Exercícios Resolvidos de Teoria Eletromagnética

Jason Alfredo Carlson Gallas

Professor Titular de Física Teórica

Doutor em Física pela Universidade Ludwig Maximilian de Munique, Alemanha

Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul
91501-970 Porto Alegre, BRASIL

Matéria para a PRIMEIRA prova. Numeração conforme a **quarta** edição do livro "Fundamentos de Física", Halliday, Resnick e Walker.

Esta e outras listas encontram-se em: *http://www.if.ufrgs.br/∼jgallas* clicando-se em 'ENSINO'

Conteúdo

Comentários/Sugestões e Erros: favor enviar para `jgallas @ if.ufrgs.br`
(`lista1.tex`)

25 Lei de Gauss

25.1 Questões

Q 25-4.

Considere uma superfície gaussiana envolvendo parte da distribuição de cargas mostrada na Fig. 25-22. *(a)* Qual das cargas contribui para o campo elétrico no ponto P? *(b)* O valor obtido para o fluxo através da superfície circulada, usando-se apenas os campos elétricos devidos a q_1 e q_2, seria maior, igual ou menor que o valor obtido usando-se o campo total?

▶ *(a)* Todas as cargas contribuem para o campo. Ou seja, o campo é devido a todas as cargas. *(b)* O fluxo total é sempre o mesmo. Por estarem *fora* da gaussiana, as cargas q_3 e q_4 não contribuem efetivamente para o fluxo total uma vez que todo fluxo individual a elas devido *entra* porém também *sai* da superfície.

Q 25-5.

Uma carga puntiforme é colocada no centro de uma superfície gaussiana esférica. O valor do fluxo Φ mudará se *(a)* a esfera for substituída por um cubo de mesmo volume? *(b)* a superfície for substituida por um cubo de volume dez vezes menor? *(c)* a carga for afastada do centro da esfera original, permanecendo, entretanto, no seu interior? *(d)* a carga for removida para fora da esfera original? *(e)* uma segunda carga for colocada próxima, e fora, da esfera original? *(f)* uma segunda carga for colocada dentro da superfície gaussiana?

▶ *(a)* Não. O fluxo total só depende da carga total no interior da superfície gaussiana considerada. A **forma** da superfície gaussiana considerada não é relevante.

(b) Não. O fluxo total só depende da carga total no interior da superfície gaussiana considerada. O **volume** englobado pela superfície gaussiana considerada não é relevante.

(c) Não. O fluxo total só depende da carga total no interior da superfície gaussiana considerada. A posição das cargas não altera o valor do fluxo total através da superfície gaussiana considerada, desde que o **o valor desta carga total** não seja modificado.

(d) Sim. Neste caso, como a carga total no interior da superfície gaussiana considerada é nula, o fluxo total será igual a zero.

(e) Não. O fluxo total só depende da carga total no interior da superfície gaussiana considerada. Colocando-se uma **segunda carga fora** da superfície gaussiana considerada, não ocorrerá nenhuma variação do fluxo total (que é determinado apenas pelas cargas internas). As cargas **externas** produzem um fluxo nulo através da superfície gaussiana considerada.

(f) Sim. Neste caso, como a carga total no interior da superfície gaussiana considerada passa a ser igual a $q_1 + q_2$, o fluxo total é igual a $(q_1 + q_2)/\epsilon_0$.

Q 25-7.

Suponha que a carga líquida contida em uma superfície gaussiana seja nula. Podemos concluir da lei de Gauss que $\mathbf{E}$ é igual a zero em todos os pontos sobre a superfície? É verdadeira a recíproca, ou seja, se o campo elétrico $\mathbf{E}$ em todos os pontos sobre a superfície for nulo, a lei de Gauss requer que a carga líquida dentro da superfície seja nula?

▶ Se a carga total for nula podemos conlcuir que o fluxo *total* sobre a gaussiana é zero mas *não* podemos concluir nada sobre o valor de $\mathbf{E}$ em cada ponto individual da superfície. Para convencer-se disto, estude o campo gerado por um dipolo sobre uma gaussiana que o envolva. O campo $\mathbf{E}$ sobre a gaussiana não precisa ser *homogêneo* para a integral sobre a superfície dar zero.
A recíproca é verdadeira, pois neste caso a integral será calculada sobre o produto de dois vetores, um dois quais é identicamente nulo sobre toda a gaussiana.

Q Extra – 25-8 da terceira edição do livro

Na lei de Gauss,

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dA} = q,$$

o campo $\mathbf{E}$ é necessariamente devido à carga q?

▶ Não. O fluxo total através da gaussiana depende do excesso de carga (i.e. da carga não-balanceada) nela contida. O campo elétrico $\mathbf{E}$ em cada ponto da superfície gaussiana depende de *todas as cargas existen-*

tes, internas ou não. O que ocorre é que, como demonstrado no Exemplo 25-1 do livro texto, o fluxo total devido a qualquer carga externa será sempre zero pois “todo campo que entra na gaussiana, também irá sair da gaussiana”. Reveja os dois parágrafos abaixo da Eq. 25-8.

25.2 Problemas e Exercícios

25.2.1 Fluxo do campo elétrico

E 25-2.

A superfície quadrada da Fig. 25-24, tem 3.2 mm de lado. Ela está imersa num campo elétrico uniforme com $E = 1800$ N/C. As linhas do campo formam um ângulo de 35^o com a normal “apontando para fora”, como é mostrado. Calcular o fluxo através da superfície.

