Exercícios Resolvidos de Teoria Eletromagnética

Jason Alfredo Carlson Gallas

Professor Titular de Física Teórica

Doutor em Física pela Universidade Ludwig Maximilian de Munique, Alemanha

Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul
91501-970 Porto Alegre, BRASIL

Matéria para a SEGUNDA prova. Numeração conforme a **quarta** edição do livro "Fundamentos de Física", Halliday, Resnick e Walker.

Esta e outras listas encontram-se em: *http://www.if.ufrgs.br/∼jgallas*

Conteúdo

Comentários/Sugestões e Erros: favor enviar para `jgallas @ if.ufrgs.br`
(`lista2.tex`)

29 Circuitos Elétricos

29.1 Questões

Q 29-1.

▶ Não. O sentido convencional da fem é sempre do terminal negativo para o terminal positivo da bateria, independentemente do sentido da corrente que atravessa a bateria.

Q 29-4.

▶ Para medir a fem use um voltímetro com uma resistência elevada e ligue os terminais do aparelho aos terminais da bateria sem nenhum outro circuito conectado à bateria. Para medir a resistência interna da bateria, utilize uma pequena resistência em série juntamente com um amperímetro (também em série). A seguir meça a ddp V através dos terminais da bateria e a corrente i, que passa no circuito série considerado. Calcule a resistência interna da bateria mediante a seguinte relação:

$$V = \mathcal{E} - ri.$$

29.2 Problemas e Exercícios

29.2.1 Trabalho, energia e FEM

E 29-2.

Uma corrente de 5 A é mantida num circuito por uma bateria recarregável cuja fem é de 6 V, durante 6 minutos. De que quantidade diminui a energia química da bateria?

▶ A energia química da bateria é reduzida de uma quantidade $\Delta E = q\mathcal{E}$, onde q é a carga que passa através dela num tempo $\Delta t = 6$ minutos e $\mathcal{E}$ é a fem da bateria. Se i for a corrente, então $q = i\Delta t$ e

$$\begin{aligned} \Delta E = i\mathcal{E}\,\Delta t &= (5\ A)(6\ V)(6\ \text{min})\Big(\frac{60\ \text{seg}}{\text{min}}\Big) \\ &= 1.1\times 10^4\ J. \end{aligned}$$

Note que foi necessário converter o tempo de minutos para segundos para as unidades ficarem corretas.

P 29-4.

Uma determinada bateria de automóvel cuja fem é de 12 V tem uma carga inicial de 120 A·h. Supondo que a diferença de potencial entre seus terminais permaneça constante até que a bateria esteja completamente descarregada, por quantas horas ela poderá fornecer energia na taxa de 100 W?

▶ Se P é a taxa com a qual a bateria entrega energia e Δt é o tempo, então $\Delta E = P\,\Delta t$ é a energia entregue num tempo Δt. Se q é a carga que passa através da bateria no tempo Δt e $\mathcal{E}$ é a fem da bateria, então $\Delta E = q\mathcal{E}$. Igualando-se as duas expressões para E e resolvendo-se para Δt, temos

$$\Delta t = \frac{q\mathcal{E}}{P} = \frac{(120\,\text{A}\cdot\text{h})(12\,\text{V})}{100\,\text{W}} = 14.4 \text{ horas}.$$

29.2.2 Diferenças de potencial

P 29-5.

Na Figura 29-18, $\mathcal{E}_1 = 12$ V e $\mathcal{E}_2 = 8$ V. Qual é o sentido da corrente no resistor? Que fem está realizando trabalho positivo? Que ponto, A ou B, apresenta o mais alto potencial?

▶ O sentido da corrente é anti-horário, determinado pelo sentido da fonte "resultante" de fem: $\mathcal{E}_{\text{res}} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = 12 - 8 = 4$ V.

A fonte que realiza trabalho positivo é a que tem o mesmo sentido da fonte "resultante"; neste caso é a fonte $\mathcal{E}_1$. Se tivessemos mais fontes no circuito, *todas* as que tivessem o mesmo sentido da fonte "resultante" é que fariam trabalho positivo.

Chamando de V_A e V_B o potencial no ponto A e B, respectivamente, temos, pela "regra da fem", ao ir do ponto A ao ponto B passando através das fontes

$$V_A + 12 - 8 = V_B,$$

ou seja

$$V_A - V_B = -4 < 0,$$

o que implica ser $V_B > V_A$.

E 29-8.

Suponha que as baterias na Fig. 29-19 ao lado tenham resistências internas desprezíveis. Determine: **(a)** a corrente no circuito; **(b)** a potência dissipada em cada resistor e **(c)** a potência de cada bateria e se a energia é fornecida ou absorvida por ela.

► **(a)** Seja i a corrente no circuito e suponhamos que ela seja positiva quando passamos da direita para a esquerda de R_1. Usando a lei de Kirchhoff das malhas: $\mathcal{E}_1 - iR_2 - iR_1 - \mathcal{E}_2 = 0$. Ou seja

$$i = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2} = \frac{12\,\text{V} - 6\,\text{V}}{4\,\Omega + 8\,\Omega} = 0.5 \text{ A.}$$

O fato de termos obtido um valor *positivo* para a corrente indica que o sentido arbitrado inicialmente foi o sentido correto da corrente.

(b) A potência dissipada pelo resistor R_1 é

$$P_1 = (0.5\,\text{A})^2(4\,\Omega) = 1 \text{ W},$$

enquanto que a dissipada pelo resistor R_2 é

$$P_2 = (0.5\,\text{A})^2(8\,\Omega) = 2 \text{ W}.$$

(c) Se i representar a corrente que passa através de uma bateria com $\mathcal{E}$ de fem, então a bateria fornece energia a uma taxa $P = i\mathcal{E}$ desde que a corrente e a fem estejam na mesma direção. A bateria absorve energia a uma taxa $P = i\mathcal{E}$ se a corrente e a fem estiverem em direções opostas. Para $\mathcal{E}_1$ a potência é

$$P_1 = (0.5\,\text{A})(12\,\text{V}) = 6\,\text{W}$$

e para $\mathcal{E}_2$ ela é

$$P_2 = (0.5\,\text{A})(6\,\text{V}) = 3\,\text{W}.$$

Na bateria 1 a corrente está na mesma direção que a fem de modo que esta bateria *fornece* energia para o circuito. A bateria está descarregando-se. A corrente na bateria 2 flui na direção contrária da fem, de modo que a bateria *absorve* energia. Portanto, ela está carregando-se.

