Exercícios Resolvidos de Teoria Eletromagnética

Jason Alfredo Carlson Gallas

Professor Titular de Física Teórica

Doutor em Física pela Universidade Ludwig Maximilian de Munique, Alemanha

Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul
91501-970 Porto Alegre, BRASIL

Matéria para a PRIMEIRA prova. Numeração conforme a **quarta** edição do livro
"Fundamentos de Física", Halliday, Resnick e Walker.

Esta e outras listas encontram-se em: *http://www.if.ufrgs.br/∼jgallas* clicando-se em 'ENSINO'

Conteúdo

Comentários/Sugestões e Erros: favor enviar para `jgallas @ if.ufrgs.br`
(`lista1.tex`)

24 Campo Elétrico

24.1 Questões

Q 24-2. Usamos uma carga teste *positiva* para estudar os campos elétricos. Poderíamos ter usado uma carga negativa? Porque?

▶ Não. Tal uso seria extremamente anti-natural e inconveniente pois, para começar, teríamos o **E** e **F** apontando em direções diferentes.

⊛ Tecnicamente, poderíamos usar cargas negativas sim. Mas isto nos obrigaria a reformular vários conceitos e ferramentas utilizadas na eletrostática.

Q 24-3.

As linhas de força de um campo elétrico nunca se cruzam. Por quê?

▶ Se as linhas de força pudessem se cruzar, nos pontos de cruzamento teríamos *duas tangentes diferentes*, uma para cada linha que se cruza. Em outras palavras, em tal ponto do espaço teríamos dois valores diferentes do campo elétrico, o que é absurdo.

Q 24-5.

Uma carga puntiforme q de massa m é colocada em repouso num campo não uniforme. Será que ela seguirá, necessariamente, a linha de força que passa pelo ponto em que foi abandonada?

▶ Não. A força elétrica sempre coincidirá com a direção *tangente* à linha de força.
A força elétrica, em cada ponto onde se encontra a carga, é dada por qE, onde E é o vetor campo elétrico no ponto onde se encontra a carga. Como a carga parte do repouso, a direção de sua aceleração inicial é dada pela direção do campo elétrico no ponto inicial. Se o campo elétrico for uniforme (ou radial), a trajetória da carga deve coincidir com a direção da linha de força. Entretanto, para um campo elétrico não uniforme (nem radial), a trajetória da carga não precisa coincidir necessariamente com a direção da linha de força. Sempre coincidirá, porém, com a direção tangente à linha de força.

Q 24-20.

Um dipolo elétrico é colocado em repouso em um campo elétrico uniforme, como nos mostra a Figura 24-17a, pg. 30, sendo solto a seguir. Discuta seu movimento.

▶ Sem atrito, na situação inicial mostrada na Figura 24-17a, o movimento do dipolo elétrico será periódico e oscilatório em torno do eixo 0 e em torno da posição de alinhamento de $\vec{p}$ com $\vec{E}$.

Q 24-3 extra.

Uma bola carregada positivamente está suspensa por um longo fio de seda. Desejamos determinar E num ponto situado no mesmo plano horizontal da bola. Para isso, colocamos uma carga de prova positiva q_0 neste ponto e medimos F/q_0. A razão F/q_0 será menor, igual ou maior do que E no ponto em questão?

▶ Quando a carga de prova é colocada no ponto em questão, ela repele a bola que atinge o equilíbrio numa posição em que o fio de suspensão fica numa direção ligeiramente afastada da vertical. Portanto, a distância entre o centro da esfera e a carga de prova passa a ser maior que do que a distância antes do equilíbrio. Donde se conclui que o campo elétrico no ponto considerado (antes de colocar a carga de prova) é maior do que o valor F/q medido por meio da referida carga de prova.

24.2 Problemas e Exercícios

24.2.1 Linhas de campo elétrico

E 24-3.

Três cargas estão dispostas num triângulo equilátero, como mostra a Fig. 24-22. Esboce as linhas de força devidas às cargas $+Q$ e $-Q$ e, a partir delas, determine a direção e o sentido da força que atua sobre $+q$, devido à presença das outras duas cargas. (*Sugestão*: Veja a Fig. 24-5)

▶ Chamando-se de de F_1 e F_2 as forças na carga $+q$ devidas às cargas $+Q$ e $-Q$, respectivamente, podemos ver que, em módulo, $F_1 = F_2$ pois as distâncias bem como o produto das cargas (em módulo) são os mesmos.

$$F_1 = F_2 = K\frac{qQ}{a^2}.$$

As componentes verticais de F_1 e F_2 se cancelam. As componentes horizontais se reforçam, apontando da esquerda para a direita. Portanto a força resultante é horizontal com módulo igual a

$$F = F_1 \cos\frac{\pi}{3} + F_2 \cos\frac{\pi}{3} = K\frac{qQ}{a^2}.$$

E 24-5.

Esboce qualitativamente as linhas do campo elétrico para um disco circular fino, de raio R, uniformemente carregado. (*Sugestão*: Considere como casos limites pontos muito próximos ao disco, onde o campo elétrico é perpendicular à superfície, e pontos muito afastados do disco, onde o campo elétrico é igual ao de uma carga puntiforme.)

▶ Em pontos muito próximos da superfície do disco, para distâncias muito menores do que o raio R do disco, as linhas de força são semelhantes às linhas de força de um plano infinito com uma distribuição de cargas uniforme. Como a carga total Q do disco é finita, a uma distância muito grande do disco, as linhas de força tendem a se confundir com as linhas de força de uma carga puntiforme Q. Na figura abaixo, esboçamos apenas as linhas de força da parte superior do disco e consideramos uma distribuição de cargas positivas.

24.2.2 O campo elétrico criado por uma carga puntiforme

E 24-7.

