## 11.1 Questionário

**Q11-3.**

O vetor que representa a velocidade angular de rotação de uma roda em torno de um eixo fixo tem de estar necessariamente sobre este eixo?

▶ Sim, o vetor velocidade angular define o eixo de rotação. Mesmo quando o eixo não é fixo, o vetor está dirigido ao longo desse eixo, como no caso do movimento de um pião. A velocidade angular de precessão também é um vetor dirigido ao longo da direção em torno da qual o eixo do pião precessiona.

**Q11-8.**

Por que é conveniente expressar $\alpha$ em revoluções por segundo ao quadrado na expressão $\theta = \omega_o\, t + \frac{1}{2}\alpha\, t^2$ e não na expressão $a_t = \alpha\, r$?

▶ Porque na equação $\theta = \omega_o\, t + \frac{\alpha\, t^2}{2}$, $\theta$ e $\omega_o$ também são quantidades mensuráveis em revoluções e revoluções por segundo, respectivamente. Mas na equação $a_t = \alpha\, r$, para se obter a aceleração linear em m/s$^2$, $\alpha$ deve ser expressa em radianos/s$^2$.

**Q11-9.**

Um corpo rígido pode girar livremente em torno de um eixo fixo. É possível que a aceleração angular deste corpo seja diferente de zero, mesmo que a sua velocidade angular seja nula (talvez, instantaneamente)? Qual o equivalente linear desta situação? Ilustre ambas as situações com exemplos.

▶ Sim. Se o corpo rígido for submetido a uma desaceleração, sua velocidade angular eventualmente será nula, e depois começrá a crscer no sentido contrário. O equivalente linear dessa situação pode ser a de um corpo jogado verticalmente para cima; sua velocidade zera no ponto mais alto da trajetória e ele torna a cair.

**Q11-13.**

Imagine uma roda girando sobre o seu eixo e considere um ponto em sua borda. O ponto tem aceleração radial, quando a roda gira com velocidade angular constante? Tem aceleração tangencial? Quando ela gira com aceleração angular constante, o ponto tem aceleração radial? Tem aceleração tangencial? Os módulos dessas acelerações variam com o tempo?

▶ Sim, a aceleração radial é $a_r = \omega^2\, r$. A aceleração tangencial é nula nesse caso. Girando com aceleração angular constante, o ponto da borda tem aceleração radial $a_r(t) = (\alpha\, t)^2\, r$ e aceleração tangencial $a_t = \alpha\, r$, constante.

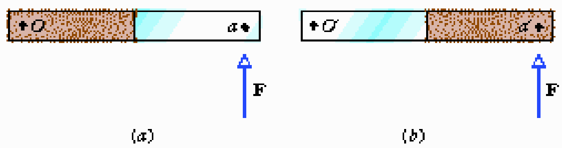
**Q11-15.**

Qual a relação entre as velocidades angulares de um par de engrenagens acopladas, de raios diferentes?

▶ Pontos da borda das engrenagens tem a mesma velocidade linear: $\omega_1\, r_1 = \omega_2\, r_2$. Assim, a engrenagem que tem o menor raio, tem a maior velocidade angular.

**Q11-21.**

A Fig. 11.25$a$ mostra uma barra de 1 m, sendo metade de madeira e metade de metal, fixada por um eixo no ponto $O$ da extremidade de madeira. Uma força **F** é aplicada ao ponto $a$ da extremidade de metal. Na Fig. 11.25$b$, a barra é fixada por um eixo em $O\prime$ na extremidade de metal e a mesma força é aplicada ao ponto $a\prime$ da extremidade de madeira. A aceleração angular é a mesma para os dois casos? Se não, em que caso ela é maior?




[Fig. 11-25 Enlarged.] Question 21.

▶ A densidade dos metais é maior do que das madeiras, tal que na situação (b), o momento de inércia da barra em relação ao ponto $O\prime$ é maior do que no caso (a). Assim, pela relação $\tau = I\,\alpha$, vem que $I_{(a)}\,\alpha_{(a)} = I_{(b)}\,\alpha_{(b)}$. As acelerações angulares não são iguais nos dois casos, sendo $\alpha_{(a)} > \alpha_{(b)}$.

## 11.2 Exercícios e Problemas

### Seção 11-2 As Variáveis de Rotação

**11-6P.**

Uma roda gira com uma aceleração angular $\alpha$ dada por $\alpha = 4at^3 - 3bt^2$, onde $t$ é o tempo, e $a$ e $b$ são constantes. Se $\omega_o$ é a velocidade inicial da roda, deduza as equações para (a) a velocidade angular e (b) o deslocamento angular em função do tempo.