E 29-9.

Uma bateria de automóvel com uma fem de 12 V e uma resistência interna de $0.004\,\Omega$ está sendo carregada com uma corrente de 50 A. **(a)** Qual a diferença de potencial entre seus terminais? **(b)** A que taxa a energia está sendo dissipada como calor na bateria? **(c)** A que taxa a energia elétrica está sendo convertida em energia química? **(d)** Quais são as respostas dos itens (a), (b), (c) quando a bateria é usada para suprir 50 A para o motor de arranque?

► **(a)** Durante a carga, a corrente flui no sentido oposto da polaridade da fem. Portanto

$$\begin{aligned}\Delta V &= \mathcal{E} + ir \\ &= 12 + (50)(0.04) = 14 \text{ Volts.}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}P &= i^2 r \\ &= (50)^2(0.04) = 100 \text{ Watts.}\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}P &= \mathcal{E} i \\ &= (12)(50) = 600 \text{ Watts.}\end{aligned}$$

(d) Quando for a bateria quem estiver fornecendo corrente temos

$$\begin{aligned}\Delta V &= \mathcal{E} - ir \\ &= 12 - (50)(0.04) = 10 \text{ Volts.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P &= i^2 r \\ &= (50)^2(0.04) = 100 \text{ Watts.}\end{aligned}$$

E 29-10.

Na Figura 29-20 o potencial no ponto P é de 100 V. Qual é o potencial no ponto Q?

► Precisamos determinar primeiramente o sentido e o valor da corrente no circuito, para então poder determinar a queda de potencial devida a cada uma das resistências. O *sentido* da corrente é aquele imposto pela bateria mais forte: a de 150 V: sentido anti-horário. O *valor* da corrente é obtido usando a lei das malhas, de Kirchhoff. Partindo do ponto Q e seguindo no sentido anti-horário temos:

$$150 - 2i - 50 - 3i = 0, \qquad \text{ou seja} \qquad i = 20 \text{ A.}$$

Tendo este valor, partimos novamente do ponto Q no sentido anti-horário, descobrindo facilmente que

$$V_Q + 150 - 2 \times 20 = V_P \equiv 100 \text{ V.}$$

Portanto

$$V_Q = -10 \text{ V.}$$

Sugestão: refaça o problema indo de Q para P, porém aplicando a lei de Kirchhoff das malhas no sentido *horário*. Será que suas respostas finais poderão depender do sentido escolhido?

E 29-11.

Na Fig. 29-21, o trecho de circuito AB absorve 50 W de potência quando é percorrido por uma corrente $i = 1$

A no sentido indicado. **(a)** Qual a diferença de potencial entre A e B? **(b)** O elemento C não tem resistência interna. Qual é a sua fem? **(c)** Qual é a sua polaridade?

▶ *(a)* Como $P = iV_{AB}$, temos:

$$V_{AB} = \frac{P}{i} = \frac{50 \text{ W}}{1 \text{ A}} = 50 \text{ Volts.}$$

(b) Chamando-se de D um ponto qualquer que fique entre o resistor R e o elemento C, temos

$$V_{AD} = V_A - V_D = iR = 1 \text{ A} \times 2\ \Omega = 2 \text{ Volts.}$$

Portanto a fem do elemento C será

$$\mathcal{E} = V_{AB} - V_{AD} = 50 - 2 = 48 \text{ Volts.}$$

(c) Subtraia e some V_D ao valor de $V_A - V_B$ obtendo

$$\underbrace{V_A - V_B}_{50} = \underbrace{V_A - V_D}_{2} + \underbrace{V_D - V_B}_{48}.$$

Portanto $V_D > V_B$, ou seja, o terminal B é o terminal negativo.

P 29-15.

(a) Na Fig. 29-23, que valor deve ter R para que a corrente no circuito seja de 1 mA? Considere $\mathcal{E}_1 = 2$ V, $\mathcal{E}_2 = 3$ V e $r_1 = r_2 = 3\ \Omega$. **(b)** Com que taxa a energia térmica aparece em R?

▶ *(a)* Supondo que uma corrente i circula no circuito no sentido anti-horário e aplicando a lei das malhas no sentido horário, a partir de um ponto “a” localizado entre os dois terminais positivos das fontes de fem, obtemos

$$\begin{aligned} V_a - \mathcal{E}_2 + ir_2 + iR + ir_1 + \mathcal{E}_1 &= V_a \\ ir_2 + ir_1 + iR &= \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 \\ (10^{-3})(3+3) + 10^{-3}R &= 3 - 2 = 1 \\ 10^{-3}R &= 0.994 \\ R &= 994\,\Omega. \end{aligned}$$

(b)

$$P_r = i^2 R = (10^{-3})^2(994) = 9.94 \times 10^{-4} \text{ Watts.}$$

P 29-20.

▶ **(a)** Sendo i a corrente no circuito, a ddp na bateria 1 é $V_1 = \mathcal{E} - ir_1$ e para que seja nula é preciso que $i_1 = \mathcal{E}/r_1$. A lei de Kirchhoff das malhas diz-nos que $2\mathcal{E} - ir_1 - ir_2 - iR = 0$. Substituindo-se $i = \mathcal{E}/r_1$ nesta expressão nos fornece $R = r_1 - r_2$.

(b) Como R tem que ser positivo, precisamos ter $r_1 > r_2$. A ddp através da bateria com a **maior** resistência interna pode ser anulada através de uma escolha apropriada de R. A ddp através da bateria com a menor resistência interna não pode ser anulada.

P 29-22.

