Complemento B_{II} : Revisão de algumas propriedades úteis de operadores lineares

• Traço de um operador :

$$\mathrm{Tr}\, A = \sum_i A_{ii} = \sum_i \langle u_i | A | u_i \rangle \qquad \text{(p/ base discreta)}$$

$$\mathrm{Tr}\, A = \int d\alpha \, \langle w_\alpha | A | w_\alpha \rangle \qquad \text{(p/ base contínua)}$$

* o traço é invariante, ou seja independe da base: $\sum_i \langle u_i | A | u_i \rangle = \sum_k \langle t_k | A | t_k \rangle$

• Algumas Propriedades

▸ $\mathrm{Tr}\, AB = \mathrm{Tr}\, BA$

dem: $\mathrm{Tr}\, AB = \sum_i \langle u_i | AB | u_i \rangle = \sum_{ij} \langle u_i | A | u_j \rangle \langle u_j | B | u_i \rangle$

$= \sum_{ij} \langle u_j | B | u_i \rangle \langle u_i | A | u_j \rangle = \sum_j \langle u_j | BA | u_j \rangle$

$= \mathrm{Tr}\, BA$

▸ $\mathrm{Tr}\, ABC = \mathrm{Tr}\, BCA = \mathrm{Tr}\, CAB$

• Álgebra de Comutadores

def: $[A, B] = AB - BA$

p/ a verificação das propriedades a seguir basta escrever explicitamente os dois lados

Propriedades:

$[A,B] = -[B,A]$

$[A,(B+C)] = [A,B] + [A,C]$

$[A,BC] = [A,B]C + B[A,C]$

$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$

$[A,B]^\dagger = [B^\dagger, A^\dagger]$

- Funções de Operadores

- A^n : corresponde a aplicar n vezes o operador A
- A^{-1} : $A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}$ (se A^{-1} existe)

- $F(A) = ?$

se $F(z)$ é uma fção da variável z, e assumindo que ela pode ser expandida numa série:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$$

Então, por definição: $F(A) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n A^n$

Exemplo: Operador $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n = \mathbb{1} + A + \frac{A^2}{2!} + \dots$

se $A|\varphi_a\rangle = a|\varphi_a\rangle$ então $A^n|\varphi_a\rangle = a^n|\varphi_a\rangle$

mas $F(A) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n A^n$ assim:

$$F(A)|\varphi_a\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f_n A^n|\varphi_a\rangle = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} f_n a^n}|\varphi_a\rangle$$

$$= F(a)|\varphi_a\rangle$$

ou seja: $F(A)|\varphi_a\rangle = F(a)|\varphi_a\rangle$

lembrando $\{|\varphi_a\rangle\}$ são autovetores de A
$\{a\}$ são autovalores de A

* Assim se $|\varphi_a\rangle$ é um autovetor de A com autovalor a, então $|\varphi_a\rangle$ também é um autovetor de F(A) com autovalor F(a) *

* Seja A um operador diagonalizável (esse sempre é o caso de um observável). Escolhemos uma base na qual A é diagonal (seus elementos diagonais são os autovalores a_i de A) Por definição F(A) é o operador que é representado nessa base pelos elementos diagonais $F(a_i)$.

Exemplo:

Seja $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Segue da definição que:

$$e^{\sigma_z} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix}$$

$$e^A e^B = \sum_p \frac{A^p}{p!} \sum_q \frac{B^q}{q!} = \sum_{p,q} \frac{A^p B^q}{p!\,q!}$$

$$e^B e^A = \sum_q \frac{B^q}{q!} \sum_p \frac{A^p}{p!} = \sum_{p,q} \frac{B^q A^p}{p!\,q!}$$

em geral são diferentes

se $[A,B]=0 \quad e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$

· O operador Potencial

Seja $V(X)$ o operador potencial que é uma função do operador posição X

Da seção anterior temos:

$V(X)|x\rangle = V(x)|x\rangle$

$\langle x'|V(X)|x\rangle = V(x)\langle x'|x\rangle = V(x)\,\delta(x-x')$

$\langle x|V(X)|\psi\rangle = V(x)\,\langle x|\psi\rangle = V(x)\,\psi(x)$

O que mostra a eq. acima é que a atuação do operador $V(X)$ na representação $\{|x\rangle\}$ é simplesmente a multiplicação por $V(x)$

Generalizando para o caso em 3 dimensões:

$V(\vec{R})|\vec{r}\rangle = V(\vec{r})|\vec{r}\rangle$

$\langle\vec{r}|V(\vec{R})|\vec{r}'\rangle = V(\vec{r})\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')$

$\langle\vec{r}|V(\vec{R})|\psi\rangle\ V(\vec{r})\,\psi(\vec{r})$

· Comutadores envolvendo funções de operadores

$[A, F(A)] = 0$

se $[A,B] = 0 \Rightarrow [B, F(A)] = 0$

sabemos que: $[X,P] = i\hbar$

$[X,P^2] = [X,PP] = [X,P]P + P[X,P]$ (ver propriedades)

$= 2i\hbar P$

Generalizando: $[X, P^n] = i\hbar\, n\, P^{n-1}$

$$[X, P^{n+1}] = [X, PP^n] = [X,P]P^n + P[X,P^n]$$
$$= i\hbar P^n + i\hbar n P P^{n-1} = i\hbar\,(n+1)\,P^n$$

$$[X, F(P)] = \sum_n [X, f_n P^n] = \sum_n i\hbar\, n\, f_n P^{n-1}$$

$$[X, F(P)] = i\hbar F'(P)$$

$$[P, G(X)] = -i\hbar G'(X)$$