▶ (a) Para obter a velocidade angular, basta integrar a aceleração angular dada:

$$\int_{\omega_o}^{\omega} d\omega' = \int_0^t \alpha\, dt'$$

$$\omega - \omega_o = a\,t^4 - b\,t^3$$

$$\omega(t) = \omega_o + a\,t^4 - b\,t^3$$

(b) O deslocamento angular é obtido integrando a velocidade angular:

$$\int_{\theta_o}^{\theta} d\theta' = \int_0^t \omega\, dt'$$

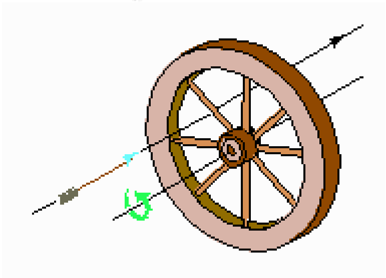
$$\theta - \theta_o = \omega_o\, t + a\,\frac{t^5}{5} - b\,\frac{t^4}{4}$$

$$\theta(t) = \theta_o + a\,\frac{t^5}{5} - b\,\frac{t^4}{4}$$

---

**11-10P (11-6P/6ª)**

Uma roda tem oito raios de 30 cm. Está montada sobre um eixo fixo e gira a 2.5 rev/s. Você pretende atirar uma flecha de 20 cm de comprimento através da roda, paralelamente ao seu eixo, sem que a flecha colida com qualquer raio. Suponha que tanto a flecha quanto os raios sejam muito finos; veja a Fig. 11.26. (a) Qual a velocidade mínima que a flecha deve ter? (b) A localização do ponto que você mira, entre o eixo e a borda da roda, tem importância? Em caso afirmativo, qual a melhor localização?



[Fig. 11-26 Enlarged.] Problem 10.

▶ (a) O ângulo entre dois raios consecutivos é $\pi/4$ e o tempo necessário para percorrê-lo é

$$t = \frac{\theta}{\omega} = \frac{\pi/4}{5\pi} = 0.05 \text{ s}.$$

A velocidade mínima da flecha deve ser então

$$v = \frac{l}{t} = \frac{0.20}{0.05} = 4 \text{ m/s}.$$

(b) Não, se a velocidade angular permanece constante.

---

**11-15E.**

O volante de um motor está girando a 25 rad/s. Quando o motor é desligado, o volante desacelera a uma taxa constante até parar em 20 s. Calcule (a) a aceleração angular do volante (em rad/s$^2$), (b) o ângulo percorrido (em rad) até parar e (c) o número de revoluções completadas pelo volante até parar.

▶ (a) Sendo $\omega_o = 25$ rad/s, tem-se

$$\omega = \omega_o - \alpha\, t = 0$$

$$\alpha = \frac{\omega_o}{t} = \frac{25}{20} = 1.25 \text{ rad/s}^2.$$

(b) O ângulo percorrido é

$$\theta = \omega_o\, t - \alpha\,\frac{t^2}{2}$$

$$\theta = 250 \text{ rad}.$$

(c) Para o número de revoluções $N$, temos

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = 39.80 \text{ revoluções}.$$

---

**11-23P (11-16P/6ª)**

Um disco gira em torno de um eixo fixo, partindo do repouso com aceleração angular constante até alcançar a rotação de 10 rev/s. Depois de completar 60 revoluções, sua velocidade angular é 15 rev/s. Calcule (a) a aceleração angular, (b) o tempo necessário para completar as 60 revoluções, (c) o tempo necessário para alcançar a velocidade angular de 10 rev/s e (d) o número de revoluções desde o repouso até a velocidade de 10 rev/s.

▶ (a) A velocidade angular do disco aumenta de $\omega_o =$ 10 rad/s para $\omega = 15$ rad/s no intervalo necessário para completar as $\theta = 60$ revoluções. Da relação

$$\omega^2 = \omega_o^2 + 2\,\alpha\,\theta$$

obtemos que a aceleração angular é

$$\alpha = \frac{\omega^2 - \omega_o^2}{2\,\theta} = \frac{15^2 - 10^2}{(2)(60)} = \frac{125}{120} = 1.04 \text{ rev/s}^2.$$