▶ Em todos os pontos da superfície, o módulo do campo elétrico vale 1800 N/C, e o ângulo θ, entre $\mathbf{E}$ e a normal da superfície d$\mathbf{A}$, é dado por $\theta = (180^o - 35^o) = 145^o$. Note que o *fluxo* está definido tanto para superfícies abertas quanto fechadas. Seja a superfície como for, a integral deve ser sempre computada sobre ela. Portanto,

$$\begin{aligned} \phi_E &= \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} \\ &= \int E\ \cos\theta\ dA \\ &= EA\cos\theta \\ &= (1800\ \text{N/C})(0.0032\ \text{m})^2\cos 145^0 \\ &= -0.0151\ \text{N.m}^2\text{/C}. \end{aligned}$$

Note que o objetivo desta questão é relembrar como fazer corretamente um produto escalar: antes de medir o ângulo entre os vetores é preciso que certificar-se que ambos estejam aplicados ao *mesmo ponto*, ou seja, que ambas flechas partam de um mesmo ponto no espaço (e não que um vetor parta da ‘ponta’ do outro, como quando fazemos sua soma).

25.2.2 Lei de Gauss

E 25-7.

Uma carga puntiforme de 1.8 μC encontra-se no centro de uma superfície gaussiana cúbica de 55 cm de aresta. Calcule o valor Φ_E através desta superfície.

▶ Usando a Eq. 9, encontramos o fluxo através da superfície gaussiana fechada considerada (que, no caso deste exercício, é um cubo):

$$\begin{aligned} \phi_E = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} &= \frac{q}{\epsilon_0} \\ &= \frac{1.8\times 10^{-6}\ \text{C}}{8.85\times 10^{-12}\ \text{C}^2\text{/(N m}^2)} \\ &= 2.03\times 10^5\ \text{N m}^2\text{/C}. \end{aligned}$$

P 25-11.

Determinou-se, experimentalmente, que o campo elétrico numa certa região da atmosfera terrestre está dirigido verticalmente para baixo. Numa altitude de 300 m o campo tem módulo de 60 N/C enquanto que a 200 o campo vale 100 N/C. Determine a carga líquida contida num cubo de 100 m de aresta, com as faces horizontais nas altitudes de 200 e 300 m. Despreze a curvatura da Terra.

▶ Chamemos de A a área de uma face do cubo, E_s a magnitude do campo na face superior e E_i a magnitude na face inferior. Como o campo aponta para baixo, o fluxo através da face superior é negativo (pois *entra* no cubo) enquanto que o fluxo na face inferior é positivo. O fluxo através das outras faces é zero, de modo que o fluxo total através da superfície do cubo é $\Phi = A(E_i - E_s)$. A carga líquida pode agora ser determinada facilmente com a lei de Gauss:

$$\begin{aligned} q = \epsilon_0\Phi &= \epsilon_0 A(E_i - E_s) \\ &= (8.85\times 10^{-12})(100)^2(100-60) \\ &= 3.54\times 10^{-6}\ \text{C} \\ &= 3.54\ \mu\text{C}. \end{aligned}$$

P 25-13.

Uma carga puntiforme q é colocada em um dos vértices de um cubo de aresta a. Qual é o valor do fluxo através de cada uma das faces do cubo? (*Sugestão*: Use a lei de Gauss e os argumentos de simetria.)

▶ Considere um sistema de referência Cartesiano XYZ no espaço, centrado na carga q, e sobre tal sistema coloque o cubo de modo a ter três de suas arestas alinhadas com os eixos, indo de $(0,0,0)$ até os pontos $(a,0,0)$, $(0,a,0)$ e $(0,0,a)$.

Usando a lei de Gauss: O fluxo elétrico sobre cada uma das três faces que estão sobre os planos XY, XZ e YZ é igual a zero pois sobre elas os vetores $\mathbf{E}$ e $d\mathbf{A}$ são ortogonais (i.e. seu produto escalar é nulo).
Como se pode perceber da simetria do problema, o fluxo elétrico sobre cada uma das três faces restantes é exatamente o mesmo. Portanto, para determinar o fluxo total, basta calcular o fluxo sobre uma qualquer destas três faces multiplicando-se tal resultado por três. Para tanto, consideremos a *face superior do cubo*, paralela ao plano XY, e sobre ela um elemento de área $dA = dxdy$. Para qualquer ponto P sobre esta face o módulo do campo elétrico é

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{a^2+x^2+y^2}.$$

Chamando de θ o ângulo que a direção do campo elétrico em P faz com o eixo Z percebemos que este ângulo coincide com o ângulo entre a normal $\mathbf{A}$ e $\mathbf{E}$ e, ainda, que $\cos\theta = a/r$. Portanto, o fluxo elétrico é dado pela seguinte integral:

$$\begin{aligned}
\phi_{\text{face}} &= \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} \\
&= \int E\cos\theta\; dx\; dy \\
&= \frac{aq}{4\pi\epsilon_0}\int_0^a\int_0^a \frac{dxdy}{(a^2+x^2+y^2)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Observe que a integral é sobre uma superfície aberta, pois corresponde ao fluxo *parcial*, devido a uma das arestas apenas. Integrando em relação a x e depois integrando em relação a y com auxílio das integrais dadas no Apêndice G, encontramos o fluxo elétrico sobre a face em questão como sendo dado por

$$\phi_{\text{face}} = \frac{q}{24\epsilon_0}.$$

Portanto, o fluxo total sobre todo o cubo é

$$\Phi = 3\phi_{\text{face}} = \frac{q}{8\epsilon_0}.$$

Usando argumentos de simetria: É a maneira mais simples de obter a resposta, pois prescinde da necessidade da calcular a integral dupla. Porém, requer maior maturidade na matéria. Observando a figura do problema, vemos que colocando-se 8 cubos idênticos ao redor da carga q poderemos usar a lei de Gauss para determinar que o fluxo total através dos 8 cubos é dado por

$$\phi_{\text{total}} = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Devido a simetria, percebemos que o fluxo Φ sobre cada um dos 8 cubos é sempre o mesmo e que, portanto, o fluxo Φ sobre um cubo vale

$$\Phi = \frac{\phi_{\text{total}}}{8} = \frac{q}{8\epsilon_0},$$

que, em particular, é o fluxo sobre o cubo do problema em questão. Simples e bonito, não?

