Exercícios Resolvidos de Teoria Eletromagnética

Jason Alfredo Carlson Gallas

Professor Titular de Física Teórica

Doutor em Física pela Universidade Ludwig Maximilian de Munique, Alemanha

Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul
91501-970 Porto Alegre, BRASIL

Matéria para a SEGUNDA prova. Numeração conforme a **quarta** edição do livro "Fundamentos de Física", Halliday, Resnick e Walker.

Esta e outras listas encontram-se em: *http://www.if.ufrgs.br/∼jgallas*

Conteúdo

Comentários/Sugestões e Erros: favor enviar para `jgallas @ if.ufrgs.br`

(`lista2.tex`)

27 Capacitância

27.1 Questões

Q 27-3.

Uma folha de alumínio de espessura desprezível é colocada entre as placas de um capacitor, como mostra a Fig. 27-18. Que efeito ela produzirá sobre a capacitância se **(a)** a folha estiver eletricamente isolada e **(b)** a folha estiver ligada à placa superior?

► *(a)* Como a folha é metálica, aparecerão cargas induzidas em ambos lados dela, transformando assim o capacitor original em uma associação em série de dois capacitores cuja distância entre as placas é a metade da distância original "d":

$$\begin{aligned} C_{\text{c/folha}} &= \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_0 A/(d/2)} + \frac{1}{\epsilon_0 A/(d/2)}} \\ &= \frac{\epsilon_0 A}{d/2 + d/2} \\ &= \frac{\epsilon_0 A}{d}. \end{aligned}$$

Esta capacitância coincide com a capacitância original. Logo, não existe alteração da capacitância pela introdução da folha metálica a meia distância.

(b) O efeito é reduzir a distância d, entre as placas, pela metade. Ou seja, *duplicar* a capacitância original.

Q 27-6.

Considere um capacitor de placas paralelas, com placas quadradas de área A e separação d, no vácuo. Qual é o efeito qualitativo sobre sua capacitância, de cada uma das seguinte operações: **(a)** Reduzir d. **(b)** Introduzir uma placa de cobre entre as placas, sem tocá-las. **(c)** Duplicar a área de ambas as placas. **(d)** Duplicar a área de apenas uma das placas. **(e)** Deslizar as placas paralelamente uma à outra, de modo que a área de superposição seja, digamos, 50% do seu valor original. **(f)** Duplicar a diferença de potencial entre as placas. **(g)** Inclinar uma das placas de modo que a separação permaneça d numa das extremidades, mas passe a $d/2$ na outra.

► *(a)* A capacitância aumenta. Para verificar isto, use a relação $C = \varepsilon_0 A/d$.

(b) A capacitância aumenta. Para verificar esta afirmação, note que a nova capacitância dada pela relação $C = \varepsilon_0 A/(d-t)$, onde d é a distância entre as placas e t é a espessura da placa introduzida. O efeito é pequeno quando t for muito menor que d. Tudo se passa como se a nova distância entre as placas fosse $(d-t)$.

(c) A capacitância dobra.

(d) A carga sobre a placa maior se distribuirá numa área maior. Portanto, a densidade de carga sobre a placa maior é $\sigma/2$, onde σ é a densidade de carga sobre a placa menor. O campo elétrico deixará de ser uniforme e, como as linhas de força ficam afastadas, concluímos que o campo elétrico torna-se menor e a diferença de potencial também diminui. Como $C = q/V$, concluímos que a *capacitância aumenta*. Contudo este efeito é muito pequeno.

(e) Como a área torna-se igual $A/2$, sendo A a área inicial, concluímos que a capacitância se reduz aproximadamente a 50% do valor inicial (a capacitância não se reduz exatamente a 50% do valor inicial devido ao efeito de borda).

(f) O valor de C permanece inalterado. A carga também dobra.

(g) A capacitância aumenta. Pense numa associação em paralelo de capacitores, sendo que para cada capacitor a distância entre as placas vai diminuindo de d até $d/2$. Ao diminuir a distância entre as placas, a capacitância de cada capacitor vai aumentando. Donde se conclui que a capacitância total é bastante maior do que a capacitância do capacitor de placas paralelas.

Q 27-14.

Um objeto dielétrico experimenta uma força líquida quando é submetido a um campo elétrico não-uniforme. Por que não há uma força líquida quando o campo é uniforme?