(a) Na Fig. 29-5a, mostre que a taxa na qual a energia é dissipada em R como energia térmica é um máximo quando $R = r$. **(b)** Mostre que esta potência máxima vale $P = \mathcal{E}^2/(4r)$.

▶ **(a)** A corrente no circuito é dada pela relação

$$i = \frac{\mathcal{E}}{r + R}.$$

Com ela vemos que a expressão $P(R)$ que dá a energia térmica liberada em função de R é:

$$P(R) = i^2 R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(r+R)^2}.$$

Para encontrar o valor procurado de R vamos procurar o ponto maximo da curva $P(R)$. O ponto de *inflexão* de $P(R)$ é obtido como raiz da primeira derivada: $dP/dR = 0$. Ou seja, da equação

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dR} &= \frac{\mathcal{E}^2}{(r+R)^2} - \frac{2\mathcal{E}^2 R}{(r+R)^3} \\ &= \frac{\mathcal{E}^2}{(r+R)^3}\,[r + R - 2R] = 0. \end{aligned}$$

Desta equação vê-se facilmente que a raiz procurada é $R = r$. NOTA: para garantir que a potência seja realmente máxima é preciso ainda investigar-se a segunda derivada de $P(R)$! Faça isto.

(b) A potência máxima liberada é:

$$P(R = r) = i^2 r = \frac{\mathcal{E}^2 r}{(r+r)^2} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}.$$

29.2.3 Circuitos de malhas múltiplas

E 29-29.

Na Fig. 29-24 determine a corrente em cada resistor e a diferença de potencial entre a e b. Considere $\mathcal{E}_1 = 6$ V, $\mathcal{E}_2 = 5$ V, $\mathcal{E}_3 = 4$ V, $R_1 = 100\ \Omega$ e $R_2 = 50\ \Omega$.

▶ Aplicando a Lei das Malhas, no sentido anti-horário, nas duas malhas indicadas obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 - i_2 R_2 &= 0, \\ -i_1 R_1 + \mathcal{E}_2 &= 0, \end{aligned}$$

que fornecem

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{\mathcal{E}_2}{R_1} = \frac{5}{100} = 0.05 \text{ A} \\ i_2 &= \frac{6-5-4}{50} = -0.06 \text{ A}. \end{aligned}$$

Note que i_2 tem sentido contrário ao que foi arbitrado inicialmente no problema. Para encontrarmos a diferença de potencial entre os pontos a e b computamos as quedas de tensão desde b até a:

$$V_b + 4 + 5 = V_a.$$

De onde descobrimos que: $V_a - V_b = 9$ Volts.

E 29-33.

Duas lâmpadas, uma de resistência R_1 e a outra de resistência R_2, $R_1 > R_2$ estão ligadas a uma bateria **(a)** em paralelo e **(b)** em série. Que lâmpada brilha mais (dissipa mais energia) em cada caso?

▶ **(a)** Seja $\mathcal{E}$ a fem da bateria. Quando as lâmpadas são conectadas em paralelo a diferença de potencial atrevés delas e a mesma e é a mesma que a fem da bateria. A potência dissipada pela lâmpada 1 é $P_1 = \mathcal{E}^2/R_1$ e a potência dissipada pela lâmpada 2 é $p_2 = \mathcal{E}^2/R_2$. Como R_1 é maior que R_2, a lâmpada 2 dissipa energia a uma taxa maior do que a lâmpada 1, sendo portanto a mais brilhante das duas.

(b) Quando as lâmpadas são conectadas em série a corrente nelas é a mesma. A potência dissipada pela lâmpada 1 é agora $P_1 = i^2 R_1$ e a potência dissipada pela lâmpada 2 é $P_2 = i^2 R_2$. Como R_1 é maior do que R_2, mais potência é dissipada pela lâmpada 1 do que pela lâmpada 2 sendo agora a lâmpada 1 a mais brilhante das duas.

E 29-35.

Nove fios de cobre de comprimento ℓ e diâmetro d estão ligados em paralelo formando um único condutor composto de resistência R. Qual deverá ser o diâmetro D de um único fio de cobre de comprimento ℓ, para que ele tenha a mesma resistência?

▶ De acôrdo com a Eq. 15 do Cap. 28, a resistência dos 9 fios juntos é

$$R = \frac{\rho\ell}{9A} = \frac{\rho\ell}{9\pi d^2/4},$$

onde A é a área de cada fio individual.

A resistência de um fio único equivalente, com mesmo comprimento ℓ é

$$R_e = \frac{\rho\ell}{\pi D^2/4}.$$

Para que tenhamos $R = R_e$ vemos que é preciso ter-se $D = 3d$, que é a resposta procurada.

P 29-39.

Dispõe-se de um certo número de resistores de 10 Ω, cada um deles capaz de dissipar somente 1 W. Que número mínimo de tais resistores precisamos dispor numa combinação série-paralelo, a fim de obtermos um resistor de 10 Ω capaz de dissipar pelo menos 5 W?

▶ Divida os resistores em m grupos em paralelo, sendo cada um destes grupos formado por um arranjo em série de n resistores. Como todos os resistores são iguais, a resistência equivalente é

$$\frac{1}{R_{\text{total}}} = \frac{m}{nR}.$$

Como desejamos que $R_{\text{total}} = R$, precisamos escolher $n = m$.

A corrente em cada resistor é a mesma e temos um total de n^2 deles, de modo que a potência total dissipada é $P_{\text{total}} = n^2 P$, sendo P a potência dissipada por apenas um resistor. É pedido que $P_{\text{total}} > 5P$, onde $P = 1$ W. Portanto, precisamos que n^2 seja maior que 5. O menor número inteiro satisfazendo esta condição é 3, o que fornece o número mínimo de resistores necessários: $n^2 = 9$, ou seja, três ramos em paralelo, cada ramo contendo três resistores em série.

P 29-40.