25.2.3 Um condutor carregado isolado

E 25-16.

Uma esfera condutora uniformemente carregada, de 1.2 m de diâmetro, possui uma densidade superficial de carga de 8.1 μC/m^2. *(a)* Determine a carga sobre a esfera. *(b)* Qual é o valor do fluxo elétrico total que está deixando a superfície da esfera?

► *(a)* A carga sobre a esfera será

$$q = \sigma A = \sigma\, 4\pi r^2 = 3.66\times 10^{-5}\ \text{C} = 36.6\ \mu\,\text{C}.$$

(b) De acordo com a lei de Gauss, o fluxo é dado por

$$\phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} = 4.14\times 10^6\ \text{N m}^2/\text{C}.$$

P 25-19.

Um condutor isolado, de forma arbitrária, possui uma carga total de $+10\times 10^{-6}$ C. Dentro do condutor existe uma cavidade oca, no interior da qual há uma carga puntiforme $q = +3\times 10^{-6}$ C. Qual é a carga: *(a)* sobre a parede da cavidade e *(b)* sobre a superfície externa da condutor?

► *(a)* O desenho abaixo ilustra a situação proposta no problema.

Considere uma superfície gaussiana S envolvendo a cavidade do condutor. A carga q encontra-se no interior da cavidade e seja Q_1 a carga induzida na superfície interna da cavidade do condutor. Lembre que o campo elétrico

E no interior da parte maciça de um condutor é sempre igual a zero. Aplicando a lei de Gauss, encontramos:

$$\phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q + Q_1}{\epsilon_0}.$$

Como $E = 0$, devemos ter $(q + Q_1)/\epsilon_0 = 0$, ou seja, que

$$Q_1 = -q = -3.0 \ \mu\text{C};$$

(b) Como a carga total do condutor é de 10 μC, vemos que a carga Q_2 sobre a superfície externa da condutor deverá ser de

$$Q_2 = 10 - Q_1 = 10 - (-3) = +13 \ \ \mu\text{C}.$$

Para podermos fixar a escala vertical da figura, precisamos determinar o valor numérico do campo no ponto de transição, $R = 3$ cm:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0} \\ &= \frac{2.0 \times 10^{-8}}{2\pi \ (0.030)(8.85 \times 10^{-12})} \\ &= 1.2 \times 10^4 \text{ N/C}. \end{aligned}$$

25.2.4 Lei de Gauss: simetria cilíndrica

E 25-21.

Uma linha infinita de cargas produz um campo de 4.5×10^4 N/C a uma distância de 2 m. Calcule a densidade linear de carga sobre a linha.

▶ Usando a expressão para o campo devido a uma linha de cargas, $E = \lambda/(2\pi\epsilon_0 r)$, Eq. 25-14, encontramos facilmente que

$$\lambda = (2\pi\epsilon_0 r)E = 5.01 \ \ \mu\text{C/m}.$$

P 25-23.

▶ Use uma superfície Gaussiana A cilíndrica de raio r e comprimento unitário, concêntrica com o tubo metálico. Então, por simetria,

$$\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 2\pi\, r\, E = \frac{q_{\text{dentro}}}{\varepsilon_0}.$$

(a) Para $r > R$, temos $q_{\text{dentro}} = \lambda$, de modo que

$$E = \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}.$$

(b) Para $r < R$, a carga dentro é zero, o que implica termos

$$E = 0$$

.

P 25-24.

▶ Use uma superfície Gaussiana A cilíndrica de raio r e comprimento unitário, concêntrica com ambos cilindros. Então, a lei de Gauss fornece-nos

$$\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 2\pi r E = \frac{q_{\text{dentro}}}{\varepsilon_0},$$

de onde obtemos

$$E = \frac{q_{\text{dentro}}}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

(a) Para $r < a$ a carga dentro é zero e, portanto $E = 0$.

(b) Para $a < r < b$ a carga dentro é $-\lambda$, de modo que

$$|E| = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

P 25-26.

A Fig. 25-32 mostra um **contador de Geiger**, dispositivo usado para detectar radiação ionizante (radiação que causa a ionização de átomos). O contador consiste em um fio central, fino, carregado positivamente, circundado por um cilindro condutor circular concêntrico, com uma carga igual negativa. Desse modo, um forte campo elétrico radial é criado no interior do cilindro. O cilindro contém um gás inerte a baixa pressão. Quando uma partícula de radiação entra no dispositivo através da parede do cilindro, ioniza alguns átomos do gás. Os elétrons livres resultantes são atraidos para o fio positivo. Entretanto, o campo elétrico é tão intenso que, entre as colisões com outros átomos do gás, os elétrons livres ganham energia suficiente para ionizá-los também.