► Num campo elétrico uniforme a polarização também é uniforme, de modo que o dielétrico funciona como se fosse um corpo carregado apenas na sua superfície externa. A carga total é nula, ou seja, as cargas superficiais são iguais e contrárias. Portanto, a força total que age sobre o dielétrico é igual a zero.

Q 27-17.

Um capacitor de placas paralelas é carregado por meio de uma bateria que, logo a seguir, é retirada. Uma lâmina dielétrica é, então, introduzida entre as placas do capacitor. Descreva qualitativamente o que acontece com a carga, a capacitância, a diferença de potencial, o campo elétrico, a energia armazenada e com a lâmina.

▶ A carga q nas placas permanece inalterada quando a bateria é removida (Lei da Conservação da Carga).
Sendo C_0 o valor da capacitância antes de se introduzir o dielétrico, o novo valor da capacitância será dado por $C = \kappa C_0$. Se $\kappa > 1$, então a capacitância irá aumentar. Se $\kappa < 1$, então a capacitância irá diminuir.
Como q permanece constante (após a retirada da bateria) e devemos sempre satisfazer a relação $q = CV$, vemos que uma alteração para $C = \kappa C_0$ da capacitância implica na necessidade da nova diferença de potencial passar a ser $V = V_0/\kappa$, onde V_0 representa o valor do potencial antes de introduzir-se o dielétrico. Somente assim iremos garantir que o produto CV permaneça constante. Note que o potencial poderá tanto aumentar quanto diminuir, dependendo se $\kappa < 1$ ou $\kappa > 1$, respectivamente.
O campo elétrico resultante $\vec{E}$ entre as placas diminui: $\vec{E} = \vec{E}_0 - \vec{E}'$, onde $\vec{E}'$ é o campo oposto a $\vec{E}_0$ produzido pelas cargas superficiais q' induzidas no dielétrico.
O dielétrico fica polarizado. O livro-texto discute bem isto...
Dito de outro modo: As cargas de polarização na superfície do dielétrico são negativas para a superfície próxima da placa positiva. Sendo assim, concluímos que o campo elétrico entre as placas diminui. Como a diferença de potencial é igual Ed, a diferença de potencial também diminui. Como $C = q/V$, e a carga q permanece constante, concluímos que a capacitância C aumenta. Conforme sabemos, a energia elétrica armazenada entre as placas de um capacitor é dada por: $U = q^2/2C$. Portanto, concluímos que a energia elétrica armazenada entre as placas do capacitor diminui. Para entender qualitativamente esta diminuição de energia, faça o seguinte raciocínio: a placa é atraída para o interior do capacitor de modo que o agente externo precisa realizar um trabalho negativo sobre a placa para introduzi-la no interior do capacitor com velocidade constante.

Q 27-18.

Enquanto um capacitor permanece ligado a uma bateria, uma lâmina dielétrica é introduzida entre as placas. Descreva qualitativamente o que acontece com a carga, a capacitância, a diferença de potencial, o campo elétrico, e a energia armazenada. É necessário a realização de trabalho para introduzir a lâmina?

▶ A carga q livre nas placas aumenta pois a bateria está ligada; a capacitância aumenta para $C = \kappa C_0$; a diferença de potencial não muda pois é mantida constante pela bateria. O campo elétrico $\vec{E}$ resultante também permanece constante pois $V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$, ou seja, $V = Ed$, onde V e d (que é a distância constante entre as placas) são constantes. A energia $U = q^2/(2C) = CV^2/2 = qV/2$ aumenta pois V é constante mas C e q aumentam.
A força externa realiza um trabalho [para introduzir o dielétrico com velocidade constante]:

$$W = \int \vec{F}_{\text{ext}} \cdot d\vec{\ell} = \int F_{\text{ext}}\, dl\, \underbrace{\cos 180^o}_{=\,-1} < 0,$$

de modo que

$$\Delta\text{Energia}_{\text{total}} = \underbrace{\Delta U_{\text{capacitor}}}_{>\,0} + \underbrace{W_{F_{\text{ext}}}}_{<\,0} = 0,$$

princípio da conservação da energia.

27.2 Problemas e Exercícios

27.2.1 Capacitância

E 27-1.