(b) O tempo necessário para as 60 voltas é

$$t = \frac{\omega - \omega_o}{\alpha} = \frac{15 - 10}{1.04} = 4.8 \text{ s}.$$

(c) O tempo até alcançar 10 rad/s é

$$t' = \frac{\omega_o}{\alpha} = \frac{10}{1.04} = 9.62 \text{ s}.$$

(d) E o número de voltas dadas no intervalo é

$$\theta = \frac{\omega_o^2}{2\alpha} = 48 \text{ revoluções}.$$

---

**Seção 11-5 As Variáveis Lineares e Angulares**

**11-29E.**

Uma turbina com 1.20 m de diâmetro está girando a 200 rev/min. (a) Qual a velocidade angular da turbina em rad/s? (b) Qual a velocidade linear de um ponto na sua borda? (c) Que aceleração angular constante (rev/min$^2$) aumentará a sua velocidade para 1000 rev/min em 60 s? (d) Quantas revoluções completará durante esse intervalo de 60 s?

▶ (a) A velocidade angular em rad/s é

$$\omega = \frac{(200)(2\pi)}{60} = 20.94 \text{ rad/s}.$$

(b) Qualquer ponto da borda da turbina move-se à velocidade

$$v = \omega r = (20.94)(0.60) = 12.56 \text{ m/s}.$$

(c) A aceleração angular necessária é

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_o}{t} = \frac{1000 - 200}{1.0} = 800 \text{ rev/min}^2.$$

(d) O número do voltas no intervalo de 1.0 minuto é

$$\theta = \frac{\omega^2 - \omega_o^2}{2\alpha} = 600 \text{ rev}.$$

---

**11-34E.**

Uma certa moeda de massa $M$ é colocada a uma distância $R$ do centro do prato de um toca-discos. O coeficiente de atrito estático é $\mu_e$. A velocidade angular do toca-discos vai aumentando lentamente até $\omega_o$, quando, neste instante, a moeda escorrega para fora do prato. (a) Determine $\omega_o$ em função das grandezas $M$, $R$, $g$ e $\mu_e$. (b) Faça um esboço mostrando a trajetória aproximada da moeda, quando é projetada para fora do toca-discos.

► (a) A moeda está sob a ação da força centrípeta

$$F = M\omega^2 R.$$

Quando o prato atinge a velocidade $\omega_o$, a força centrípeta é igual à máxima força de atrito estático:

$$M\omega^2 R = \mu_e M g$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{\mu_e g}{R}}$$

(b) A moeda é projetada tangencilamente, seguindo uma trajetória retilínea.

---

**11-36P.**

A turbina de um motor a vapor gira com uma velocidade angular constante de 150 rev/min. Quando o vapor é desligado, o atrito nos mancais e a resistência do ar param a turbina em 2.2 h. (a) Qual a aceleração angular constante da turbina, em rev/min$^2$, durante a parada? (b) Quantas revoluções realiza antes de parar? (c) Qual a componente tangencial da aceleração linear da partícula situada a 50 cm do eixo de rotação, quando a turbina está girando a 75 rev/min? (d) Em relação à partícula do item (c), qual o módulo da aceleração linear resultante?

► (a) O intervalo dado corresponde a 132 min. A aceleração angular é

$$\alpha = \frac{\omega_o}{t} = 1.136 \text{ rev/min}^2.$$

(b) O número de voltas até parar é

$$\theta = \frac{\omega_o^2}{2\alpha} = 9903 \text{ rev}.$$

(c) Para obter a aceleração linear tangencial em unidades SI, a aceleração angular deve estar expressa em rad/s$^2$. Fazendo a conversão, obtemos $\alpha = 1.98 \times 10^{-3}$ rad/s$^2$ e

$$a_t = \alpha r = 9.91 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2.$$

(d) A velocidade angular $\omega = 75$ rev/min corresponde a 7.85 rad/s e

$$a_r = \omega^2 r = 30.81 \text{ m/s}^2.$$

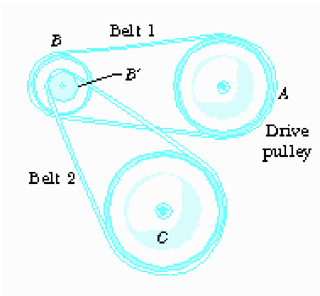
Portanto, o módulo da aceleração linear resultante é

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = 30.81 \text{ m/s}^2.$$

---

**11-42P.**

Quatro polias estão conectadas por duas correias conforme mostrado na Fig. 11 − 30. A polia $A$ (15 cm de raio) é a polia motriz e gira a 10 rad/s. A $B$ (10 cm de raio) está conectada à $A$ pela correia 1. A $B'$ (5 cm de raio) é concêntrica à $B$ e está rigidamente ligada a ela. A polia $C$ (25 cm de raio) está conectada à $B'$ pela correia 2. Calcule (a) a velocidade linear de um ponto na correia 1, (b) a velocidade angular da polia $B$, (c) a velocidade angular da polia $B'$, (d) a velocidade linear de um ponto na correia 2 e (e) a velocidade angular da polia $C$.