Criam-se assim, mais elétrons livres, processo que se repete até os elétrons alcançarem o fio. A "avalanche" de elétrons é coletada pelo fio, gerando um sinal usado para registrar a passagem da partícula de radiação. Suponha que o raio do fio central seja de 25 μm; o raio do cilindro seja de 1.4 cm; o comprimento do tubo seja de 16 cm. Se o campo elétrico na parede interna do cilindro for de 2.9×10^4 N/C, qual será a carga total positiva sobre o fio central?

► O campo elétrico é radial e aponta para fora do fio central. Desejamos descobrir sua magnitude na região entre o fio e o cilindro, em função da distância r a partir do fio. Para tanto, usamos uma superfície Gaussiana com a forma de um cilindro com raio r e comprimento ℓ, concêntrica com o fio. O raio é maior do que o raio do fio e menor do que o raio interno da parede cilíndrica. Apenas a carga sobre o fio está localizada dentro da superfície Gaussiana. Chamemo-la de q.

A área da superfície arredondada da Gaussiana cilíndrica é $2\pi r\ell$ e o fluxo através dela é $\Phi = 2\pi r\ell E$. Se desprezarmos o fluxo através das extremidades do cilindro, então o Φ será o fluxo total e a lei de Gauss nos fornece $q = 2\pi\epsilon_0 r\ell E$. Como a magnitude do campo na parede do cilindro é conhecida, suponha que a superfície Gaussiana seja coincidente com a parede. Neste caso, r é o raio da parede e

$$\begin{aligned} q &= 2\pi(8.85 \times 10^{-12})(0.014)(0.16)(2.9 \times 10^4) \\ &= 3.6 \times 10^{-9} \text{ C.} \end{aligned}$$

P 25-30.

Uma carga está uniformemente distribuida através do volume de um cilindro infinitamente longo de raio R. *(a)* Mostre que E a uma distância r do eixo do cilindro ($r < R$) é dado por

$$E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0},$$

onde ρ é a densidade volumétrica de carga. *(b)* Escreva uma expressão para E a uma distância $r > R$.

► *(a)* O círculo cheio no diagrama abaixo mostra a secção reta do cilindro carregado, enquanto que o círculo tracejado corresponde à secção reta de uma superfície Gaussiana de forma cilíndrica, concêntrica com o cilindro de carga, e tendo raio r e comprimento ℓ. Queremos usar a lei de Gauss para encontrar uma expressão para a magnitude do campo elétrico sobre a superfície Gaussiana.

A carga dentro da Gaussiana cilíndrica é

$$q = \rho V = \rho\,(\pi r^2 \ell),$$

onde $V = \pi r^2 \ell$ é o volume do cilindro. Se ρ é positivo, as linhas de campo elétrico apontam radialmente para fora, são normais à superfície arredondada do cilindro e estão distribuidas uniformemente sobre ela. Nenhum fluxo atravessa as bases da Gaussiana. Portanto, o fluxo total através da Gaussiana é $\Phi = E\,A = 2\pi R\ell E$, onde $A = a\pi r\ell$ é a área da porção arredondada da Gaussiana.

A lei de Gauss ($\epsilon_0\Phi = q$) nos fornece então $2\pi\epsilon_0 r\ell E = \pi r^2\ell\rho$, de onde tira-se facilmente que

$$E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}.$$

(b) neste caso consideramos a Gaussiana como sendo um cilindro de comprimento ℓ e com raio r maior que R. O fluxo é novamente $\Phi = 2\pi r\ell E$. A carga dentro da Gaussiana é a carga total numa secção do cilindro carregado com comprimento ℓ. Ou seja, $q = \pi R^2\ell\rho$. A lei de Gauss nos fornece então $2\pi\epsilon_0 r\ell E = \pi R^2\ell\rho$, de modo que o campo desejado é dado por

$$E = \frac{R^2\rho}{2\epsilon_0 r}.$$

Observe que os valores dados pelas duas expressões coincidem para $r = R$, como era de se esperar.

Um gráfico da variação de E em função de r é bastante semelhante ao mostrado na Fig. 25-21, porém, apresentando para $r > R$ um decaimento proporcional a $1/r$ (em vez de $1/r^2$ como na Fig. 25-21).

25.2.5 Lei de Gauss: simetria plana

E 25-32.

Uma placa metálica quadrada de 8 cm de lado e espessura desprezível tem uma carga total de de 6×10^{-6} C. *(a)* Estime o módulo de E do campo elétrico localizado imediatamente fora do centro da placa (a uma distância, digamos, de 0.5 mm), supondo que a carga esteja uniformemente distribuida sobre as duas faces da placa. *(b)*

Estime o valor do campo a uma distância de 30 m (relativamente grande, comparada ao tamanho da placa), supondo que a placa seja uma carga puntiforme.

► *(a)* Para calcular o campo elétrico num ponto *muito perto* do centro de uma placa condutora uniformemente carregada, é razoável substituirmos a placa finita por uma placa infinita contendo a mesma densidade superficial de carga e considerar a magnitude do campo como sendo $E = \sigma/\epsilon_0$, onde σ é a densidade de carga da superfície sob o ponto considerado. A carga está distribuida uniformemente sobre ambas faces da placa original, metade dela estando perto do ponto considerado. Portanto

$$\sigma = \frac{q}{2A} = \frac{6\times 10^{-6}}{2(0.08)^2} = 4.69\times 10^{-4} \ \text{ C/m}^2.$$

A magnitude do campo é

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{4.69\times 10^{-4}}{8.85\times 10^{-12}} = 5.30\times 10^{7} \ \text{ N/C}.$$

(b) Para uma distância grande da placa o campo elétrico será aproximadamente o mesmo que o produzido por uma partícula puntiforme com carga igual à carga total sobre a placa. A magnitude de tal campo é $E = q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$, onde r é a distância à placa. Portanto

$$E = \frac{(9\times 10^9)(6\times 10^{-6})}{30^2} = 60 \ \text{ N/C}.$$

P 25-34.