Um eletrômetro é um instrumento usado para medir carga estática: uma carga desconhecida é colocada sobre as placas do capacitor do medidor e a diferença de potencial é medida. Que carga mínima pode ser medida por um eletrômetro com uma capacitância de 50 pF e uma sensibilidade à voltagem de 0.15 V?

▶

$$\begin{aligned} q = CV = 50 \times 10^{-12} \times 0.15 &= 7.5 \times 10^{-12}\ \text{C} \\ &= 7.5\ \text{pC}. \end{aligned}$$

Como a magnitude da carga elementar é $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C, vemos que a carga mínima acima corresponde a termos

$$\begin{aligned} n &= \frac{7.5 \times 10^{-12}}{1.6 \times 10^{-19}} \\ &= 46 \times 10^6 \\ &= 46 \text{ milhões de cargas elementares} \end{aligned}$$

sobre as placas do capacitor. Mesmo sendo um valor 'mínimo', o número de cargas ainda é enorme!

E 27-3.

O capacitor da Fig. 27-22 tem uma capacitância de 25 pF e está inicialmente sem carga. A bateria fornece uma diferença de potencial de 120 V. Após a chave S ter ficado fechada por um longo tempo, quanta carga terá passado através da bateria?

▶ Da relação entre carga e ddp, Eq. 1, encontramos:

$$q = CV = 25 \times 10^{-6} \times 120 = 3 \times 10^{-3}\ \text{C} = 3\ \text{mC}.$$

27.2.2 Cálculo da capacitância

E 27-5.

Um capacitor de placas paralelas possui placas circulares de raio 8.2 cm e separação 1.3 mm. **(a)** Calcule a capacitância. **(b)** Que carga aparecerá sobre as placas se a ddp aplicada for de 120 V?

▶ *(a)*

$$\begin{aligned} C = \epsilon_0\, \frac{A}{d} &= 8.85 \times 10^{-12}\, \frac{\pi\,(8.2 \times 10^{-2})^2}{1.3 \times 10^{-3}} \\ &= 1.44 \times 10^{-10} = 144\,\text{pF}. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} q = CV = 144 \times 10^{-12} \times 120 &= 1.73 \times 10^{-8} \\ &= 17.3\ \text{nC}. \end{aligned}$$

E 27-7.

A placa e o catodo de um diodo a vácuo têm a forma de dois cilindros concêntricos com a catodo sendo o cilindro central. O diâmetro do catodo é de 1.6 mm e o diâmetro da placa é de 18 mm; os dois elementos têm comprimento de 2.4 cm. Calcular a capacitância do diodo.

▶ Para um capacitor cilíndrico (com $a < b$) temos da Eq. 27-14 ou da Tabela 1:

$$\begin{aligned} C = 2\pi\epsilon_0 \frac{L}{\ln(b/a)} &= 5.51 \times 10^{-13}\ \text{F} \\ &= 0.551\ \text{pF}. \end{aligned}$$

P 27-12.

Calculamos, na Seção 27-3, a capacitância de um capacitor cilíndrico. Usando a aproximação $\ln(1 + x) \simeq x$, quando $x \ll 1$ (veja o Apêndice G), mostre que ela se aproxima da capacitância de um capacitor de placas paralelas quando o espaçamento entre os dois cilindros é pequeno.

▶ A capacitância em questão é dada por

$$C = 2\pi\epsilon_0\, \frac{L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}.$$

Chamando-se de d o espaçamento entre os dois cilindros, temos que $b = a + d$.

$$\begin{aligned} C &= 2\pi\epsilon_0\, \frac{L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \\ &= 2\pi\epsilon_0\, \frac{L}{\ln\left(\frac{a+d}{a}\right)} \\ &= 2\pi\epsilon_0\, \frac{L}{\ln\left(1 + \frac{d}{a}\right)} \\ &\simeq 2\pi\epsilon_0\, \frac{L}{d/a} = \epsilon_0\, \frac{2\pi a L}{d} = \epsilon_0\, \frac{A}{d}, \end{aligned}$$

onde $A \equiv 2\pi a L$ é a área das placas e a aproximação foi feita supondo-se que $a \gg d$.

P 27-13.