▶ **(a)** Estando conectadas em paralelo, não apenas a ddp sobre as duas baterias é a mesma como também a corrente i (positiva para a esquerda) que circula por elas e, portanto, $2i$ a corrente que circula em R. A regra das malhas nos fornece $\mathcal{E} - ir - 2iR = 0$, de modo que

$$i = \frac{\mathcal{E}}{r + 2R}.$$

A potência dissipada é

$$P = i^2 R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(r + 2R)^2}.$$

O valor máximo é obtido colocando-se igual a zero a derivada de P em relação a R:

$$\frac{dP}{dR} = \frac{\mathcal{E}^2}{(r+2R)^2} - \frac{4\mathcal{E}^2 R}{(r+2R)^3} = \frac{\mathcal{E}^2(r-2R)}{(r+2R)^3}.$$

Desta última expressão verificamos que P tem um valor *extremo* (que tanto pode ser um máximo quanto um mínimo), para $R = r/2$.
Para verificar que para $R = r/2$ o valor de P realmente é máximo, você ainda precisa calcular d^2P/dR^2 e verificar que tal derivada é negativa para $R = r/2$. Não deixe de conferir e, principalmente, perceber bem que nos problemas de máximo e mínimo, é sempre imprescindível o cálculo da segunda derivada antes de se poder afirmar a natureza das soluções.
(b) A taxa máxima de dissipação de energia é obtida substituindo-se $R = r/2$ na expressão da potência:

$$P_{\text{max}} = \frac{\mathcal{E}^2 r/2}{(2r)^2} = \frac{\mathcal{E}^2}{8r}.$$

P 29-46.

Na Fig. 29-33, $\mathcal{E}_1 = 3$ V, $\mathcal{E}_2 = 1$ V, $R_1 = 5\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 4\ \Omega$ e as duas baterias são ideiais. **(a)** Qual é a taxa de dissipação de energia em R_1? Em R_2? Em R_3? **(b)** Qual é a potência da bateria 1? e da bateria 2?

► **(a)** Usando a lei das malhas e a lei dos nós obtemos o sistema de três equações envolvendo as três incógnitas i_1, i_2 e i_3:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 - i_3R_3 - i_1R_1 &= 0, \\ \mathcal{E}_2 + i_2R_2 - i_1R_1 &= 0, \\ i_3 &= i_1 + i_2. \end{aligned}$$

Resolvendo estas equações, encontramos:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{\mathcal{E}_1R_2 + \mathcal{E}_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} = \frac{5}{19}\ \text{A}, \\ i_2 &= \frac{\mathcal{E}_1R_1 - \mathcal{E}_2(R_1 + R_3)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} = \frac{3}{19}\ \text{A}, \\ i_3 &= \frac{\mathcal{E}_1(R_1 + R_2) - \mathcal{E}_2R_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} = \frac{8}{19}\ \text{A}. \end{aligned}$$

A potência dissipada em cada resistor é

$$\begin{aligned} P_1 = i_1^2R_1 &= 0.346\ \text{W}, \\ P_2 = i_2^2R_2 &= 0.050\ \text{W}, \\ P_3 = i_3^2R_3 &= 0.709\ \text{W}. \end{aligned}$$

(b) As potências fornecidas são:

$$\begin{aligned} P_1 &= +\, i_3\mathcal{E}_1 = 1.263\ \text{W} \\ P_2 &= -\, i_2\mathcal{E}_2 = -0.158\ \text{W}. \end{aligned}$$

O resultado para a segunda fonte é negativo pois a corrente i_2 percorre-a no sentido contrário ao sentido de sua fem.
Observe que $1.263 = 0.346 + 0.050 + 0.158$, como deveria ser.

P 29-50.

► **(a)** O fio de cobre e a capa de alumínio estão conectados em paralelo, de modo que a ddp sobre eles é a mesma e, portanto,

$$i_C R_C = i_A R_A,$$

onde o subíndice 'C' refere-se ao cobre e 'A' ao alumínio. Para cada um dos fios sabemos que $R = \rho L/A$, ou seja,

$$R_C = \frac{\rho_C L}{\pi a^2}, \qquad R_A = \frac{\rho_A L}{\pi(b^2 - a^2)},$$

que substituidas em $i_C R_C = i_A R_A$ fornecem

$$\frac{i_C \rho_C}{a^2} = \frac{i_A \rho_A}{b^2 - a^2}.$$

Resolvendo esta equação juntamente com a equação $i = i_C + i_A$, onde i é a corrente total, obtem-se

$$\begin{aligned} i_C &= \frac{a^2 \rho_C\ i}{(b^2 - a^2)\rho_C + a^2\rho_A} \\ i_A &= \frac{(b^2 - a^2)\rho_C\ i}{(b^2 - a^2)\rho_C + a^2\rho_A}. \end{aligned}$$

Numericamente, encontramos para o denominador o valor de $3.10 \times 10^{-15}\ \Omega \cdot m^3$, e

$$i_C = 1.11\ \text{A}, \qquad i_A = 0.893\ \text{A}.$$

(b) Considere o fio de cobre. Sendo $V = 12$ Volts a ddp, usamos a expressão

$$V = i_C R_C = \frac{i_C \rho_C \, L}{\pi a^2},$$

de onde obtemos

$$L = \frac{\pi a^2 V}{i_C R_C} = 126 \text{ metros.}$$

P 29-51.