Na Fig. 25-36, uma pequena bola, não-condutora, de massa 1 mg e carga $q = 2\times 10^{-8}$ C uniformemente distribuida, está suspensa por um fio isolante que faz um ângulo $\theta = 30^o$ com uma chapa não-condutora, vertical, uniformemente carregada. Considerando o peso da bola e supondo a chapa extensa, calcule a densidade superficial de carga σ da chapa.

► Três forças atuam na pequena bola: (i) uma força gravitacional de magnitude mg, onde m é a massa da bola, atua na vertical, de cima para baixo, (ii) uma força elétrica de magnitude qE atua perpendicularmente ao plano, afastando-se dele, e (iii) e a tensão T no fio, atuando ao longo dele, apontando para cima, e fazendo um ângulo θ $(= 30^o)$ com a vertical.
Como a bola está em equilíbrio, a força total resultante sobre ela deve ser nula, fornecendo-nos duas equações, soma das componentes verticais e horizontais das forças, respectivamente:

$$\begin{aligned} T\cos\theta - mg &= 0, \quad (\Sigma \text{ vertical}) \\ qE - T\,sen\,\theta &= 0. \quad (\Sigma \text{ horizontal}) \end{aligned}$$

Substituindo-se $T = qE/sen\,\theta$, tirado da segunda equação, na primeira, obtemos $qE = mg\,tan\,\theta$.
O campo elétrico por um plano grande e uniforme de cargas é dado por $E = \sigma/(2\epsilon_0)$, onde σ é a densidade superficial de carga. Portanto, temos

$$\frac{q\sigma}{2\epsilon_0} = mg\,tan\,\theta$$

de onde se extrai facilmente que

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{2\epsilon_0 mg\,tan\,\theta}{q} \\ &= \frac{2(8.85\times 10^{-12})(1\times 10^{-6})(9.8)\,tan\,30^o}{2\times 10^{-8}\text{ C}} \\ &= 5.0\times 10^{-9}\text{ C/m}^2. \end{aligned}$$

P 25-35.

Um elétron é projetado diretamente sobre o centro de uma grande placa metálica, carregada negativamente com uma densidade superficial de carga de módulo 2×10^{-6} C/m^2. Sabendo-se que a energia cinética inicial do elétron é de 100 eV e que ele pára (devido a repulsão eletrostática) imediatamente antes de alcançar a placa, a que distância da placa ele foi lançado?

► A carga negativa sobre a placa metálica exerce uma força de repulsão sobre o elétron, desacelerando-o e parando-o imediatamente antes dele tocar na superfície da placa.
Primeiramente, vamos determinar uma expressão para a aceleração do elétron, usando então a cinemática para determinar a distância de paragem. Consideremos a direção inicial do movimento do elı́tron como sendo positiva. Neste caso o campo elétrico é dado por $E = \sigma/\epsilon_0$, onde σ é a densidade superficial de carga na placa. A força sobre o elétron é $F = -eE = -e\sigma/\epsilon_0$ e a aceleração é

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{e\sigma}{\epsilon_0 m},$$

onde m é a massa do elétron.
A força é constante, de modo que podemos usar as fórmulas para aceleração constante. Chamando de v_0 a velocidade inicial do elétron, v sua velocidade final, e x a distância viajada entre as posições inicial e final, temos que $v^2 - v_0^2 = 2ax$. Substituindo-se $v = 0$ e $a = -e\sigma/(\epsilon_0 m)$ nesta expressão e resolvendo-a para x encontramos

$$x = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{\epsilon_0 m v_0^2}{2e\sigma} = \frac{\epsilon_0 K_0}{e\sigma},$$

onde $K_0 \equiv mv_0^2/2$ é a energia cinética inicial.
Antes de aplicar a fórmula, é preciso converter o valor dado de K_0 para joules. Do apêndice F do livro tiramos que 1 eV $= 1.60 \times 10^{-19}$ J, donde 100 eV $= 1.60 \times 10^{-17}$ J. Portanto

$$\begin{aligned} x &= \frac{(8.85 \times 10^{-12})(1.60 \times 10^{-17})}{(1.60 \times 10^{-19})(2 \times 10^{-6})} \\ &= 4.4 \times 10^{-4} \text{ m.} \end{aligned}$$

P 25-39*.

Uma chapa plana, de espessura d, tem uma densidade volumétrica de carga igual a ρ. Determine o módulo do campo elétrico em todos os pontos do espaço tanto: *(a)* dentro como *(b)* fora da chapa, em termos de x, a distância medida a partir do plano central da chapa.

▶ Suponha que a carga total $+Q$ esteja uniformemente distribuida ao longo da chapa. Considerando uma área muito grande (ou melhor, para pontos próximos do centro da chapa), podemos imaginar que o campo elétrico possua uma direção ortogonal ao plano da superfície externa da placa; a simetria desta chapa uniformemente carregada indica que o módulo do campo varia com a distância x. No centro da chapa, a simetria do problema indica que o campo elétrico deve ser nulo, ou seja, $E = 0$, para $x = 0$. Na figura da solução deste problema mostramos uma superfície gaussiana cilíndrica S cujas bases são paralelas às faces da chapa.