[Fig. 11-30 Enlarged.] Problem 42.

► (a) A velocidade linear de qualquer ponto da correia 1 é

$$v_1 = \omega_A r_A = 1.5 \text{ m/s}.$$

(b) A velocidade $v_1$ é a velocidade dos pontos da borda da polia $B$, cuja velocidade angular é então

$$\omega_B = \frac{v_1}{r_B} = 15 \text{ rad/s}.$$

(c) As polias $B$ e $B'$ giram em torno do mesmo eixo, de modo que

$$\omega_{B'} = \omega_B = 15 \text{ rad/s}.$$

(d) A velocidade linear de qualquer ponto da correia 2 é

$$v_2 = \omega_{B'} r_{B'} = 0.75 \text{ m/s}.$$

(e) Os pontos da borda da polia $C$ tem velocidade linear $v_2$. Portanto,

$$\omega_C = \frac{v_2}{r_C} = 3 \text{ rad/s}.$$

### Seção 11-6 Energia Cinética de Rotação

**11-46P.**

A molécula de oxigênio, $O_2$, tem massa total de $5.3\times10^{-26}$ kg e um momento de inércia de $1.94\times10^{-46}$ kg-m$^2$, em relação ao eixo que atravessa perpendicularmente a linha de junção dos dois átomos. Suponha que essa molécula tenha em um gás a velocidade de 500 m/s e que sua energia cinética de rotação seja dois terços da energia cinética de transla c cão. Determine sua velocidade angular.

▶ Com a relação dada entre as energias cinéticas, temos

$$\begin{aligned} K_{\text{rot.}} &= \tfrac{2}{3}\,K_{\text{trans.}} \\ \tfrac{1}{2}\,I\,\omega^2 &= \tfrac{2}{3}\,\left(\tfrac{1}{2}\,m\,v^2\right) \end{aligned}$$

Introduzindo os valores de $m$, $I$ e $v$, obtemos $\omega = 6.75\times10^{12}$ rad/s.

### Seção 11-7 Cálculo do Momento de Inércia

**11-49E.**

As massas e as coordenadas de quatro partículas são as seguintes: 50 g, $x = 2$ cm, $y = 2$ cm; 25 g, $x = 0$, $y = 4$ cm; 25 g, $x = -3$ cm, $y = -3$ cm; 30 g, $x = -2$ cm, $y = 4$ cm. Qual o momento de inércia do conjunto em relação (a) ao eixo $x$, (b) ao eixo $y$ e (c) ao eixo $z$? (d) Se as respostas para (a) e (b) forem, respectivamente, $A$ e $B$, então qual a resposta para (c) em função de $A$ e $B$?

▶ Este exercício é uma aplicação do teorema dos eixos perpendiculares, não apresentado dentro do texto. Este teorema é válido para distribuições de massa contidas num plano, como placas finas. Aqui temos uma distribuição discreta da massa no plano $xy$. Vamos indicar as massas por $m_i$ e coordenadas $x_i$ e $y_i$ na ordem em que aparecem no enunciado.

(a) Momento de inércia em relação ao eixo $x$: a distância das partículas ao eixo é medida no eixo $y$

$$\begin{aligned} I_x &= \sum_i m_i y_i^2 \\ &= m_1 y_1^2 + m_2 y_2^2 + m_3 y_3^2 + m_4 y_4^2 \\ &= 1.305\times10^{-4}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2. \end{aligned}$$

(b) Para o cálculo do momento de inércia em relação ao eixo $y$, a distância da partícula ao eixo é medida ao longo do eixo $x$:

$$\begin{aligned} I_y &= \sum_i m_i x_i^2 \\ &= m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + m_3 x_3^2 + m_4 x_4^2 \\ &= 5.45\times10^{-2}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2. \end{aligned}$$

(c) Para o eixo $z$, temos

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2,\ \text{com}\ r_i^2 = x_i^2 + y_i^2.$$

Os cálculos fornecem $I_z = 1.9\times10^{-4}$ kg$\cdot$ m$^2$.

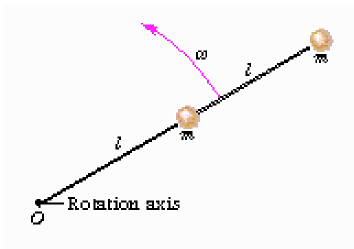
(d) Somando os valores obtidos para $I_x$ e $I_y$, confirmamos a relação

$$I_z = I_x + I_y,$$

que podemos identificar como o teorema dos eixos perpendiculares.