▶ Primeiro, devemos obter uma função $R_1(x)$ que forneça o valor da resistência do pedaço de R_0 que está em paralelo com R, bem como $R_2(x)$, que forneça a resistência do pedaço restante de R_0, de modo que tenhamos sempre $R_0 \equiv R_1(x) + R_2(x)$, qualquer que seja o valor de x.
O enunciado do problema informa que a resistência R_0 é *uniforme*, isto é, varia *linearmente* de 0 a R_0. Portanto,

$$\begin{aligned} R_1(x) &= \frac{x}{L} R_0, \\ R_2(x) &= R_0 - R_1(x) = \Big(1 - \frac{x}{L}\Big) R_0, \end{aligned}$$

onde x deve ser medido na mesma unidade que L, por exemplo, em centímetros.
Chamando-se de R_p o paralelo de R com R_1 temos $R_p = RR_1/(R + R_1)$ e, consequentemente, a resistência equivalente *total* R_t do circuito é

$$R_t = R_p + R_2 = R_p + \big(1 - \frac{x}{L}\big) R_0.$$

Como a corrente fornecida pela bateria é a mesma corrente que passa tanto através de R_2 quanto do *paralelo* R_p, vemos facilmente que a diferença de potencial V_R sobre R (que obviamente coincide com V_1 sobre R_1) pode ser obtida da relação

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R_t} = \frac{V_R}{R_p} \qquad (= \frac{V_1}{R_p}),$$

ou seja,

$$V_R = \frac{R_p}{R_t}\, \mathcal{E}.$$

A potência pedida é então:

$$\begin{aligned} P_R &= \frac{V_R^2}{R} \\ &= \frac{1}{R} \Big[\frac{\mathcal{E} R R_1/(R+R_1)}{(1 - x/L) R_0 + R R_1/(R + R_1)} \Big]^2, \end{aligned}$$

que, simplificada, fornece o resultado final

$$P_R = \frac{100 R (\mathcal{E} x / R_0)^2}{(100 R/R_0 + 10x - x^2)^2},$$

onde x deve ser medido em centímetros.

P 29-52.

A Fig. 29-11a (pg. 143) mostra 12 resistores, cada um de resistência R, formando um cubo. **(a)** Determine R_{13}, a resistência equivalente entre as extremidades da diagonal de uma face. **(b)** Determine R_{17}, a resistência equivalente entre as extremidades da diagonal do cubo. (Veja o Exemplo 29-4, pg. 143.)

▶ **(a)** Ao aplicar-se uma ddp entre os pontos 1 e 3, o 'truque' é perceber que temos os pontos 2 e 4 no mesmo potencial, bem como os pontos 6 e 8 estão no mesmo potencial. Portanto o circuito pode ser distorcido de modo a fazer tais pontos coincidirem, sem que tal distorção altere as correntes. .....
Longos cálculos....: $R_{13} = 3R/4$.

(b) Ao aplicar-se uma ddp entre os pontos 1 e 7, o 'truque' é perceber que temos os pontos 4 e 5 no mesmo potencial, bem como os pontos 3 e 6 estão no mesmo potencial. Portanto o circuito pode ser distorcido de modo a fazer tais pontos coincidirem, sem que tal distorção altere as correntes. .....
Longos cálculos....: $R_{17} = 5R/6$.

29.2.4 Instrumentos de medidas elétricas

P 29-56.

Qual é a corrente, em termos de $\mathcal{E}$ e R, indicada pelo amperímetro A na Fig. 29-41? Suponha que a resistência do amperímetro seja nula e a bateria seja ideal.

▶ Chamemos de *a* o terminal positivo da bateria, de *b* o terminal negativo, de *c* o terminal do amperímetro que está ligado entre $2R$ e R e, finalmente, de *d* o terminal do amperímetro que está ligado entre R e R.
Chamemos de i_1 a corrente que flui através de $2R$ de *a* para *c*. Analogamente, de i_2 a corrente fluindo de *a* para *d*. Finalmente, chamemos de i_A a corrente que flui através do amperímetro, indo de *d* para *c*. Assim, a corrente de *c* para *b* será $i_1 + i_A$, enquanto que a corrente de *d* para *b* será $i_2 - i_A$. Estas informações devem ser colocadas sobre a Figura do problema, para simplificar o uso da lei das malhas.

Verifique que a corrente que sai e que entra nos terminais da bateria tem o mesmo valor, $i_1 + i_2$, como não poderia deixar de ser.
Da lei das malhas, aplicada aos circuitos *bacb* e *badb* obtemos duas equações independentes:

$$\begin{aligned} V_{ab} = \mathcal{E} &= 2Ri_1 + R(i_1 + i_A) \\ &= Ri_2 + R(i_2 - i_A). \end{aligned}$$

Além disto, temos que

$$\begin{aligned} V_{ac} &= 2Ri_1 \\ V_{ad} &= Ri_2. \end{aligned}$$

Porém, como a resistência do amperímetro (suposto ideal aqui) é nula, sabemos que $V_A \equiv V_{cd} = 0$, ou seja, que

$$V_{ac} \equiv V_{ad}.$$

Estas três últimas equações implicam termos

$$i_2 = 2i_1$$

que, substituido na expressão acima para V_{ab} nos permite determinar que $i_1 = 2\mathcal{E}/(7R)$ e que, finalmente,

$$i_A = \frac{\mathcal{E}}{7R}.$$

P 29-58.

▶ A corrente em R_2 é i. Seja i_1 a corrente em R_1 e suponha-a para baixo. De acordo com a lei dos nós, a corrente no voltímetro é $i - i_1$, para baixo. Aplicando a lei das malhas no laço da esquerda obtemos

$$\mathcal{E} - iR_2 - i_1R_1 - ir = 0.$$

Aplicando a mesma lei no laço da direita temos

$$i_1R_1 - (i - i_1)R_V = 0.$$

Resolvendo estas equações encontramos

$$i = \frac{R_1 + R_V}{R_V}\, i_1,$$

que quando substituida na primeira das equações acima fornece-nos

$$\mathcal{E} - \frac{(R_1 + R_V)(R_2 + r)}{R_V}\, i_1 + R_1\, i_1 = 0,$$

ou seja

$$i_1 = \frac{\mathcal{E} R_V}{(R_1 + R_V)(R_2 + r) + R_1 R_V}.$$

A leitura no voltímetro será, portanto, i_1R_1, que é dada por

$$\frac{(3.0\text{ V})(5.0 \times 10^3)(250)}{(300 + 100)(250 + 5.0 \times 10^3) + (250)(5.0 \times 10^3)}$$

expressão esta que nos fornece o valor

$$i_1R_1 = 1.12\text{ Volts.}$$

A corrente na ausência do voltímetro pode ser obtida da expressão de i_1R_1 no limite $R_V \to \infty$:

$$\begin{aligned} i_1R_1 = \frac{\mathcal{E}R_1}{R_1 + R_2 + r} &= \frac{(3.0\text{ V})(250\ \Omega)}{250\ \Omega + 300\ \Omega + 100\ \Omega} \\ &= 1.15\text{ Volts.} \end{aligned}$$

O erro fracional é

$$\text{Erro} = \frac{1.15 - 1.12}{1.15} = 0.030,$$

ou seja, 3 $\%$.

