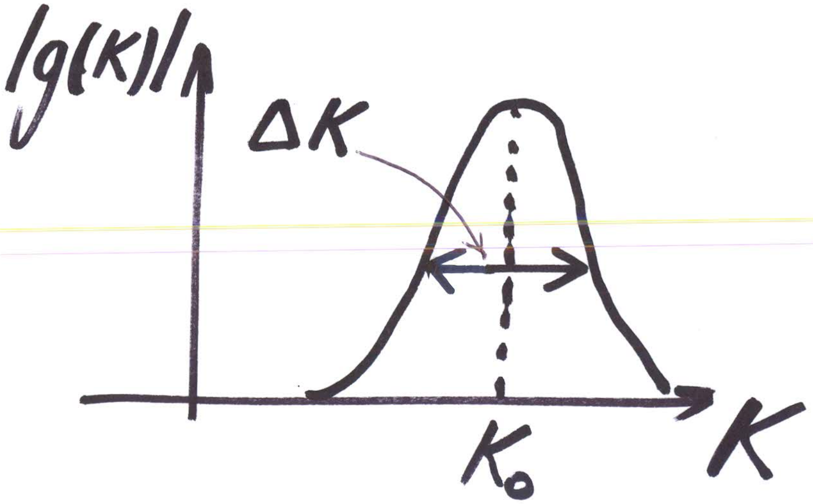
I.C.2. Forma do pacote de onda num dado instante

Lembrando que $\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(K)\, e^{iKx}\, dK$ (C-8)

Vamos assumir que $|g(K)|$ tem a forma:



Caso mais simples: $\Psi(x,0) = \Psi(x)$ é a superposição de apenas três ondas planas: K_0, $K_0 - \frac{\Delta K}{2}$, $K_0 + \frac{\Delta K}{2}$, com amplitudes: $1, 1/2, 1/2$

Ou seja: $$\Psi(x) = \frac{g(K_0)}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{iK_0 x} + \frac{1}{2}e^{i(K_0 - \frac{\Delta K}{2})x} + \frac{1}{2}e^{i(K_0 + \frac{\Delta K}{2})x}\right] = \frac{g(K_0)}{\sqrt{2\pi}}e^{iK_0 x}\left[1 + \cos\left(\frac{\Delta K}{2}x\right)\right]$$

Da Figura 4 temos:

* $|\Psi(x)|$ é máximo em $x=0$
* Interferência destrutiva quando nos afastamos de $x=0$

* Quando $x = \pm \frac{\Delta x}{2}$ com $\Delta x . \Delta K = 4\pi$ temos $|\Psi(x)| = 0$, ou seja, interferência destrutiva total.

* As larguras ΔK de $|g(K)|$ e Δx de $|\Psi(x)|$ são inversamente proporcionais

Voltando ao caso geral, seja: $g(K) = |g(K)| e^{i\alpha(K)}$

Se $\alpha(K)$ varia suavemente em $[K_0 - \frac{\Delta K}{2}, K_0 + \frac{\Delta K}{2}]$, onde $|g(K)|$ é apreciável, podemos expandir $\alpha(K)$ em torno de $K = K_0$: $\alpha(K) \approx \alpha(K_0) + (K - K_0) \left.\frac{d\alpha}{dK}\right|_{K=K_0}$

$-x_0$

Substituindo em $\Psi(x,0)$ temos:

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(K)\, e^{iKx}\, dK$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |g(K)|\, e^{i[\alpha(K_0) + (K-K_0)(-x_0)]}\, e^{iKx}\, dK$$

somando e subtraindo iK_0x na exponencial temos:

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(K)|\, e^{i(K-K_0)(x-x_0)}\, dK \right) e^{i(K_0x+\alpha(K_0))}$$

Da Fig. 5 vemos que, quando x se afasta de x_0 $|\Psi(x,0)|$ decresce. Essa queda se torna apreciável se $e^{i(K-K_0)(x-x_0)}$ oscila aproximadamente uma vez quando K atravessa o domínio ΔK.

Isto ocorre quando: $\Delta K . (x - x_0) \simeq 1$

(nota: $K = 2\pi/\lambda$, ou seja, está em unidades de 2π, que é o período de uma oscilação da fase complexa pura. Por isso a relação acima é "$\simeq 1$")

Se Δx é aproximadamente a largura do pacote de ondas, temos: $\Delta K \Delta x \gtrsim 1$

O fato importante é que $\Delta x . \Delta K$ está limitado por baixo. O valor exato do limite depende da definição detalhada das larguras Δx e ΔK.

Concluímos então que nosso pacote de ondas representa uma partícula cuja probabilidade de presença, num dado instante, é praticamente zero fora de um intervalo de largura aproximada Δx em torno de x_0.

I.C.3 - A relação de incerteza de Heisenberg

Onda plana $\Rightarrow$ * densidade de probabilidade constante ao longo do eixo Ox, para todo instante t $\Rightarrow$ $\Delta x = \infty$

* caracterizada por ω_0 e K_0 $\Rightarrow$ $E = \hbar\omega_0$ $p = \hbar K_0$ logo energia e momentum bem definidos e

$$g(K) = \delta(K - K_0)$$ $\rightarrow$ delta de Dirac

* $p = \hbar K$ $\Rightarrow$ auto-valor * e^{iKx} $\Rightarrow$ autovetor correspondente

* Todos os valores de K são permitidos ($K \in \mathbb{R}$), logo não há quantização.