**11-51E.**

Duas partículas, de massa $m$ cada uma, estão ligadas entre si e a um eixo de rotação em $O$ por dois bastões delgados de comprimento $l$ e massa $M$ cada um, conforme mostrado na Fig. $11-32$. O conjunto gira em torno do eixo de rotação com velocidade angular $\omega$. Determine, algebricamente, as expressões (a) para o momento de inércia do conjunto em relação a $O$ e (b) para a energia cinética de rotação em relação a $O$.




[Fig. 11-32 Enlarged.] Exercise 51.

▶ (a) O momento de inércia para o eixo passando por $O$ é

$$\begin{aligned} I_O &= ml^2 + m(2l)^2 + \frac{Ml^2}{3} + \frac{Ml^2}{12} + M\left(\frac{3l}{2}\right)^2 \\ &= 5ml^2 + \frac{8Ml^2}{3} \end{aligned}$$

(b) A energia cinética de rotação é

$$\begin{aligned} K &= \tfrac{1}{2}\,I\omega^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\left(5ml^2 + \tfrac{8}{3}\,Ml^2\right)\omega^2 \\ &= \left(\tfrac{5}{2}\,m + \tfrac{4}{3}\,M\right) l^2\omega^2 \end{aligned}$$

**11-58P.**

(a) Mostre que o momento de inércia de um cilindro sólido, de massa $M$ e raio $R$, em relação a seu eixo central é igual ao momento de inércia de um aro fino de massa $M$ e raio $R/\sqrt{2}$ em relação a seu eixo central. (b) Mostre que o momento de inércia $I$ de um corpo qualquer de massa $M$ em relação a qualquer eixo é igual ao momento de inércia de um *aro equivalente* em relação a esse eixo, se o aro tiver a mesma massa $M$ e raio $k$ dado por

$$k = \frac{\sqrt{I}}{M}.$$

O raio $k$ do aro equivalente é chamado de *raio de giração* do corpo.

▶ (a) Os momentos de inércia, em relação aos eixos mencionados, do aro e do cilindro são

$$I_A = MR^2 \;\text{ e }\; I_A = \tfrac{1}{2}\, MR^2.$$

Para que estes momentos de inércia sejam iguais, o aro deve ter um certo raio $R'$:

$$\begin{aligned} I_A &= I_C \\ MR'^2 &= \tfrac{1}{2}\, MR^2 \\ R' &= \frac{R}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(b) Igualando os momentos de inércia mencionados, temos

$$I = I_A = Mk^2.$$

Do que obtemos diretamente

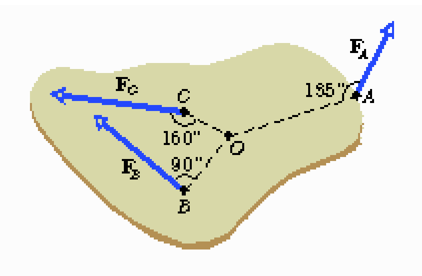
$$k = \sqrt{\frac{I}{M}}.$$

---

**Seção 11-8 Torque**

**11-64P.**

Na Fig. $11-36$, o corpo está fixado a um eixo no ponto $O$. Três forças são aplicadas nas direções mostradas na figura: no ponto $A$, a 8 m de $O$, $F_A = 10$ N; no ponto $B$, a 4 m de $O$, $F_B = 16$ N; no ponto $C$, a 3 m de $O$, $F_C = 19$ N. Qual o torque resultante em relação a $O$?




[Fig. 11-36 Enlarged.] Problem 64.

▶ Calculamos o torque produzido por cada uma das forças dadas:

$$\begin{aligned} \tau_A &= r_A F_A sen\, 45^o = 56.57 \text{ N-m, anti-horário,} \\ \tau_B &= r_B F_B sen\, 90^o = 64 \text{ N-m, horário,} \\ \tau_C &= r_C F_C sen\, 20^o = 19.50 \text{ N-m, anti-horário.} \end{aligned}$$

Tomando o sentido positivo para fora do plano da página, somamos os valores obtidos acima para ter o torque resultante:

$$\begin{aligned} \tau_R &= \tau_A - \tau_B + \tau_C \\ &= 12.07 \text{ N-m, anti-horário} \end{aligned}$$

---

**Seção 11-9 A Segunda Lei de Newton para a Rotação**

**11-70P.**

Uma força é aplicada tangencialmente à borda de uma polia que tem 10 cm de raio e momento de inércia de $1 \times 10^{-3}$ kg-m$^2$ em relação ao seu eixo. A força tem módulo variável com o tempo, segundo a relação $F = 0.50\,t + 0.30\,t^2$, com $F$ em Newtons e $t$ em segundos. A polia está inicialmente em repouso. Em $t = 3$ s, quais são (a) a sua aceleração angular e (b) sua velocidade angular?