P 29-63.

A ponte de Wheatstone. Na Fig. 29-44 ajustamos o valor de R_s até que os pontos a e b fiquem exatamente com o mesmo potencial. (Verificamos esta condição ligando momentaneamente um amperímetro sensível entre a e b; se estes pontos estiverem no mesmo potencial, o amperímetro não defletirá.) Mostre que, após essa ajustagem, a seguinte relação é válida:

$$R_x = R_s \frac{R_2}{R_1}.$$

▶ Chamando de i_u a corrente que passa de R_1 para R_2 e de i_d a corrente que passa de R_s para R_x, temos, supondo $V_a = V_b$:

$$i_uR_1 = i_dR_s \qquad \text{e} \qquad i_uR_2 = i_dR_x.$$

Portanto, da razão entre estas duas expressões encontramos o resultado pedido.
▶ Procedimento sugerido por um aluno: Seja i_1 a corrente em R_1 e R_2 e considere-a positiva quando apontar na direção do ponto "a" ao passar por R_1. Seja i_2 a corrente em R_s e R_x, considerando-a positiva quando ela apontar na direção do ponto "b" ao passar por R_s. Com esta convenção a regra da malhas fornece

$$(R_1 + R_2)i_1 - (R_x + R_s)i_2 = 0. \qquad (*)$$

Como os pontos "a" e "b" estão no mesmo potencial, temos $i_1 R_1 = i_2 R_s$. Esta última equação nos dá $i_2 = i_1 R_1/R_s$, que quando substituida na equação (*) acima produz

$$(R_1 + R_2)\, i_1 = (R_x + R_s)\, \frac{R_1}{R_2}\, i_1.$$

donde tiramos facilmente $R_x = R_s\, R_2/R_1$.

P 29-64.

Se os pontos a e b na Fig. 29-44 forem ligados por um fio de resistência r, mostre que a corrente no fio será

$$i = \frac{\mathcal{E}(R_s - R_x)}{(R + 2r)(R_s + R_x) + 2R_s R_x},$$

onde $\mathcal{E}$ é a fem da bateria ideal. Suponha que $R_1 = R_2 = R$ e que $R_0 = 0$. Esta fórmula é consistente com o resultado do Problema 63? e do 56?

▶

29.2.5 Circuitos RC

E 29-66.

Quantas constantes de tempo devem decorrer até que um capacitor em um circuito RC esteja carregado com menos de 1 % de sua carga de equilíbrio?

▶ A equação que rege a carga de um capacitor é

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{\frac{-t}{RC}}) = C\mathcal{E}(1 - e^{\frac{-t}{\tau}})$$

onde τ é a constante de tempo. A carga de equilíbrio é atingida para $t = \infty$, valendo então $q = C\mathcal{E}$. Portanto

$$\frac{100 - 1}{100}\, C\mathcal{E} = C\mathcal{E}(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}),$$

ou seja, $\ln[1 - 0.99] = -4.605 = -t/\tau$, fornecendo

$$t = 4.605\, \tau.$$

E 29-68.

▶ **(a)** Basta igualar-se as duas expressões para a carga num capacitor:

$$\begin{aligned} q &= CV \\ &= C\mathcal{E}\Big(1 - e^{-t/\tau}\Big), \end{aligned}$$

de onde tiramos que

$$\frac{\mathcal{E} - V}{\mathcal{E}} = e^{-t/\tau},$$

ou seja

$$-\frac{t}{\tau} = \ln\Big(\frac{12 - 5}{12}\Big) = \ln\frac{7}{12} \simeq -0.539.$$

Desta expressão, para $t = 1.3 \times 10^{-6}$ segundos, encontramos

$$\tau = \frac{1.3 \times 10^{-6}}{0.539} \simeq 2.412\ \mu\text{s}.$$

(b)

$$C = \frac{\tau}{R} = \frac{2.412 \times 10^{-6}}{15 \times 10^3} = 0.161 \times 10^{-9}\ \text{F}.$$

P 29-69.

Um capacitor com uma diferença de potencial de 100 V é descarregado através de um resistor quando uma chave entre eles é fechada no instante $t = 0$. No instante $t = 10$ s a diferença de potencial através do capacitor é 1 V. **(a)** Qual é a constante de tempo do circuito? **(b)** Qual é a diferença de potencial através do capacitor no instante $t = 17$ s?

▶ **(a)** A diferença de potencial V através das placas do capacitor está relacionada à carga q na placa positiva pela relação $V = q/C$, onde C é a capacitância. Como a carga em um capacitor que se descarrega é controlada por $q = q_0 e^{-t/\tau}$, onde q_0 é a carga no instante $t = 0$ e τ é a constante de tempo, isto significa que

$$V(t) = V_0 q^{-t/\tau},$$

onde $V_0 \equiv q_0/C$ é a diferença de potencial existente no instante inicial. Portanto

$$\tau = -\frac{t}{\ln(V/V_0)} = -\frac{10}{\ln[1/100]} \simeq 2.17\ \text{s}.$$

(b) Para $t = 17$ s, $t/\tau = 17/2.17 \simeq 7.83$ e obtemos

$$V = V_0 e^{-t/\tau} = (100)\, e^{-7.83} \simeq 3.96 \times 10^{-2}\ \text{V}.$$

P 29-71.

Um capacitor de 1 μF com uma energia inicial armazenada de 0.5 J é descarregado através de um resistor de 1 MΩ. **(a)** Qual a carga inicial no capacitor? **(b)** Qual o valor da corrente através do resistor no momento em que a descarga inicia? **(c)** Determine V_C, a voltagem através do capacitor, e V_R, a voltagem através do resistor, em função do tempo. **(d)** Expresse a taxa de geração de energia térmica no resistor em função do tempo.