Qual deve ser o módulo de uma carga puntiforme escolhida de modo a criar um campo elétrico de 1.0 N/C em pontos a 1 m de distância?

▶ Da definição de campo elétrico, Eq. 24-3, sabemos que $E = Q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$. Portanto,

$$Q = (4\pi\epsilon_0)Er^2 = 1.11\times 10^{-10} = 0.111 \text{ nC}.$$

E 24-9.

▶ Como a magnitude do campo elétrico produzido por uma carga puntiforme q é $E = q/(4\pi\varepsilon_0\, r^2)$, temos que

$$\begin{aligned} q &= 4\pi\varepsilon_0\, r^2 E \\ &= \frac{(0.50)(2.0)}{9.0\times 10^9} \\ &= 5.6\times 10^{-11} \text{ C}. \end{aligned}$$

E 24-10.

Duas cargas puntiformes de módulos $q_1 = 2.0\times 10^{-7}$ C e $q_2 = 8.5\times 10^{-8}$ C estão separadas por uma distância de 12 cm. *(a)* Qual o módulo do campo elétrico que cada carga produz no local da outra? *(b)* Que força elétrica atua sobre cada uma delas?

▶ *(a)* O módulo do *campo* sobre cada carga é diferente, pois o valor da carga é diferente em cada ponto.

$$\begin{aligned} E_1 = K\frac{q_1}{r^2} &= (9.0\times 10^9)\,\frac{2.0\times 10^{-7}}{(0.12)^2} \\ &= 1.25\times 10^5 \;\text{ N/C}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2 = K\frac{q_2}{r^2} &= (9.0\times 10^9)\,\frac{8.5\times 10^{-8}}{(0.12)^2} \\ &= 0.53\times 10^5 \;\text{ N/C}. \end{aligned}$$

(b) O módulo da *força* sobre cada carga é o mesmo. Pela 3ª lei de Newton (ação e reação): $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ e, portanto,

$$\begin{aligned} F_{12} = F_{21} = q_1 E_2 &= q_2 E_1 \\ &= (8.5\times 10^{-8})(1.25\times 10^5) \\ &= 1.0\times 10^{-2} \;\text{ N}. \end{aligned}$$

Note que como não sabemos os *sinais* das cargas, não podemos determinar o sentido dos vetores.

E 24-11.

Duas cargas iguais e de sinais opostos (de módulo 2.0×10^{-7} C) são mantidas a uma distância de 15 cm uma da outra. *(a)* Quais são o módulo, a direção e o sentido de **E** no ponto situado a meia distância entre as cargas? *(b)* Que força (módulo, direção e sentido) atuaria sobre um elétron colocado nesse ponto?

▶ *(a)* Como o módulo das cargas é o mesmo, estando elas igualmente distantes do ponto em questão, o módulo do campo devido a cada carga é o mesmo.

$$\begin{aligned} E_1 = E_2 &= K\frac{q}{(d/2)^2} \\ &= (9\times 10^9)\frac{2.0\times 10^{-7}}{(0.15/2)^2} \\ &= 3.2\times 10^5 \text{ N/C}. \end{aligned}$$

Portanto, o campo total é

$$E_{Tot} = E_1 + E_2 = 2(3.2 \times 10^5) = 6.4 \times 10^5 \text{ N/C},$$

na direção da carga negativa $-q$.

(b) Como o elétron tem carga negativa, a força sobre ele tem sentido oposto ao do campo. O módulo da força é

$$\begin{aligned} F &= q_{\text{elétron}} E_{Tot} \\ &= q_{\text{elétron}}(E_1 + E_2) \\ &= (1.6 \times 10^{-19})(6.4 \times 10^5 \text{N},) \\ &= 1.0 \times 10^{-13} \quad \text{N} \end{aligned}$$

no sentido da carga positiva.

E 24-12.

▶ Como a carga está uniformemente distribuida na esfera, o campo elétrico na superfície é o mesmo que que teríamos se a carga estivesse toda no centro. Isto é, a magnitude do campo é

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2},$$

onde q é a magnitude da carga total e R é o raio da esfera.
A magnitude da carga total é Ze, de modo que

$$\begin{aligned} E &= \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \\ &= \frac{(9 \times 10^9)(94)(1.6 \times 10^{-19})}{6.64 \times 10^{-15}} \\ &= 3.07 \times 10^{21} \text{ N/C}. \end{aligned}$$

P 24-17.

▶ Desenhe sobre uma linha reta dois pontos, q_2 e q_1, separados por uma distância d, com q_2 à esquerda de q_1. Para pontos *entre* as duas cargas os campos elétricos individuais apontam na mesma direção não podendo, portanto, cancelarem-se. A carga q_2 tem maior magnitude que q_1, de modo que um ponto onde o campo seja nulo deve estar mais perto de q_1 do que de q_2. Portanto, deve estar localizado à direita de q_1, digamos em ponto P.
Escolhendo q_2 como a origem do sistema de coordenadas, chame de x a distância de q_2 até o ponto P, o ponto onde o campo anula-se. Com estas variáveis, a magnitude total do campo elétrico em P é dada por

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Big[\frac{q_2}{x^2} - \frac{q_1}{(x-d)^2}\Big],$$

onde q_2 e q_1 representam as magnitudes das cargas.

