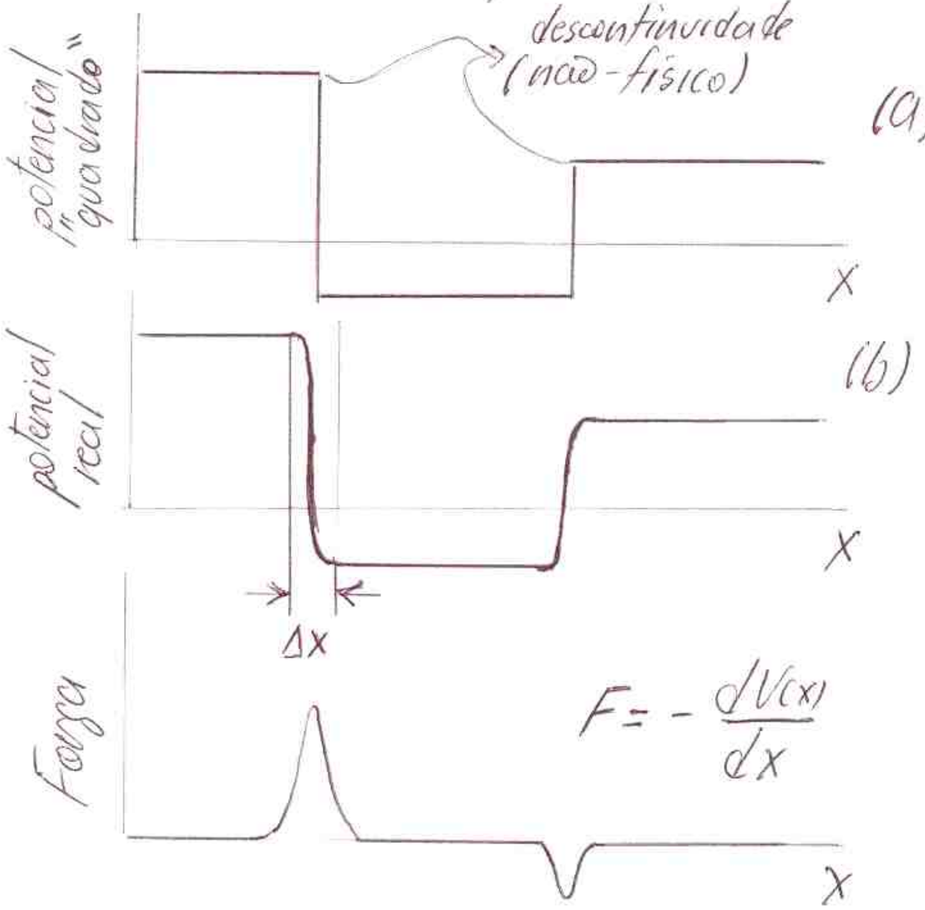
onde os $c_n$ são constantes complexas arbitrárias

Em particular: $\Psi(\vec{r},0) = \sum_n c_n \varphi_n(\vec{r})$ (D-15)

Inversamente, suponha que conhecemos o estado inicial $\Psi(\vec{r},0)$. Os $c_n$ são dados pela decomposição espectral de $\Psi(\vec{r},0)$ nos $\varphi_n(\vec{r})$ e a evolução temporal fica determinada pela Eq. (D-14).

## I-D-2 Potenciais quadrados unidimensionais

### Estudo qualitativo




Posso substituir (b) por (a) se $\Delta x$ for muito menor que as outras distâncias envolvidas no problema. Particularmente o comprimento de onda $\lambda$ da partícula que está submetida ao potencial

Classicamente, $V(x)$ pode ser comparado ao potencial gravitacional. Se $E$ é a energia total da partícula, regiões em $V > E$ são proibidas para a partícula pois $E_{\text{cinética}} = E - V > 0$

Analogia com a ótica:

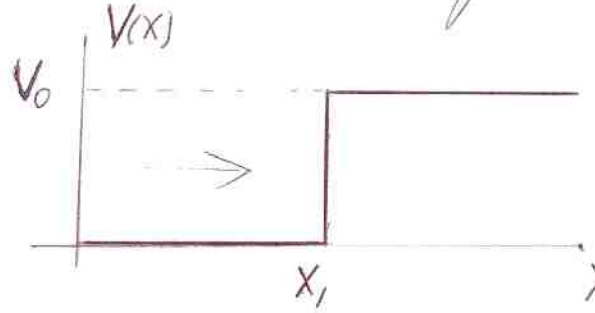
$$\begin{pmatrix}\text{variação no}\\ \text{potencial}\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix}\text{variação no}\\ \text{índice de refração}\end{pmatrix}$$

$E > V \Rightarrow$ meio transparente $\rightarrow e^{iKx} \rightarrow$ propagação

$E < V \Rightarrow$ meio "metálico" $\rightarrow e^{-\rho x} \rightarrow$ onda evanescente

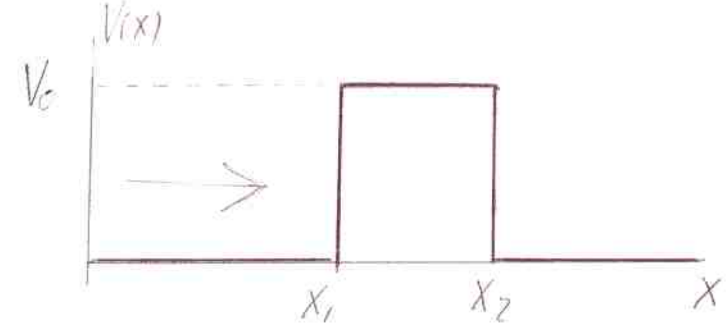
Exemplos:

$\alpha$. Potencial degrau e barreira de potencial



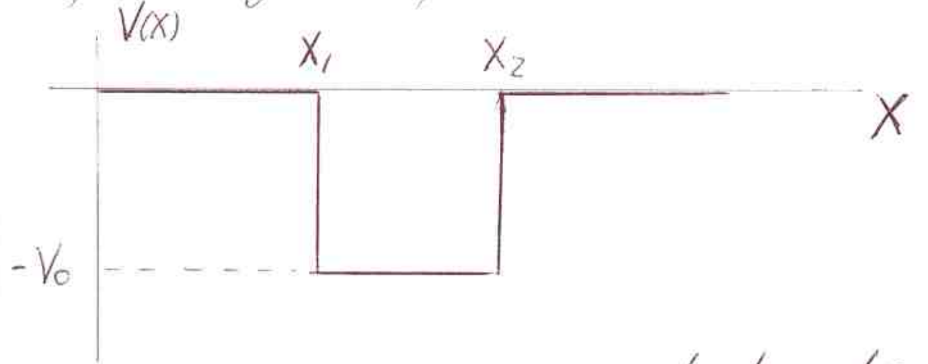

$E > V_0 \Rightarrow$ probabilidade $1 - \mathcal{P}$ de refletir e $\mathcal{P}$ de prosseguir

$E < V_0 \Rightarrow$ sempre reflete mas tem probabilidade não nula de ser encontrada em $x > x_1$




Se $E < V_0$ e $x_2 - x_1 \approx \frac{1}{\rho}$ parte da onda pode passar para $x > x_2 \Rightarrow$ (efeito túnel)

## B. Poço de potencial




$-V_0 < E < 0 \Rightarrow$ equivalente clássico de uma camada de ar entre dois meios reflexivos. Ocorre interferência destrutiva restando apenas ondas estacionárias de certos comprimentos de onda discretos confinadas no poço (modos normais) Energia negativas quantizadas.

$E > 0 \Rightarrow$ interferência múltipla entre as ondas refletidas em $x_1$ e $x_2$. Em geral, haverá uma probabilidade de reflexão, mas, para as "energias de ressonância" a probabilidade de transmissão é 1.