▶ **(a)** A energia armazenada num capacitor é $U_C = q_0^2/(2C)$, onde C é a capacitância e q_0 é a carga inicial na placa. Portanto

$$\begin{aligned} q_0 = \sqrt{2CU_C} &= \sqrt{2(1\times 10^{-6}\text{ F})(0.5\text{ J})} \\ &= 1\times 10^{-3}\text{ C} \\ &= 1\text{ mC}. \end{aligned}$$

(b) A carga em função do tempo é $q = q_0\, e^{-t/\tau}$, onde τ é a constante de tempo. A corrente é a derivada da carga em relação ao tempo:

$$i = -\frac{dq}{dt} = \frac{q_0}{\tau}e^{-t/\tau}.$$

[O sinal negativo é necessário pois a corrente de descarga flui no sentido oposto ao sentido da corrente que fluiu durante o processo de carga.]
A corrente inicial é dada pela expressão acima no instante $t = 0$: $i_0 = q_0/\tau$. A constante de tempo é

$$\tau = RC = (1\times 10^{-6}\text{ F})(1\times 10^{6}\ \Omega) = 1\text{ s}.$$

Portanto

$$i_0 = \frac{1\times 10^{-3}\text{ C}}{1\text{ s}} = 1\text{ mA}.$$

(c) Substitua $q = q_0\, e^{-t\tau}$ em $V_C = q/C$ obtendo então

$$\begin{aligned} V_C(t) = \frac{q_0}{C}e^{-t/\tau} &= \frac{1\times 10^{-3}\text{ C}}{1\times 10^{-6}\text{ F}}\, e^{-t/(1\text{ s})} \\ &= (1\times 10^{3})\, e^{-t}\text{ V}, \end{aligned}$$

onde t é medido em segundos.
Substitua $i = (q_0/\tau)\, e^{-t/\tau}$ em $V_R = iR$, obtendo

$$\begin{aligned} V_R(t) &= \frac{q_0 R}{\tau}\, e^{-t/\tau} \\ &= \frac{(1\times 10^{-3}\text{ C})(1\times 10^{6}\ \Omega)}{(1\text{ s})}\, e^{-t/(1\text{ s})} \\ &= (1\times 10^{3})\, e^{-t}\text{ V}, \end{aligned}$$

com t medido em segundos.
(d) Substitua $i = (q_0/\tau)\, e^{-t/\tau}$ em $P = i^2 R$, obtendo

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{q_0^2 R}{\tau^2}\, e^{-2t/\tau} \\ &= \frac{(1\times 10^{-3}\text{ C})^2(1\times 10^{6}\ \Omega)}{(1\text{ s})^2}\, e^{-2t/(1\text{ s})} \\ &= (1)\, e^{-2t}\text{ W}, \end{aligned}$$

novamente com t medido em segundos.

P 29-72.

Um resistor de 3 MΩ e um capacitor de 1 μF estão ligados em um circuito de uma única malha com uma fonte de fem com $\mathcal{E} = 4$ V. Após 1 s de feita a ligação, quais são as taxas nas quais: **(a)** a carga do capacitor está aumentando; **(b)** a energia está sendo armazenada no capacitor; **(c)** a energia térmica está aparecendo no resistor e **(d)** a energia está sendo fornecida pela fonte de fem?

▶ **(a)** A carga na placa positiva do capacitor é dada por

$$q = C\mathcal{E}\left[1 - e^{-t/\tau}\right],$$

onde $\mathcal{E}$ é a fem da bateria, C é a capacitância, e τ é a constante de tempo capacitiva. O valor de τ é

$$\tau = RC = (3\times 10^{6}\ \Omega)(1\times 10^{-6}\text{ F}) = 3\text{ s}.$$

Para $t = 1$ s temos

$$\frac{t}{\tau} = \frac{1\text{ s}}{3\text{ s}} \simeq 0.333$$

e a taxa com a qual a carga está aumentando é

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} = \frac{C\mathcal{E}}{\tau}\, e^{-t/\tau} &= \frac{(1\times 10^{-6}\text{ F})(4\text{ V})}{3\text{ s}}\, e^{-0.333} \\ &\simeq 9.55\times 10^{-7}\text{ C/s}. \end{aligned}$$

Observe que 'Coulombs/segundo' é a definição de Ampère, a unidade de corrente.
(b) A energia armazenada no capacitor é dada por $U_C = q^2/(2C)$ e sua **taxa** de carga é

$$\frac{dU_C}{dt} = \frac{q}{C}\,\frac{dq}{dt}.$$

Para $t = 1$ s temos

$$\begin{aligned} q &= C\mathcal{E}\left[1 - e^{-t/\tau}\right] \\ &= (1\times 10^{-6}\text{ F})(4\text{ V})\left[1 - e^{-0.333}\right] \\ &\simeq 1.13\times 10^{-6}\text{ C}, \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}\frac{dU_C}{dt} &= \left(\frac{1.13\times10^{-6}\text{ C}}{1\times10^{-6}\text{ F}}\right)(9.55\times10^{-7}\text{ C/s})\\ &\simeq 1.08\times10^{-6}\text{ W.}\end{aligned}$$

(c) A taxa com a qual a energia está sendo dissipada no resistor é dada por $P = i^2R$. A corrente é 9.55×10^{-7} A, de modo que

$$P = (9.55\times10^{-7}\text{ A})^2(3\times10^6\,\Omega) \simeq 2.74\times10^{-6}\text{ W.}$$

(d) A taxa com a qual a energia é fornecida pela bateria é

$$i\mathcal{E} = (9.55\times10^{-7}\text{ A})(4\text{ V}) \simeq 3.82\times10^{-6}\text{ W.}$$

A energia fornecida pela bateria é ou armazenada no capacitor ou dissipada no resistor. O princípio da conservação da energia requer que

$$i\mathcal{E} = dU_C/dt + i^2R.$$

Os valores numéricos acima satisfazem o princípio de conservação, como se pode verificar facilmente.