Para que o campo se anule, devemos ter

$$\frac{q_2}{x^2} = \frac{q_1}{(x-d)^2}.$$

A raiz física (das duas raízes possíveis) é obtida considerando-se a raiz quadrada *positiva* de ambos lados da equação acima. Isto fornece-nos

$$\frac{\sqrt{q_1}}{x} = \frac{\sqrt{q_2}}{(x-d)}.$$

Resolvendo agora para x obtemos

$$\begin{aligned} x = \Big(\frac{\sqrt{q_2}}{\sqrt{q_2} - \sqrt{q_1}}\Big)d &= \Big(\frac{\sqrt{4q_1}}{\sqrt{4q_1} - \sqrt{q_1}}\Big)d \\ &= \Big(\frac{2}{2-1}\Big)d \\ &= 2\,d \\ &= 2(0.50 \text{ cm}) \\ &= 100 \text{ cm}. \end{aligned}$$

O ponto P está a 50 cm à direita de q_1.

P 24-21.

Determine o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico no ponto P da Fig. 24-30.

▶ A soma dos campos devidos as duas cargas $+q$ é *nula* pois no ponto P os campos tem módulos coincidentes porém sentidos opostos. Assim sendo, o campo resultante em P deve-se unica e exclusivamente à carga $+2q$, perpendicular à diagonal que passa pelas duas cargas $+q$, apontado para 'fora' da carga $+2q$. O módulo do campo é

$$E = K\frac{2q}{(\frac{a\sqrt{2}}{2})^2} = K\frac{4q}{a^2} = \frac{1}{\pi\epsilon_0}\ \frac{q}{a^2}.$$

P 24-22

Qual o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico no centro do quadrado da Fig. 24-31, sabendo que $q = 1.0 \times 10^{-8}$ C e $a = 5$ cm.

▶ Escolhamos um sistema de coordenadas no qual o eixo x passe pelas cargas $-q$ e $-2q$, e o eixo y passe pelas cargas q e $2q$.
No centro do quadrado, os campos produzidos pelas cargas negativas estão ambos sobre o eixo x, e cada um deles aponta do centro em direção a carga que lhe da origem. Como cada carga esta a uma distância $d = a\sqrt{2}/2 = a/\sqrt{2}$ do centro, o campo líquido resultante devidos as duas cargas negativas é

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Big[\frac{2q}{a^2/2} - \frac{q}{a^2/2}\Big] \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{a^2/2} \\ &= (9\times 10^9)\,\frac{1.0\times 10^{8}}{(0.050)^2/2} \\ &= 7.19\times 10^4 \text{ N/C.} \end{aligned}$$

No centro do quadrado, os campos produzidos pelas cargas positivas estão ambos sobre o eixo y, apontando do centro para fora, afastando-se da carga que lhe da origem. O campo líquido produzido no centro pelas cargas positivas é

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Big[\frac{2q}{a^2/2} - \frac{q}{a^2/2}\Big] \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{a^2/2} \\ &= 7.19\times 10^4 \text{ N/C.} \end{aligned}$$

Portanto, a magnitude do campo é

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \\ &= \sqrt{2(7.19\times 10^4)^2} \\ &= 1.02\times 10^5 \text{ N/C.} \end{aligned}$$

O ângulo que tal campo faz com o eixo dos x é

$$\begin{aligned} \theta &= \tan^{-1}\frac{E_y}{E_x} \\ &= \tan^{-1}(1) \\ &= 45^o. \end{aligned}$$

Tal ângulo aponta do centro do quadrado para cima, dirigido para o centro do lado superior do quadrado.

24.2.3 O campo criado por um dipolo elétrico

E 24-23.

Determine o momento de dipolo elétrico constituído por um elétron e um próton separados por uma distância de 4.3 nm.

▶ O módulo da carga das duas partículas é $q = 1.6 \times 10^{-19}$ C. Portanto, temos aqui um belo exemplo de exercício de multiplicação:

$$\begin{aligned} p = qd &= (1.6\times 10^{-19})(4.3\times 10^{-9}) \\ &= 6.88\times 10^{-28} \text{ C m.} \end{aligned}$$

E 24-25

Na Fig. 24-8, suponha que ambas as cargas sejam positivas. Mostre que E no ponto P, considerando $z \gg d$, é dado por:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{2q}{z^2}.$$

▶ Usando o princípio de superposição e dois termos da expansão

$$(1+x)^{-2} \simeq 1 - 2x + 3x^3 - 4x^4 + \ldots,$$

válida quando $|x| < 1$, obtemos

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{q}{(z-d/2)^2} + \frac{q}{(z+d/2)^2}\Big] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{z^2}\,\Big[\big(1-\frac{d}{2z}\big)^{-2} + \big(1+\frac{d}{2z}\big)^{-2}\Big] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{z^2}\,\Big[\Big(1 - 2(-\frac{d}{2z}) + \ldots\Big) \\ &\qquad + \Big(1 - 2(\frac{d}{2z}) + \ldots\Big)\Big] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{2q}{z^2}. \end{aligned}$$

E 24-26.

Calcule o campo elétrico (módulo, direção e sentido) devido a um dipolo elétrico em um ponto P localizado a uma distância $z \gg d$ sobre a mediatriz do segmento que une as cargas (Figura 24-32). Expresse sua resposta em termos de momento de dipolo $\mathbf{p}$.