Seja A a área da base desta superfície gaussiana S. Como as duas bases da superfície gaussiana cilíndrica S estão igualmente afastadas do plano central $x = 0$ e lembrando que o vetor **E** é ortogonal ao vetor d**A** na superfície lateral da superfície gaussiana cilíndrica S, concluímos que o fluxo total através da superfície gaussiana cilíndrica S é dado por

$$\phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 2EA$$

onde E é o módulo do campo elétrico a uma distância x do plano central $x = 0$. A carga q_{int} englobada no interior da superfície gaussiana cilíndrica S é dada pela integral de $\rho\ dV$ no volume situado no interior da superfície gaussiana cilíndrica S. Como a densidade de carga ρ é constante, a carga total no interior da superfície S é dada por

$$q_{int} = \rho(2xA).$$

Portanto, aplicando a lei de Gauss para a superfície considerada, encontramos facilmente a seguinte resposta:

$$E = \frac{\rho x}{\epsilon_0}.$$

(b) Construa novamente uma superfície gaussiana cilíndrica contendo toda a chapa, isto é, construa novamente uma superfície semelhante à gaussiana cilíndrica S indicada na figura da solução deste problema, onde, agora, a área da base A está situada a uma distância $x = d/2$ do plano central $x = 0$. De acordo com a figura, vemos facilmente que, neste caso, temos:

$$q_{int} = \rho A d.$$

Portanto, aplicando a lei de Gauss para a superfície gaussiana cilíndrica considerada, encontramos facilmente a seguinte resposta:

$$E = \frac{\rho d}{2\epsilon_0}.$$

25.2.6 Lei de Gauss: simetria esférica

P 25-40.

Uma esfera condutora de 10 cm da raio possui uma carga de valor desconhecido. Sabendo-se que o campo elétrico à distância de 15 cm do centro da esfera tem módulo igual a 3×10^3 N/C e aponta radialmente para dentro, qual é carga líquida sobre a esfera?

▶ A carga está distribuida uniformemente sobre a superfície da esfera e o campo elétrico que ela produz em pontos fora da esfera é como o campo de uma partícula puntiforme com carga igual à carga total sobre a esfera. Ou seja, a magnitude do campo é dado por $E = q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$, onde q é magnitude da carga sobre a esfera e r é a distância a partir do centro da esfera ao ponto onde o campo é medido. Portanto, temos,

$$q = 4\pi\epsilon_0 r^2\ E = \frac{(0.15)^2(3 \times 10^3)}{9 \times 10^9} = 7.5 \times 10^{-9} \text{ C.}$$

Como campo aponta para dentro, em direção à esfera, a carga sobre a esfera é negativa: -7.5×10^{-9} C.

E 25-41.

▶ (a) O fluxo continuaria a ser -750 N·m^2/C, pois ele depende apenas da carga contida na Gaussiana.

(b) A carga líquida é

$$\begin{aligned} q &= \varepsilon_0 \Phi \\ &= (8.85 \times 10^{-12})(-750) = -6.64 \times 10^{-10} \text{ C} \end{aligned}$$

E 25-42.

▶ (a) Para $r < R$, temos $E = 0$ (veja Eq. 25-18).

(b) Para r um pouco maior de R, temos

$$\begin{aligned} E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} &\simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2} \\ &= \frac{(8.99 \times 10^9)(2.0 \times 10^{-7})}{(0.25)^2} \\ &= 2.9 \times 10^4 \text{ N/C.} \end{aligned}$$

(c) Para $r > R$ temos, aproveitando o cálculo do item anterior,

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \\ &= (2.9 \times 10^4)\Big(\frac{0.25}{3.0}\Big)^2 \\ &= 200 \text{ N/C.} \end{aligned}$$

E 25-45.

Num trabalho escrito em 1911, Ernest Rutherford disse: "Para se ter alguma idéia das forças necessárias para desviar uma partícula α através de um grande ângulo, considere um átomo contendo uma carga puntiforme positive Ze no seu centroo e circundada por uma distribuição de eletricidade negativa $-Ze$, uniformemente distribuída dentro de uma esfera de raio R. O campo elétrico E ... a uma distância r do centro para um ponto *dentro* do átmo é

$$E = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\Big(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\Big).''$$

Verifique esta expressão.

▶ Usamos primeiramente a lei de Gauss para encontrar uma expressão para a magnitude do campo elétrico a uma distância r do centro do átomo. O campo aponta radialmente para fora e é uniforme sobre qualquer esfera concêntrica com o átomo. Escolha uma superfície Gaussiana esférica de raio r com seu centro no centro do átomo.

Chamando-se de E a magnitude do campo, então o fluxo total através da Gaussiana é $\Phi = 4\pi r^2 E$. A carga contida na Gaussiana é a soma da carga positiva no centro com e parte da carga negativa que está dentro da Gaussiana. Uma vez que a carga negativa é suposta estar uniformemente distribuida numa esfera de raio R, podemos computar a carga negativa dentro da Gaussiana usando a razão dos volumes das duas esferas, uma de raio r e a outra de raio R: a carga negativa dentro da Gaussiana nada mais é do que $-Ze\,r^3/R^3$. Com isto tudo, a carga total dentro da Gaussiana é $Ze - Ze\,r^3/R^3$. A lei de Gauss nos fornece então, sem problemas, que

$$4\pi\varepsilon_0\, r^2 E = Ze\Big(1 - \frac{r^3}{R^3}\Big),$$

de onde tiramos facilmente que, realmente,

$$E = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\Big(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\Big).$$

P 25-47.