▶ (a) O torque atuando sobre a polia no instante considerado é

$$\tau(t = 3.0) = rF(t = 3.0) = 0.42 \text{ N-m}.$$

A aceleração angular neste instante é

$$\alpha(t = 3.0) = \frac{\tau}{I} = 42 \text{ rad/s}^2.$$

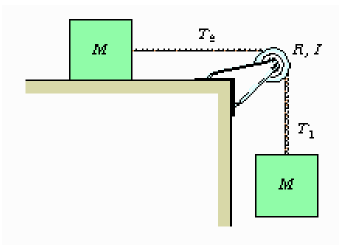
(b) Obtemos a velocidade angular integrando a função $\alpha(t)$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega} d\omega' &= \int_0^t (50t' + 30t'^2)dt' \\ \omega(t) &= 25t^2 + 10t^3 \\ \omega(t = 3.0) &= 495 \text{ rad/s}. \end{aligned}$$

---

**11-75P.**

Dois blocos idênticos, de massa $M$ cada um, estão ligados por uma corda de massa desprezível, que passa por uma polia de raio $R$ e de momento de inércia $I$ (veja Fig. $11-40$). A corda não desliza sobre a polia; desconhece-se existir ou não atrito entre o bloco e a mesa; não há atrito no eixo da polia. Quando esse sistema é liberado, a polia gira de um ângulo $\theta$, num tempo $t$, e a aceleração dos blocos é constante. (a) Qual a aceleração angular da polia? (b) Qual a aceleração dos dois blocos? (c) Quais as tensões na parte superior e inferior da corda? Todas essas respostas devem ser expressas em função de $M$, $I$, $R$, $\theta$, $g$ e $t$.




[Fig. 11-40 Enlarged.] Problem 75.

▶ (a) Se o sistema parte do repouso e a aceleração é constante, então $\theta = \alpha\, t^2/2$ e

$$\alpha = \frac{2\theta}{t^2}.$$

(b) Desconsiderando qualquer atrito, a aceleração das massas é a aceleração dos pontos da borda da polia:

$$a = \alpha R = \frac{2\theta R}{t^2}.$$

(c) Chamemos $T_1$ a tensão na parte vertical da corda. Tomando o sentido para baixo como positivo, escrevemos

$$Mg - T_1 = Ma.$$

Com a aceleração obtida acima, a tensão $T_1$ é

$$T_1 = M\left(g - \frac{2\theta R}{t^2}\right).$$

Aplicando a segunda Lei rotacional para a polia ( escolhendo o sentido horário como positivo), temos

$$(T_1 - T_2)R = I\alpha.$$

Tirando $T_2$, vem

$$T_2 = Mg - \frac{2M\theta R}{t^2} - \frac{2I\theta}{Rt^2}.$$

---

**11-77P.**

Uma chaminé alta, de forma cilíndrica, cai se houver uma ruptura na sua base. Tratando a chaminé como um bastão fino, de altura $h$, expresse (a) a componente radial da aceleração linear do topo da chaminé, em função do ângulo $\theta$ que ela faz com a vertical, e (b) a componente tangencial dessa mesma aceleração. (c) Em que ângulo $\theta$ a aceleração é igual a $g$?

▶ (a) A componente radial da aceleração do topo da chaminé é $a_r = \omega^2 h$. Podemos obter $\omega$ usando o princípio da conservação da energia. Para um ângulo $\theta$ qualquer, temos

$$mg\frac{h}{2} = mg\frac{h}{2}\cos\theta + \tfrac{1}{2}I\omega^2.$$

Com $I = mh^2/3$, obtemos

$$\omega^2 = \frac{3g(1-\cos\theta)}{h},$$

e aceleração radial do topo então é

$$a_r = 3g(1-\cos\theta).$$

(b) Para obter a componente tangencial da aceleração do topo, usamos agora a segunda Lei na forma rotacional:

$$\begin{aligned} \tau &= I\alpha \\ mg\frac{h}{2}sen\,\theta &= \tfrac{1}{3}mh^2\alpha \end{aligned}$$

Com $\alpha = 3g sen\,\theta/2h$, chegamos à aceleração pedida

$$a_t = \alpha h = \tfrac{3}{2}\, g\, sen\,\theta.$$

(c) A aceleração total do topo é

$$a^2 = 9g^2(1-\cos\theta)^2 + \tfrac{9}{4}\, g^2 sen^2\theta.$$

Fazendo $a = g$, e alguma álgebra, obtemos uma equação do segundo grau para a variável $\cos\theta$, cuja raiz fornece $\theta = 34.5^\circ$.