► Obtém-se o campo $\vec{E}$ resultante no ponto P somando-se vetorialmente

$$\vec{E} = \vec{E}_+ \; + \; \vec{E}_- .$$

A magnitude dos vetores é dada por:

$$E_+ = E_- = K\frac{q}{r^2 + d^2/4}.$$

As soma das componentes sobre a mediatriz se cancelam enquanto as componentes perpendiculares a ela somam-se. Portanto, chamando-se θ o ângulo entre o eixo do dipolo e a direção de $\mathbf{E}_+$ (ou de $\mathbf{E}_-$), segue

$$E = 2E_+ \cos\theta,$$

onde, da figura,

$$\cos\theta = \frac{d/2}{\sqrt{r^2 + d^2/4}}.$$

Com isto segue

$$\begin{aligned} E &= 2K\frac{q}{r^2 + d^2/4}\,\frac{d/2}{\sqrt{r^2+d^2/4}} \\ &= K\frac{qd}{(r^2+d^2/4)^{3/2}} \\ &= \frac{K}{(r^2)^{3/2}}\,\frac{qd}{[1+d^2/(4r^2)]^{3/2}}. \end{aligned}$$

Como o problema nos diz que $r \gg d$, podemos desprezar o termo $d^2/(4r^2)$ no último denominador acima, obtendo para o módulo do campo o valor

$$E = K\frac{qd}{r^3}.$$

Em termos do momento de dipolo $|\mathbf{p}| = qd$, uma vez que $\mathbf{E}$ e $\mathbf{p}$ tem sentidos opostos, temos

$$\mathbf{E} = -K\frac{\mathbf{p}}{r^3}.$$

O vetor $\mathbf{E}$ aponta para baixo.

24-27*

Quadrupolo elétrico. A figura abaixo mostra um quadrupolo elétrico típico.

Ele é constituído por dois dipolos cujos efeitos em pontos externos não chegam a se anular completamente. Mostre que o valor de E no eixo do quadrupolo, para pontos a uma distância z do seu centro (supor $z \gg d$), é dado por:

$$E = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 z^4},$$

onde $Q(=2qd^2)$ é chamado de momento de quadrupolo da distribuição de cargas.

► A distância entre o ponto P e as duas cargas positivas são dadas por $(z-d)$ e $(z+d)$. A distância entre P e as cargas negativas são iguais a z. De acordo com o princípio de superposição, encontramos:

$$\begin{aligned} E &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{(z-d)^2} + \frac{1}{(z+d)^2} - \frac{2q}{z^2}\right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2}\left[\frac{1}{(1-d/z)^2} + \frac{1}{(1+d/z)^2} - 2\right] \end{aligned}$$

Expandindo em série como feito no livro-texto, para o caso do dipolo [ver Apêndice G],

$$(1+x)^{-2} \simeq 1 - 2x + 3x^3 - 4x^4 + \ldots,$$

válida quando $|x| < 1$, obtemos

$$\begin{aligned} E &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2}\Big[\big(1 + \frac{2d}{z} + \frac{3d^2}{z^2} + \ldots\big) \\ &\qquad + \big(1 - \frac{2d}{z} + \frac{3d^2}{z^2} + \ldots\big) - 2\Big], \end{aligned}$$

de onde se conclui que, considerando-se os termos até a segunda ordem, inclusive, temos

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2}\left[\frac{6d^2}{z^2}\right] = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 z^4},$$

onde o momento de quadrupolo é definido como $Q = 2qd^2$.
Em contraste com a derivação apresentada no livro-texto, observe que aqui foi necessário usarmos o termo quadrático na expansão em série, uma vez que a contribuição devida ao termo linear era nula.

24.2.4 O campo criado por uma linha de cargas

P 24-30.

Um elétron tem seu movimento restrito ao eixo do anel de cargas de raio R discutido na seção 24-6. Mostre que a força eletrostática sobre o elétron pode fazê-lo oscilar através do centro do anel, com uma freqüência angular dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{eq}{4\pi\epsilon_0 m R^3}}.$$

▶ Como visto no livro-texto, a magnitude do campo elétrico num ponto localizado sobre o eixo de um anel homogeneamente carregado, a uma distância z do centro do anel, é dado por (Eq. 24-19):

$$E = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 (R^2+z^2)^{3/2}},$$

onde q é a carga sobre o anel e R é o raio do anel.
Para que possa haver oscilação a carga q sobre o anel deve ser necessariamente positiva. Para uma carga q positiva, o campo aponta para cima na parte superior do anel e para baixo na parte inferior do anel. Se tomarmos a direção para cima como sendo a direção positiva, então a força que atua num elétron sobre o eixo do anel é dada por

$$F = -e\,E = -\frac{eqz}{4\pi\epsilon_0 (R^2+z^2)^{3/2}},$$

onde e representa a magnitude da carga do elétron.
Para oscilações de pequena amplitude, para as quais vale $z \ll R$, podemos desprezar z no denominador da expressão da força, obtendo então, nesta aproximação,

$$F = -\frac{eq}{4\pi\epsilon_0 R^3}\, z \equiv -k\, z.$$

Desta expressão reconhecemos ser a força sobre o elétron uma força *restauradora*: ela puxa o elétron em direção ao ponto de equilíbrio $z = 0$. Além disto, a magnitude da força é proporcional a z, com uma contante de proporcionalidade $k = eq/(4\pi\epsilon_0 R^3)$, como se o elétron estivesse conectado a uma mola. Ao longo do eixo, portanto, o elétron move-se num movimento harmônico simples, com uma freqüência angular dada por (reveja o Cap. 14, caso necessário)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{eq}{4\pi\epsilon_0 m R^3}},$$

onde m representa a massa do elétron.

P 24-31.

Na Fig. 24-34, duas barras finas de plástico, uma de carga $+q$ e a outra de carga $-q$, formam um círculo de raio R num plano xy. Um eixo x passa pelos pontos que unem as duas barras e a carga em cada uma delas está uniformemente distribuída. Qual o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico $\mathbf{E}$ criado no centro do círculo?

▶ Por simetria, cada uma das barras produz o mesmo campo elétrico $\mathbf{E_0}$ que aponta no eixo $+y$ no centro do círculo. Portanto o campo total é dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{E} = 2E_0\mathbf{j} &= 2\mathbf{j}\int \frac{\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2}\, dq \\ &= 2\mathbf{j}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2}\, \frac{qR\,d\theta}{\pi R} \\ &= \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4q}{\pi R^2}\right)\mathbf{j}.\end{aligned}$$

P 24-32.