Uma casca esférica metálica, fina e descarregada, tem uma carga puntiforme q no centro. Deduza expressões para o campo elétrico: *(a)* no interior da casca e *(b)* fora da casca, usando a lei de Gauss. *(c)* A casca tem algum efeito sobre o campo criado por q? *(d)* A presença da carga q tem alguma influência sobre a distribuição de cargas sobre a casca? *(e)* Se uma segunda carga puntiforme for colocada do lado de fora da casca, ela sofrerá a ação de alguma força? *(f)* A carga interna sofre a ação de alguma força? *(g)* Existe alguma contradição com a terceira lei de Newton? Justifique sua resposta.
NOTA: na quarta edição brasileira do livro esqueceram de mencionar que a casca esférica é METÁLICA!!

▶ Antes de responder aos itens, determinamos uma expressão para o campo elétrico, em função da distância radial r a partir da carga q. Para tanto, consideremos uma superfície Gaussiana esférica de raio r centrada na carga q. A simetria do problema nos mostra que a magnitude E é a mesma sobre toda superfície, de modo que

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = 4\pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon_0},$$

fornecendo-nos

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{r^2},$$

onde q representa a carga dentro da superfície Gaussiana. Se q for positiva, o campo elétrico aponta para fora da Gaussiana.

(a) Dentro da casca contendo a carga q temos

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{r^2}.$$

(b) Como fora da casca a carga líquida é q, o valor do campo elétrico é o mesmo do item anterior.
(c) Não, pois não influi na dedução de $E(r)$, acima.
(d) Sim: como a casca fina é metálica, na sua superfície interna irá aparecer uma carga $-q$ INDUZIDA. Como a carga total da casca esférica é zero, sua superfície externa deverá conter uma carga $+q$ induzida, de modo que a soma de ambas cargas induzidas seja zero.
(e) Claro que experimentará forças pois estará imersa no campo $E(r)$ devido á carga central.
(f) Não, pois o metal da casca blinda campos externos.
(g) Não.

P 25-48.

A Fig. 25-38 mostra uma esfera, de raio a e carga $+q$ uniformemente distribuída através de seu volume, concêntrica com uma casca esférica condutora de raio interno b e raio externo c. A casca tem uma carga líquida de $-q$. Determine expressões para o campo elétrico em função do raio r nas seguintes localizações: **(a)** dentro da esfera ($r < a$); **(b)** entre a esfera e a casca ($a < r < b$); **(c)** no interior da casca ($b < r < c$); **(d)** fora da casca ($r > c$). **(e)** Quais são as cargas sobre as superfícies interna e externa da casca?

▶ Para começar, em todos pontos onde existe campo elétrico, ele aponta radialmente para fora. Em cada parte do problema, escolheremos uma superfície Gaussiana esférica e concêntrica com a esfera de carga $+q$ e que passe pelo ponto onde desejamos determinar o campo elétrico. Como o campo é *uniforme* sobre toda a superfície das Gaussianas, temos sempre que, qualquer que seja o raio r da Gaussiana em questão,

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = 4\pi\varepsilon_0\, r^2 E.$$

(a) Aqui temos $r < a$ e a carga dentro da superfície Gaussiana é $q(r/a)^3$. A lei de Gauss fornece-nos

$$4\pi\, r^2 E = \left(\frac{q}{\varepsilon_0}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^3,$$

donde tiramos que

$$E = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0\, a^3}.$$

(b) Agora temos $a < r < b$, com a carga dentro da Gaussiana sendo $+q$. Portanto, a lei de Gauss aqui nos diz que

$$4\pi\, r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

de modo que

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}.$$

(c) Como a casca é *condutora*, é muito fácil saber-se o campo elétrico dentro dela:

$$E = 0.$$

(d) Fora da casca, i.e. para $r > c$, a carga *total* dentro da superfície Gaussiana é zero e, conseqüentemente, neste caso a lei de Gauss nos diz que

$$E = 0.$$

(e) Tomemos uma superfície Gaussiana localizada dentro da casca condutora. Como o campo elétrico é zero sobre toda suprfície, temos que

$$\Phi = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = 0$$

e, de acordo com a lei de Gauss, a carga líquida dentro da superfície é zero. Em outras palavras, chamando de Q_i a carga sobre a superfície interna da casca, a lei de Gauss nos diz que devemos ter $q + Q_i = 0$, ou seja,

$$Q_i = -q.$$

Chamando agora de Q_e a carga na superfície externa da casca e sabendo que a casca tem uma carga líquida de $-q$ (dado do problema), vemos que é necessário ter-se que $Q_i + Q_e = -q$, o que implica termos

$$Q_e = -q - Q_i = -q - (-q) = 0.$$

P 25-51.

Um próton descreve um movimento circular com velocidade $v = 3 \times 10^5$ m/s ao redor e imediatamente fora de uma esfera carregada, de raio $r = 1$ cm. Calcule o valor da carga sobre a esfera.

▶ O próton está em movimento circular uniforme mantido pela força elétrica da carga na esfera, que funciona como força centrípeta. De acordo com a segunda lei de Newton para um movimento circular uniforme, sabemos que $F_c = mv^2/r$, onde F_c é a magnitude da força, v é a velocidade do próton e r é o raio da sua órbita, essencialmente o mesmo que o raio da esfera.