P 29-78.

No circuito da **figura** abaixo, $\mathcal{E} = 1.2$ kV; $C = 6.5\ \mu$F; $R_1 = R_2 = R_3 = 0.73$ MΩ. Com C completamente descarregado, a chave S é subitamente fechada ($t = 0$). **(a)** Determine as correntes através de cada resistor para $t = 0$ e $t = \infty$. **(b)** Trace um gráfico que descreva qualitativamente a queda do potencial V_2 através de R_2 desde $t = 0$ a $t = \infty$. **(c)** Quais são os valores numéricos de V_2 em $t = 0$ e $t = \infty$. **(d)** Dê o significado físico de $t = \infty$ no presente problema.

► **(a)** $\boxed{\text{Em } t = 0}$ o capacitor está completamente descarregado e a corrente no ramo do capacitor é a que teríamos se *o capacitor fosse substituido for um fio condutor*. Seja i_1 a corrente em R_1; tome-a positiva quando aponta para a direita. Seja i_2 a corrente em R_2, positiva quando apontar para baixo. Seja i_3 a corrente em R_3, positiva quando apontar para baixo.

Usando a lei dos nós e a lei das malhas obtemos

$$\begin{aligned}\text{Lei dos nós :}\quad & i_1 = i_2 + i_3,\\ \text{Malha esquerda :}\quad & \mathcal{E} - i_1R_1 - i_2R_2 = 0,\\ \text{Malha direita :}\quad & i_2R_2 - i_3R_3 = 0.\end{aligned}$$

Como todas as resistências são iguais, podemos desprezar os subíndices, escrevendo apenas R, onde $R \equiv R_1 = R_2 = R_3$.
A última das três equações acima nos diz que $i_3 = i_2$ resultado que, substituido na primeira das equações acima, nos da $i_2 = i_1/2$. Com isto tudo, não é difícil agora usar-se a equação do meio para obter-se que

$$i_1 = \frac{2\mathcal{E}}{3R} = \frac{2(1.2\times10^3\text{ V})}{3(0.73\times10^6\ \Omega)} \simeq 1.1\times10^{-3}\text{ A}$$

e, consequentemente, que

$$i_2 = i_3 = \frac{\mathcal{E}}{3R} = \frac{1.2\times10^3\text{ V}}{3(0.73\times10^6\ \Omega)} \simeq 5.5\times10^{-4}\text{ A.}$$

$\boxed{\text{Em } t = \infty}$ o capacitor estará completamente carregado sendo portanto *zero a corrente no ramo que contém o capacitor*. Então $i_1 = i_2$ e a lei das malhas fornece

$$\mathcal{E} - i_1R_1 - i_2R_2 = 0,$$

o que nos fornece a solução

$$i_1 = i_2 = \frac{\mathcal{E}}{2R} = \frac{1.2\times10^3\text{ V}}{2(0.73\times10^6\ \Omega)} \simeq 8.2\times10^{-4}\text{ A.}$$

(b) Considere a placa superior do capacitor como sendo positiva. Isto é consistente com a corrente que flui em direção a esta placa. As leis dos nós e das malhas são $i_1 = i_2 + i_3$, $\mathcal{E} - i_1R - i_1R = 0$, e $-(q/C) - i_3R + i_2R = 0$. Use a primeira equação para substituir i_1 na segunda e obter $\mathcal{E} - 2i_2R - i_3R = 0$. Portanto $i_2 = (\mathcal{E} - i_3R)/(2R)$. Substitua esta expressão na terceira equação acima obtendo então $-(q/C) - (i_3R) + (\mathcal{E}/2) - (i_3R/2) = 0$. Substitua agora i_3 por dq/dt obtendo

$$i_3 = \frac{dq}{dt};\qquad \frac{3R}{2}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \frac{\mathcal{E}}{2}.$$

Como não é difícil de reconhecer, esta é a equação de um circuito RC em série, exceto que a constante de tempo é $\tau = 3RC/2$ e a diferença de potencial aplicada é $\mathcal{E}/2$. A solução é, portanto,

$$q(t) = \frac{C\mathcal{E}}{2}\Big[1 - e^{-2t/(3RC)}\Big].$$

A corrente no ramo que contém o capacitor é

$$i_3(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{3R}\, e^{-2t/(3RC)}.$$

A corrente no ramo do centro é

$$\begin{aligned} i_2(t) = \frac{\mathcal{E}}{2R} - \frac{i_3}{2} &= \frac{\mathcal{E}}{2R} - \frac{\mathcal{E}}{6R}\, e^{-2t/(3RC)} \\ &= \frac{\mathcal{E}}{6R}\left[3 - e^{-2t/(3RC)}\right] \end{aligned}$$

enquanto que a diferença de potencial ao atravessar-se R_2 é

$$V_2(t) = i_2 R = \frac{\mathcal{E}}{6}\left[3 - e^{-2t/(3RC)}\right].$$

Gráfico de $V_2(t)$: faça-o você mesmo, usando a equação acima!! É uma curva que parte do valor $v_2 = \mathcal{E}/3$, crescendo assimptóticamente para o valor $\mathcal{E}/2$.

(c) Para $t = 0$, o fator exponencial $e^{-2t/(3RC)}$ é igual a 1 e

$$V_2 = \frac{\mathcal{E}}{3} = \frac{1.2 \times 10^3 \text{ V}}{3} = 400 \text{ V}.$$

Para $t = \infty$, o fator exponencial $e^{-2/(3RC)}$ é zero e

$$V_2 = \frac{\mathcal{E}}{2} = \frac{1.2 \times 10^3 \text{ V}}{2} = 600 \text{ V}.$$

(d) O significado físico de "tempo infinito" é um certo intervalo de tempo suficientemente grande para que se possa considerar como sendo zero o valor da corrente que circula no ramo contendo o capacitor. Tal intervalo de tempo deverá ser muitas vezes maior que a constante de tempo característica do circuito em questão.