Uma barra fina de vidro é encurvada na forma de um semicírculo de raio r. Uma carga $+Q$ está distribuída uniformemente ao longo da metade superior, e uma carga $-Q$, distribuída uniformemente ao longo da metade inferior, como mostra a Fig. 24-35. Determine o campo elétrico $\mathbf{E}$ no ponto P, o centro do semicírculo.

▶ Para a metade superior:

$$dE^+ = K\,\frac{dq}{r^2} = K\frac{\lambda d\ell}{r^2}$$

onde $\lambda = Q/(2\pi r/4) = 2Q/(\pi r)$ e $d\ell = r\,d\theta$. Portanto

$$dE^+ = K\,\frac{2Q}{\pi r}\,\frac{r d\theta}{r^2} = 2\frac{KQ}{\pi r^2}\,d\theta.$$

O módulo da componente $\mathbf{E}_x^+$ do campo total é, portanto,

$$\begin{aligned} E_x^+ = \int dE_x^+ &= \int dE^+ \cos\theta \\ &= \frac{2KQ}{\pi r^2}\int_0^{\pi/2} \cos\theta\; d\theta \\ &= \frac{2KQ}{\pi r^2}\Big[\text{ sen }\theta\Big]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{2KQ}{\pi r^2}. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} E_y^+ = \int dE_y^+ &= \int dE^+ \text{ sen }\theta \\ &= \frac{2KQ}{\pi r^2}\int_0^{\pi/2} \text{ sen }\theta\; d\theta \\ &= \frac{2KQ}{\pi r^2}\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{2KQ}{\pi r^2}. \end{aligned}$$

Usando argumentos de simetria: Usando a *simetria* do problema vemos facilmente que as componentes horizontais cancelam-se enquanto que as verticais reforçam-se. Assim sendo, o módulo do campo total é simplesmente

$$E = 2E_y = \frac{4KQ}{\pi r^2}$$

com o vetor correspondente apontando para baixo.
Usando 'força-bruta': Podemos obter o mesmo resultado sem usar a simetria fazendo os cálculos. Mas temos que trabalhar bem mais (perder mais tempo durante a prova!!). Veja só:
Tendo encontrado que $E_x = E_y = \frac{2KQ}{\pi r^2}$, vemos que o módulo do campo E_+ devido às cargas positivas é dado por

$$E_+ = \sqrt{{E_x}^2 + {E_y}^2} = \sqrt{2}\,\frac{2KQ}{\pi r^2}$$

formando -45^o com o eixo dos x.
Para a metade inferior o cálculo é semelhante. O resultado final é

$$|\vec{E}_-| = |\vec{E}_+| = \sqrt{2}\,\frac{2KQ}{\pi r^2}.$$

O campo $\vec{E}_-$ forma com o eixo dos x um ângulo de $-(90^o + 45^o) = -135^o$.

Portanto, o módulo do campo total $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$ aponta para baixo e tem magnitude dada por

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{E_+^2 + E_-^2} \\ &= \sqrt{2}\,E_+ \\ &= \sqrt{2}\,E_- \\ &= \sqrt{2}\left(\sqrt{2}\,\frac{2KQ}{\pi r^2}\right) \\ &= \frac{4KQ}{\pi r^2}. \end{aligned}$$

Conclusão: Termina mais rápido (e com menos erro!) quem estiver familiarizado com a exploração das simetrias. Isto requer treino...

P 24-35.

Na Fig. 24-38, uma barra não-condutora "semi-infinita" possui uma carga por unidade de comprimento, de valor constante λ. Mostre que o campo elétrico no ponto P forma um ângulo de 45^o com a barra e que este ângulo é independente da distância R.

► Considere um segmento infinitesimal dx da barra, localizado a uma distância x a partir da extremidade esquerda da barra, como indicado na figura acima. Tal segmento contém uma carga $dq = \lambda dx$ e está a uma distância r do ponto P. A magnitude do campo que dq produz no ponto P é dada por

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\,dx}{r^2}.$$

Chamando-se de θ o ângulo entre R e r, a componente horizontal x do campo é dada por

$$dE_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\,dx}{r^2}\,\text{ sen }\theta,$$

enquanto que a componente vertical y é

$$dE_y = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\,dx}{r^2}\,\cos\theta.$$

Os sinais negativos em ambas expressões indicam os sentidos negativos de ambas as componentes em relação ao ponto de origem, escolhido como sendo a extremidade de esquerda da barra.
Vamos usar aqui o ângulo θ como variável de integração. Para tanto, da figura, vemos que

$$\cos\theta = \frac{R}{r}, \qquad \text{sen}\,\theta = \frac{x}{r}, \qquad x = R\,\tan\theta,$$

e, portanto, que

$$dx = R\,\sec^2\theta\,d\theta = R\,\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta.$$

Os limites de integração vão de 0 até $\pi/2$. Portanto

$$\begin{aligned} E_x = \int_0^{\pi/2} dE_x &= -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\int_0^{\pi/2} sen\,\theta\,d\theta \\ &= +\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\cos\theta\Big|_0^{\pi/2} \\ &= -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}, \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned} E_y = \int_0^{\pi/2} dE_y &= -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\int_0^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta \\ &= -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\,sen\,\theta\Big|_0^{\pi/2} \\ &= -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}. \end{aligned}$$

Destes resultados vemos que $E_x = E_y$, sempre, qualquer que seja o valor de R. Além disto, como as duas componentes tem a mesma magnitude, o campo resultante $\mathbf{E}$ faz um ângulo de 45^o com o eixo negativo dos x, para todos os valores de R.

24.2.5 O campo elétrico criado por um disco carregado

P 24-38.