A magnitude da força elétrica sobre o próton é $F_e = eq/(4\pi\epsilon_0 r^2)$, onde q é a magnitude da carga sobre a esfera. Portanto, quando $F_e = F_c$, temos

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{qe}{r^2} = \frac{mv^2}{r},$$

de modo que a carga procurada será dada por

$$\begin{aligned} q &= \frac{4\pi\epsilon_0 m v^2 r}{e} \\ &= \frac{(1.67\times 10^{-27}\text{ kg})(3\times 10^5\text{ m/s})^2(0.01\text{ m})}{(9\times 10^9\text{ N m}^2/\text{C}^2)(1.60\times 10^{-19}\text{ C})} \\ &= 1.04\text{ nC}. \end{aligned}$$

P 25-53

Na Fig. 25-41, uma casca esférica não-condutora, com raio interno a e raio externo b, tem uma densidade volumétrica de carga dada por $\rho = A/r$, onde A é constante e r é a distância ao centro da casca. Além disso, uma carga puntiforme q está localizada no centro. Qual deve ser o valor de A para que o campo elétrico na casca ($a \leq r \leq b$) tenha módulo constante? (Sugestão: A depende de a mas não de b.)

▶ O problema pede para determinar uma expressão para o campo elétrico dentro da casca em termos de A e da distância ao centro da casca e, a seguir, determinar o valor de A de modo que tal campo não dependa da distância.

Para começar, vamos escolher uma Gaussiana esférica de raio r_g, concêntrica com a casca esférica e localizada dentro da casca, i.e. com $a < r_g < b$. Usando a lei de Gauss podemos determinar a magnitude do campo elétrico a uma distância r_g a partir do centro.

A carga contida somente sobre a *casca* dentro da Gaussiana é obtida através da integral $q_c = \int \rho\, dV$ calculada sobre a porção da casca carregada que está dentro da Gaussiana.

Como a distribuição de carga tem simetria esférica, podemos escolher dV como sendo o volume de uma casca esférica de raio r e largura infinitesimal dr, o que dos fornece $dV = 4\pi r^2 dr$. Portanto, temos

$$\begin{aligned} q_c &= 4\pi\int_a^{r_g} \rho\, r^2\, dr \\ &= 4\pi\int_a^{r_g} \frac{A}{r}\, r^2\, dr \\ &= 4\pi A\int_a^{r_g} r\, dr \\ &= 2\pi A(r_g^2 - a^2). \end{aligned}$$

Assim, a carga *total* dentro da superfície Gaussiana é

$$q + q_c = q + 2\pi A(r_g^2 - a^2).$$

O campo elétrico é radial, de modo que o fluxo através da superfície Gaussiana é $\Phi = 4\pi r_g^2 E$, onde E é a magnitude do campo. Aplicando agora a lei de Gauss obtemos

$$4\pi\epsilon_0 E r_g^2 = q + 2\pi A(r_g^2 - a^2),$$

de onde tiramos

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{q}{r_g^2} + 2\pi A - \frac{2\pi A a^2}{r_g^2}\Big].$$

Para que o campo seja independente de r_g devemos escolher A de modo a que o primeiro e o último termo entre colchetes se cancelem. Isto ocorre se tivermos $q - 2\pi A a^2 = 0$, ou seja, para

$$A = \frac{q}{2\pi a^2}$$

quando então teremos para a magnitude do campo

$$E = \frac{A}{2\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}.$$

P 25-55*.

Mostre que o equilíbrio estável é impossível se as únicas forças atuantes forem forças eletrostáticas. *Sugestão:* Suponha que uma carga $+q$ fique em equilíbrio estável ao ser colocada num certo ponto P num campo elétrico $\mathbf{E}$. Desenhe uma superfície Gaussiana esférica em torno de P, imagine como $\mathbf{E}$ deve estar apontando sobre esta superfície, e aplique a lei de Gauss para mostrar que a suposição [de equilíbrio *estável*] leva a uma contradição. Esse resultado é conhecido pelo nome de *Teorema de Earnshaw.*

▶ Suponha que não exista carga na vizinhaça mais imediata de q mas que a carga q esteja em equilíbrio devido à resultante de forças provenientes de cargas em outras posições. O campo elétrico na posição P de q é zero mas q irá sentir uma força elétrica caso ela venha a afastar-se do ponto P. O que precisamos mostrar é que é impossível construir-se em torno de P um campo elétrico resultante que, em todas direções do espaço, consiga "empurrar" q de volta para o ponto P quando ela deste ponto afastar-se.

Suponha que q esteja em P e envolva-a com uma superfície Gaussiana esférica extremamente pequena, centrada em P. Desloque então q de P para algum ponto sobre a esfera Gaussiana. Se uma força elétrica conseguir empurrar q de volta, deverá existir um campo elétrico apontando para dentro da superfície. Se um campo elétrico empurrar q em direção a P, não importando onde isto ocorra sobre a superfície, então deverá existir um campo elétrico que aponte para dentro em todos pontos da superfície. O fluxo líquido através da superfície não será zero e, de acordo com alei de Gauss, deve existir carga dentro da superfície Gaussiana, o que é uma contradição. Concluimos, pois, que o campo atuando numa carga não pode empurra-la de volta a P para todos deslocamentos possíveis e que, portanto, a carga não pode estar em equilíbrio estável.

Se existirem locais sobre a superfície Gaussiana onde o campo elétrico aponte para dentro e empurre q de volta para sua posição original, então deverão existir sobre a superfície outros pontos onde o campo aponte para fora e empurre q para fora da sua posição original.