Temos então a seguinte interpretação:

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(K)\, e^{iKx}\, dK$$

"soma"

coeficientes

autovalores

autovetores

decomposição espectral de $\Psi(x,0)$

É comum reescrever esta relação em termos de $p = \hbar K \Rightarrow dp = \hbar\, dK$. Substituindo:

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(K)\, e^{\frac{ipx}{\hbar}} \frac{dp}{\hbar} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \overline{\Psi}(p)\, e^{\frac{ipx}{\hbar}} dp$$

$g(K)/\sqrt{\hbar}$

$\Psi(x,0)$ e $\overline{\Psi}(p)$ são a transformada de Fourier uma da outra (ver Apêndice I). A transformada de Fourier é uma generalização da série de Fourier onde a função não precisa ser periódica. Pode-se mostrar a relação de Bessel-Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,0)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\overline{\Psi}(p)|^2 dp = \mathbb{C}.$$

Definindo $d\mathcal{P}(x) = \frac{1}{c} |\Psi(x,0)|^2 dx$, temos a probabilidade de encontrar a partícula entre x e $x+dx$, no instante $t=0$. Analogamente: $d\overline{\mathcal{P}}(p) = \frac{1}{c} |\overline{\Psi}(p)|^2 dp$ para a probabilidade do momentum p.

à desigualdade $\Delta x \Delta K \gtrsim 1$ do item
podemos reescrevê-la como:

$\Delta K \gtrsim 1 \Rightarrow \underbrace{\Delta x}_{\text{incerteza na posição}} \underbrace{\Delta p}_{\text{incerteza no momentum}} \gtrsim \hbar$ "relação da Incerteza de Heisenberg"

Δp

$\hbar \Delta K$ é a largura da curva
do $|\Psi(p)|$. Como $\hbar$ é muito pequeno
nsequências para física clássica, ou
clássico.

I-C-4 A evolução temporal de um pacote de onda livre

A velocidade de fase da onda plana é:

$$V_\varphi(K) = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda}{2\pi}\frac{2\pi}{T} = \frac{\omega}{K}$$

Para a luz: * no vácuo: $V_\varphi = c \rightarrow$ não depende de K, logo o pacote se move como um todo e não ocorre dispersão

* num meio: $V_\varphi = \dfrac{c}{n(K)}$ $\rightarrow$ índice de refração do meio
$\rightarrow$ ocorre dispersão

Nosso caso é equivalente ao meio dispersivo:

$$V_\varphi(K) = \frac{\omega}{K} = \frac{\hbar K^2}{2m}\frac{1}{K} = \frac{\hbar K}{2m}$$

Devido à dispersão, a velocidade do máximo x_m do pacote de onda não é igual à velocidade de fase média $\frac{\omega_0}{K_0} = \frac{\hbar K_0}{2m}$.

Retornando ao exemplo de soma de três ondas planas. Para um instante arbitrário t temos:

$$\psi(x,t) = \frac{g(K_0)}{\sqrt{2\pi}} \Big\{ e^{i(K_0 x - \omega_0 t)} + \frac{1}{2} e^{i[(K_0 - \frac{\Delta K}{2})x - (\omega_0 - \frac{\Delta \omega}{2})t]} + \frac{1}{2} e^{i[(K_0 + \frac{\Delta K}{2})x - (\omega_0 + \frac{\Delta \omega}{2})t]} \Big\} =$$

$$= \frac{g(K_0)}{\sqrt{2\pi}} e^{i(K_0 x - \omega_0 t)} \left[1 + \cos\left(\frac{\Delta K}{2} x - \frac{\Delta \omega}{2} t\right) \right]$$

Logo, o máximo está no ponto $x_M(t) = \frac{\Delta\omega}{\Delta K} t$ (o qual anula o argumento do cosseno) e não no ponto $x = \frac{\omega_0}{K_0} t$ (o qual anula o argumento da expon.).

A Fig 6 ilustra esse fato.

Em analogia com o item I-C.2 temos, para o caso geral: $\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(K)\, e^{i[Kx - \omega(K)t]} dK$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |g(K)|\, e^{i\alpha(K)}\, e^{-i\omega(K)t}\, e^{iKx}\, dK$$

$$e^{\underbrace{i[\alpha(K) - \omega(K)t]}_{\text{novo } \alpha(K)}}$$

Lembrando que [Eq. I (C-16)]:

$$x_M = -\left.\frac{d\alpha}{dK}\right|_{K=K_0} = \left.\frac{d\omega(K)}{dK}\right|_{K=K_0} t - \left.\frac{d\alpha(K)}{dK}\right|_{K=K_0} = vt + x_0$$

Assim: $V_G(K_0) = \left.\frac{d\omega}{dK}\right|_{K=K_0} = \left.\frac{d}{dK}\left(\frac{\hbar K^2}{2m}\right)\right|_{K=K_0} = \frac{\hbar K_0}{m} = \frac{p_0}{m}$

Então: $V_G(K_0) = \frac{2}{K_0}\frac{\hbar K_0^2}{2m} = \frac{2}{K_0}\omega_0 = 2\frac{\omega_0}{K_0} = 2V_\varphi(K_0)$

Note que a velocidade de grupo $V_G(K_0)$, que é a velocidade do centro do pacote de ondas, recupera a velocidade clássica $v_0 = \frac{p_0}{m}$, no limite onde essa descrição pode ser feita (Δx e Δp dezprezíveis).