A que distância, ao longo do eixo central de um disco de plástico de raio R, uniformemente carregado, o módulo do campo elétrico é igual à metade do seu valor no centro da superfície do disco?

► A magnitude do campo elétrico num ponto situado sobre o eixo de um disco uniformemente carregado, a uma distância z acima do centro do disco, é dado por (Eq. 24-27)

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\Big[1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\Big],$$

onde R é o raio do disco e σ a sua densidade superficial de carga. No centro do disco ($z = 0$) a magnitude do campo é $E_c = \sigma/(2\epsilon_0)$.
O problema pede para determinar o valor de z tal que tenhamos $E/E_c = 1/2$, ou seja, tal que

$$1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{1}{2},$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{1}{2}.$$

Desta expressão obtemos $z^2 = R^2/4 + z^2/4$, isto é $z = \pm R/\sqrt{3}$.
Observe que existem *duas* soluções possíveis: uma 'acima', outra 'abaixo' do plano do disco de plástico.

24.2.6 Carga puntiforme num campo elétrico

E 24-39.

Um elétron é solto a partir do repouso, num campo elétrico uniforme de módulo 2.0×10^4 N/C. Calcule a sua aceleração (ignore a gravidade).

► O módulo de tal aceleração é fornecido pela segunda lei de Newton:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m} = 3.51 \times 10^{15}\ \text{m/s}^2.$$

E 24-43.

Um conjunto de nuvens carregadas produz um campo elétrico no ar próximo à superfície da Terra. Uma partícula de carga -2.0×10^{-9} C, colocada neste campo, fica sujeita a uma força eletrostática de 3.0×10^{-6} N apontando para baixo. *(a)* Qual o módulo do campo elétrico? *(b)* Qual o módulo, a direção e o sentido da força elétrostática exercida sobre um próton colocado neste campo? *(c)* Qual a força gravitacional sobre o próton? *(d)* Qual a razão entre a força elétrica e a força gravitacional, nesse caso?

► *(a)* Usando a Eq. 24-3 obtemos para o módulo de $\mathbf{E}$:

$$E = \frac{F}{q} = \frac{3.0 \times 10^{-6}\ \text{N}}{2.0 \times 10^{-9}\ \text{C}} = 1500\ \text{N/C}.$$

A força aponta para baixo e a carga é negativa. Logo, o campo aponta de baixo para cima.
(b) O módulo da força eletrostética F_e exercida sobre o próton é

$$F_e = qE = 2.40 \times 10^{-16} \text{ N}.$$

Como o próton tem carga positiva, a força sobre ele terá a mesma direção do campo: de baixo para cima.

(c) A força gravitacional exercida sobre o próton é

$$\begin{aligned} F_g = mg &= (1.67 \times 10^{-27})(9.8) \\ &= 1.64 \times 10^{-26} \text{ N}, \end{aligned}$$

apontando de cima para baixo.

(d) A razão entre as magnitudes das forças elétrica e gravitacional é

$$\frac{F_e}{F_g} = 1.46 \times 10^{10}.$$

Portanto, vemos que o peso F_g do próton pode ser completamente ignorado em comparação com a força elétrostática exercida sobre o próton.

E 24-45.

(a) Qual é a aceleração de um elétron num campo elétrico uniforme de 1.4×10^6 N/C? *(b)* Quanto tempo leva para o elétron, partindo do repouso, atingir um décimo da velocidade da luz? *(c)* Que distância ele percorre? Suponha válida a mecânica Newtoniana.

► *(a)* Usando a lei de Newton obtemos para o módulo da aceleração:

$$\begin{aligned} a = \frac{F}{m_e} = \frac{eE}{m_e} &= \frac{(1.6 \times 10^{-19})(1.4 \times 10^6)}{9.1 \times 10^{-31}} \\ &= 2.46 \times 10^{17} \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

(b) Partindo-se do repouso (i.e. com $v_0 = 0$) e usando a equação $v = v_0 + at$ obtemos facilmente que

$$\begin{aligned} t = \frac{c/10}{a} &= \frac{3 \times 10^8/10}{2.46 \times 10^{17}} \\ &= 0.122 \times 10^{-9} \text{ s}. \end{aligned}$$

(c) A distância percorrida é

$$\begin{aligned} d = \frac{1}{2}at^2 &= \frac{1}{2}(2.46 \times 10^{17})(0.122 \times 10^{-9})^2 \\ &= 1.83 \times 10^{-3} \text{ m}. \end{aligned}$$

E 24-46.

Uma arma de defesa que está sendo considerado pela Iniciativa de Defesa Estratégica ("Guerra nas Estrelas") usa feixes de partículas. Por exemplo, um feixe de prótons, atingindo um míssil inimigo, poderia inutilizá-lo. Tais feixes podem ser produzidos em "canhões", utilizando-se campos elétricos para acelerar as partículas carregadas. *(a)* Que aceleração sofreria um próton se o campo elétrico no canhão fosse de 2.0×10^4 N/C. *(b)* Que velocidade o próton atingiria se o campo atuasse durante uma distância de 1 cm?

► *(a)* Usando a segunda lei de Newton encontramos:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m} = 1.92 \times 10^{12} \text{ m/s}^2.$$

(b) Usando a Eq. 15 do Cap. 2, encontramos:

$$v = \sqrt{2a(x - x_0)} = 196 \text{ km/s}.$$

⊛ É preciso lembrar-se das fórmulas aprendidas no curso de Mecânica Clássica (Física I).

E 24-47.

Um elétron com uma velocidade escalar de 5.0×10^8 cm/s entra num campo elétrico de módulo 1.0×10^3 N/C, movendo-se paralelamente ao campo no sentido que retarda seu movimento. *(a)* Que distância o elétron percorrerá no campo antes de alcançar (momentaneamente) o repouso? *(b)* Quanto tempo levará para isso? *(c)* Se, em vez disso, a região do campo se estendesse somente por 8 mm (distância muito pequena para parar o elétron), que fração da energia cinética inicial do elétron seria perdida nessa região?