---

## Seção 11-10 Trabalho, Potência e Teorema do Trabalho-Energia Cinética

**11-82P.**

Uma régua, apoiada no chão verticalmente por uma das extremidades, cai. Determine a velocidade da outra extremidade quando bate no chão, supondo que o extremo apoiado não deslize. (*Sugestão*: considere a régua como um bastão fino e use o princípio de conservação de energia.)

▶ Seguindo a sugestão dada, temos

$$mg\frac{l}{2} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{3}ml^2\right)\omega^2,$$

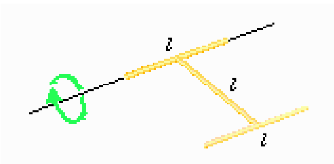
que fornece $\omega = \sqrt{3g/l}$. Portanto, a velocidade da extremidade da régua, quando bate no chão, é

$$v = \omega l = \sqrt{3gl}.$$

---

**11-83P.**

Um corpo rígido é composto por três hastes finas, idênticas, de igual comprimento $l$, soldadas em forma de H (veja Fig. 11−41). O corpo gira livremente em volta de um eixo horizontal que passa ao longo de uma das pernas do H. Quando o plano de H é horizontal, o corpo cai, a partir do repouso. Qual a velocidade angular do corpo quando o plano do H passa pela posição vertical?




[Fig. 11-41 Enlarged.] Problem 83.

▶ O momento de inércia do corpo rígido para o eixo mencionado é

$$I = \tfrac{1}{3}ml^2 + ml^2 = \tfrac{4}{3}ml^2.$$

Usando o princípio da conservação da energia, temos

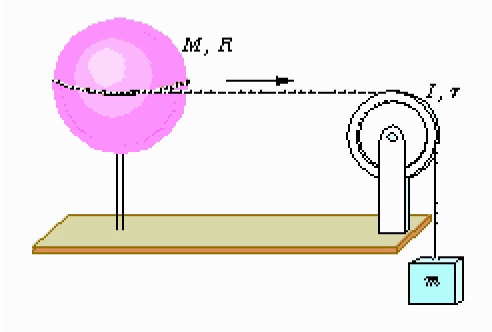
$$3mg\frac{l}{2} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{4}{3}ml^2\right)\omega^2,$$

e, tirando a velocidade angular, resulta

$$\omega = \tfrac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

**11-86P.**

Uma casca esférica uniforme, de massa $M$ e raio $R$, gira sobre um eixo vertical, sem atrito (veja Fig. $11-42$). Uma corda, de massa desprezível, passa em volta do equador da esfera e prende um pequeno corpo de massa $m$, que pode cair livremente sob a ação da gravidade. A corda prende o corpo através de uma polia de momento de inércia $I$ e raio $r$. O atrito da polia em relação ao eixo é nulo e a corda não desliza na polia. Qual a velocidade do corpo, depois de cair de uma altura $h$, partindo do repouso? Use o teorema do trabalho-energia.




[Fig. 11-42 Enlarged.] Problem 86.

▶ Seguindo a sugestão do enunciado, o trabalho realizado pela gravidade sobre a massa $m$ é $W = mgh$. Como o sistema parte do repouso, a variação da energia cinética é

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega_p^2 + \tfrac{1}{2}I_c\omega_c^2,$$

onde $\omega_p$ é a velocidade angular da polia e $I_c$ e $\omega_c$ são o momento de inércia e a velocidade angular da casca esférica. A velocidade de $m$ é também a velocidade linear dos pontos da borda da polia e dos pontos do equador da casca esférica. Então podemos expressar as velocidades angulares em termos da velocidade linear da massa $m$:

$$\omega_p = \frac{v}{r} \quad \text{e} \quad \omega_c = \frac{v}{R}.$$

Após essas considerações, temos, finalmente

$$\begin{aligned} W &= \Delta K \\ mgh &= \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\frac{v^2}{r^2} + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{3}MR^2\right)\frac{v^2}{R^2} \\ &= \tfrac{1}{2}\left(m + \frac{I}{r^2} + \tfrac{2}{3}M\right)v^2 \end{aligned}$$