► *(a)* Primeiro, calculemos a aceleração do elétron devida ao campo:

$$\begin{aligned} a = \frac{eE}{m_e} &= \frac{(1.6 \times 10^{-19})(1.0 \times 10^3)}{9.1 \times 10^{-31}} \\ &= 1.76 \times 10^{14} \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

Portanto, usando o fato que $v^2 = v_0^2 - 2a(x - x_0)$ e definindo $d = x - x_0$ temos, para a distância viajada:

$$d = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{(5.0 \times 10^6)^2}{2\,(1.76 \times 10^{14})} = 7.12 \times 10^{-2} \text{ m}.$$

(b) Usando o fato que $v = v_0 - at$ e que $v = 0$, temos

$$t = \frac{v_0}{a} = \frac{5.0 \times 10^6}{1.76 \times 10^{14}} = 28.40 \times 10^{-9} \text{ s}.$$

(c) Basta determinar a velocidade do elétron quando o campo terminar. Para tanto, usamos $v^2 = v_0^2 - 2a\Delta$, onde $\Delta = 8 \times 10^{-3}$ m é a extensão do campo.

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + 2a\Delta \\ &= (5.0 \times 10^6)^2 - 2\,(1.76 \times 10^{14})(8 \times 10^{-3}) \\ &= 22.2 \times 10^{12}\ \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

Portanto, a fração da energia cinética perdida é dada por

$$\frac{K - K_0}{K_0} = \frac{v^2 - v_0^2}{v_0^2} = \frac{22.2 - 25}{25} = -0.112$$

ou seja, *perde* 11.2% da sua energia cinética.
Se voce gosta de trabalhar mais, pode calcular as energias explicitamente e determinar o mesmo percentual.
A energia cinética K perdida é dada por

$$\begin{aligned} K = \frac{1}{2} m_e v^2 &= \frac{1}{2}(9.1 \times 10^{-31})(22.2 \times 10^{12}) \\ &= 1.01 \times 10^{-17}\ \text{ J.} \end{aligned}$$

A energia cinética inicial K_0 era

$$\begin{aligned} K_0 = \frac{1}{2} m_e v_0^2 &= \frac{1}{2}(9.1 \times 10^{-31})(5.0 \times 10^6)^2 \\ &= 1.138 \times 10^{-17}\ \text{ J.} \end{aligned}$$

E 24-49.

Na experiência de Milikan, uma gota de raio $1.64\ \mu$m e de densidade 0.851 g/cm^3 fica suspensa na câmara inferior quando o campo elétrico aplicado tem módulo igual a 1.92×10^5 N/C. Determine a carga da gota em termos de e.

▶ Para a gota estar em equilíbrio é necessário que a força gravitacional (peso) esteja contrabalançada pela força eletrostática associada ao campo elétrico, ou seja, é preciso ter-se $mg = qE$, onde m é a massa da gota, q é a carga sobre a gota e E é a magnitude do campo elétrico no qual a gota está imersa. A massa da gota é dada por $m = V\rho = (4\pi/3) r^3 \rho$, onde r é seu raio e ρ é a sua densidade de massa. Com isto tudo, temos

$$\begin{aligned} q &= \frac{mg}{E} \\ &= \frac{4\pi r^3 \rho g}{3E} \\ &= \frac{4\pi (1.64 \times 10^{-6}\ \text{m})^3 (851\ \text{kg/m}^3)(9.8\ \text{m/s}^2)}{3(1.92 \times 10^5\ \text{N/C})} \\ &= 8.0 \times 10^{-19}\ \text{C}, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$n = \frac{q}{e} = \frac{8.026 \times 10^{-19}\ \text{C}}{1.6 \times 10^{-19}\ \text{C}} = 5,$$

ou seja, $q = 5e$.

P 24-54.

Duas grandes placas de cobre, paralelas, estão separadas por 5 cm e entre elas existe um campo elétrico uniforme como é mostrado na Fig. 24-39. Um elétron é liberado da placa negativa ao mesmo tempo que um próton é liberado da placa positiva. Despreze a força que existe entre as partículas e determine a distância de cada uma delas até a placa positiva no momento em que elas passam uma pela outra. (não é preciso conhecer o módulo do campo elétrico para resolver este problema. Isso lhe causa alguma surpresa?)

▶ A aceleração do próton é $a_p = eE/m_p$ e a aceleração do elétron é $a_e = -eE/m_e$, onde E é a magnitude do campo elétrico e m_p e m_e representam as massas do próton e do elétron, respectivamente.
Consideremos a origem de referência como sendo na posição inicial do próton na placa à esquerda. Assim sendo, a coordenada do próton num instante t qualquer é dada por $x_p = a_p t^2/2$ enquanto que a coordenada do elétron é $x_e = L + a_e t^2/2$. As partículas passam uma pela outra quando suas coordenadas coincidem, $x_p = x_e$, ou seja, quando $a_p t^2/2 = L + a_e t^2/2$. Isto ocorre quando $t^2 = 2L/(a_p - a_e)$, que nos fornece

$$\begin{aligned} x_p &= \frac{a_p}{a_p - a_e}\, L \\ &= \frac{eE/m_p}{eE/m_p + eE/m_e}\, L \\ &= \frac{m_e}{m_e + m_p}\, L \\ &= \frac{9.11 \times 10^{-31}}{9.11 \times 10^{-31} + 1.67 \times 10^{-27}}\ (0.050\ \text{m}) \\ &= 2.7 \times 10^{-5}\ \text{m} \\ &= 2.7 \times 10^{-3}\ \text{cm.} \end{aligned}$$

Portanto, enquanto o elétron percorre os 5 cm entre as placas, o próton mal conseguiu mover-se!