Tirando a velocidade $v$, obtemos

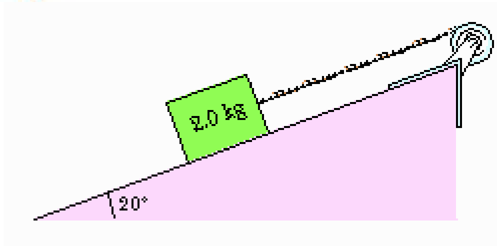
$$v^2 = \frac{2mgh}{m + I/r^2 + 2M/3}.$$

Lembrando a equação de movimento $v^2 = 2ah$, podemos facilmente destacar a aceleração do resultado obtido, à qual chegamos se resolvemos o problema usando a segunda Lei.

## 11.3 Problemas Adicionais

**11-91.**

Uma polia de 0.20 m de raio está montada sobre um eixo horizontal sem atrito. Uma corda, de massa desprezível, está enrolada em volta da polia e presa a um corpo de 2 kg, que desliza sem atrito sobre uma superfície inclinada de 20° com a horizontal, conforme mostrado na Fig. 11-43. O corpo desce com uma aceleração de 2 m/s$^2$. Qual o momento de inércia da polia em torno do eixo de rotação?




[Fig. 11-43 Enlarged.] Problem 91.

▶ Vamos usar aqui a segunda Lei, nas formas translacional e rotacional. Tomando o sentido positivo para baixo do plano inclinado temos

$$mg\,sen\,20^\circ - T = ma.$$

Para o movimento da polia, escrevemos

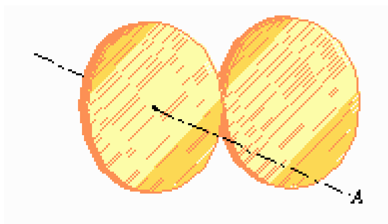
$$Tr = I\alpha = I\,\frac{a}{r}.$$

Trazendo $T$ da primeira para a segunda equação, e explicitando $I$, temos

$$I = \frac{mr^2}{a}(g\,sen\,20^o - a) = 0.054\ \text{kg}\cdot\text{m}^2.$$

**11-93.**

Dois discos delgados, cada um de 4 kg de massa e raio de 0.40 m, são ligados conforme mostrado na Fig. 11-44 para formar um corpo rígido. Qual o momento de inércia desse corpo em volta do eixo $A$, ortogonal ao plano dos discos e passando pelo centro de um deles?




[Fig. 11-44 Enlarged.] Problem 93.

▶ Temos aqui uma aplicação do teorema dos eixos paralelos. O momento de inércia do conjunto escrevemos como

$$I = I_1 + I_2,$$

onde $I_1 = mr^2/2$ é o momento de inércia do disco pelo qual passa o eixo. Para obter o momento $I_2$ do outro disco em relação a esse eixo, usamos o teorema:

$$\begin{aligned} I_2 &= \tfrac{1}{2}\, mr^2 + m(2r)^2 \\ &= \tfrac{9}{2}\, mr^2 \end{aligned}$$

Para o corpo rígido todo temos então

$$I = I_1 + I_2 = 5mr^2 = 3.2 \text{ kg·m}^2.$$

---

**11-96.**

Um cilindro uniforme de 10 cm de raio e 20 kg de massa está montado de forma a girar livrmente em torno de um eixo horizontal paralelo ao seu eixo longitudinal e distando 5 cm deste. (a) Qual o momento de inércia do cilindro em torno do eixo de rotação? (b) Se o cilindro partir do repouso, com seu eixo alinhado na mesma altura do eixo de rotação, qual a sua velocidade angular ao passar pelo ponto mais baixo da trajetória? (*Sugestão*: use o princípio de conservação da energia.)

▶ (a) Usamos o teorema dos eixos paralelos para obter o momento de inércia:

$$\begin{aligned} I &= I_{\text{CM}} + mh^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\, mr^2 + m\left(\frac{r}{2}\right)^2 \\ &= 0.15 \text{ kg·m}^2 \end{aligned}$$

(b) Colocando o referencial de energia potencial nula no ponto mais baixo pelo qual passa o centro de massa do cilindro, temos

$$\begin{aligned} U_1 &= K_2 \\ mg\frac{r}{2} &= \tfrac{1}{2}\, I\omega^2 \end{aligned}$$

Resolvendo para a velocidade angular, obtemos

$$\omega = 11.44 \text{ rad/s}.$$