P 24-55.

▶ (a) Suponha que o pêndulo faça um ângulo θ com a vertical. Desenhado-se o diagrama de forças temos mg

para baixo, a tensão no fio, fazendo um ângulo θ para a esquerda do vetor qE, que aponta para cima já que a carga é positiva.
Consideremos o ângulo assim definido como sendo positivo. Então o torque sobre a esfera em torno do ponto onde o fio esta amarrado à placa superior é

$$\tau = -(mg - qE)\ell \text{ sen } \theta.$$

Se $mg > qE$, então o torque é um torque restaurador: ele tende a empurrar o pêndulo de volta a sua posição de equilíbrio.
Se a amplitude de oscilação é pequena, sen θ pode ser substituido por θ em radianos, sendo então o torque dado por

$$\tau = -(mg - qE)\ell\theta.$$

O torque é proporcional ao deslocamento angular e o pêndulo move-se num movimento harmônico simples. Sua freqüência angular é

$$\omega = \sqrt{(mg - qE)\ell/I},$$

onde I é o momento de inércia rotacional do pêndulo. Como para um pêndulo simples sabemos que $I = m\ell^2$, segue que

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{(mg - qE)\ell}{m\ell^2}} \\ &= \sqrt{\frac{g - qE/m}{\ell}} \end{aligned}$$

e o período é

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g - qE/m}}.$$

Quando $qE > mg$ o torque não é restaurador e o pêndulo não oscila.
(b) A força do campo elétrico está agora para baixo e o torque sobre o pêndulo é

$$\tau = -(mg + qE)\ell\theta$$

se o deslocamento for pequeno. O período de oscilação é

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g + qE/m}}.$$

P 24-56.

Na Fig. 24-41, um campo elétrico $\mathbf{E}$, de módulo 2×10^3 N/C, apontando para cima, é estabelecido entre duas placas horizontais, carregando-se a placa inferior positivamente e a placa superior negativamente. As placas têm comprimento $L = 10$ cm e separação $d = 2$ cm. Um elétron é, então, lançado entre as placas a partir da extremidade esquerda da placa inferior. A velocidade inicial tem um módulo de 6×10^6 m/s. **(a)** Atingirá o elétron uma das placas? **(b)** Sendo assim, qual delas e a que distância horizontal a partir da extremidade esquerda?

► Considere a origem 0 como sendo o ponto em que o elétron é projetado para o interior do campo. Seja $0x$ o eixo horizontal e $0y$ o eixo vertical indicado na Fig. ???-36. Oriente $0x$ da esquerda para a direita e $0y$ de baixo para cima, como a carga do elétron é negativa, a força elétrica está orientada de cima para baixo (no sentido oposto ao sentido do campo elétrico). A aceleração do elétron é dada por

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m} = 3.513 \times 10^{14} \text{ m/s}^2.$$

Para saber se o elétron atinge ou não a placa superior, devemos calcular inicialmente o tempo t necessário para que ele atinja a altura $y = 0.02$ m da placa superior. Podemos escrever a seguinte relação:

$$y = (v_0 \text{ sen } \theta)t + \frac{at^2}{2}.$$

Temos: $v_0 \,\text{sen}\, \theta = (6.0 \times 10^6)$ sen$45^0 = 4.24 \times 10^6$ m/s. Substituindo os valores adequados na relação anterior e resolvendo a equação do segundo grau em t, encontramos:

$$t_1 = 6.420 \times 10^{-9} \text{ s e } t_2 = 1.774 \times 10^{-8} \text{ s}.$$

O menor valor de t é o que nos interessa (o outro corresponde ao trecho descendente da trajetória). Neste intervalo de tempo t_1 o elétron se deslocou uma distância x dada por

$$\begin{aligned} x = (v_0 \cos\theta)t_1 &= (4.24 \times 10^6)(6.420 \times 10^{-9}) \\ &= 0.0272 \text{ m.} \\ &= 2.72 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Como $2.72 < 10$ cm, concluimos que: *(a)* o elétron atinge a placa superior, e, *(b)* num ponto situado a 2.72 cm da extremidade esquerda da placa superior.

24.2.7 Um dipolo num campo elétrico

P 24-60.

Determine a freqüência de oscilação de um dipolo elétrico, de momento de dipolo p e momento de inércia I, para pequenas amplitudes de oscilação, em torno de sua posição de equilíbrio, num campo elétrico uniforme de módulo E.

► A magnitude do torque que atua no dipolo elétrico é dada por $\tau = pE \operatorname{sen}\theta$, onde p é a magnitude do momento de dipolo, E é a magnitude do campo elétrico e θ é o ângulo entre o momento de dipolo e o campo elétrico.
O torque é sempre 'restaurador': ele sempre tende agirar o momento de dipolo em direção ao campo elétrico. Se θ é positivo o torque é negativo e vice-versa: $\tau = -\,pE \operatorname{sen}\theta$.
Quando a amplitude do movimento é pequena, podemos substituir $\operatorname{sen}\theta$ por θ em radianos. Neste caso, $\tau = -\,pE\theta$. Como a magnitude do torque é proporcional ao ângulo de rotação, o dipolo oscila num movimento harmônico simples, de modo análogo a um pêndulo de torsão com constante de torsão $\kappa = pE$. A freqüência angular é dada por

$$\omega^2 = \frac{\kappa}{I} = \frac{pE}{I},$$

onde I é o momento de inércia rotacional do dipolo. Portanto, a freqüência de oscilação é

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{pE}{I}}.$$