Suponha que as duas cascas esféricas de um capacitor esférico tenham aproximadamente raios iguais. Sob tais condições, tal dispositivo se aproxima de um capacitor de placas paralelas com $b - a = d$. Mostre que a Eq. 27-17 se reduz, de fato à Eq. 27-9, nesse caso.

▶ A capacitância do capacitor esférico em questão é

$$C = 4\pi\epsilon_0\, \frac{ab}{b - a}.$$

Chamando-se de r os dois raios supostos aproximadamente iguais, segue que $ab \simeq r^2$. Por outro lado, $b - a = d$. Portanto,

$$C = 4\pi\epsilon_0\, \frac{ab}{b - a} \simeq \epsilon_0 \frac{4\pi r^2}{d} = \epsilon_0 \frac{A}{d},$$

onde $A \equiv 4\pi r^2$ é a área das placas.

P 27-14.

Um capacitor foi construido para operar com uma capacitância constante, em meio a uma temperatura variável. Como se demonstra na Fig. 27-23, o capacitor é do tipo de placas paralelas com "separadores" de plástico para manter as placas alinhadas. **(a)** Mostre que a taxa de variação da capacitância C com a temperatura T é dada por

$$\frac{dC}{dT} = C\Big(\frac{1}{A}\frac{dA}{dT} - \frac{1}{x}\frac{dx}{dT}\Big),$$

onde A é a área de cada placa e x a separação entre as placas. **(b)** Se as placas forem de alumínio, qual deverá ser o coeficiente de expansão térmica dos separadores a fim de que a capacitância não varie com a temperatura? (Ignore o efeito dos separadores sobre a capacitância.)

▶ *(a)* A capacitância C é uma função de duas varáveis: (i) da área A das placas e (ii) da distância x entre as placas:

$$C = \epsilon_0\,\frac{A}{x}.$$

Portanto, a disciplina de *Cálculo* nos ensina que as variações da capacitância C com a temperatura T são determinadas pela equação

$$\frac{dC}{dT} = \frac{\partial C}{\partial A}\frac{dA}{dT} + \frac{\partial C}{\partial x}\frac{dx}{dT}.$$

Calculando-se as derivadas parciais, encontramos

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial A} &= \frac{\epsilon_0}{x} = \frac{C}{A},\\ \frac{\partial C}{\partial x} &= -\frac{\epsilon_0 A}{x^2} = -\frac{C}{x},\end{aligned}$$

que, substituidas da expressão para dC/dT acima, nos fornecem

$$\begin{aligned}\frac{dC}{dT} &= \frac{\partial C}{\partial A}\frac{dA}{dT} + \frac{\partial C}{\partial x}\frac{dx}{dT}\\ &= \frac{C}{A}\frac{dA}{dT} - \frac{C}{x}\frac{dx}{dT}\\ &= C\Big(\frac{1}{A}\frac{dA}{dT} - \frac{1}{x}\frac{dx}{dT}\Big),\end{aligned}$$

que é o resultado pedido.

(b) Da Eq. 19-9 sabemos que a variação ΔL de um comprimento L qualquer quando submetido a uma variação ΔT de temperatura é dado pela equação

$$\Delta L = L\alpha\Delta T,$$

onde α é o chamado 'coeficiente de expansão térmica' do material em questão. Esta equação pode também ser re-escrita como

$$\frac{1}{L}\frac{\Delta L}{\Delta T} = \alpha_s$$

onde α_s já representa agora o valor do coeficiente de expansão térmica do separador.
Analogamente (veja o Exercício 19-37), a variação ΔA de uma área A em função de uma variação ΔT de temperatura pode ser escrita como

$$\frac{1}{A}\frac{\Delta A}{\Delta T} = 2\alpha_{\text{Al}},$$

onde $\alpha_{\text{Al}} = 46\times 10^{-6}$ /^{o}C representa o coeficiente de expansão térmica do alumínio (veja a Tabela 19-3) de que são feitas as placas, e o fator 2 leva em conta a bidimensionalidade das áreas.
Para que a capacitância não varie com temperatura é preciso que $dC/dT = 0$, ou seja, que

$$\frac{1}{A}\frac{dA}{dT} - \frac{1}{x}\frac{dx}{dT} = 2\alpha_{\text{Al}} - \alpha_s = 0,$$

onde consideramos variações ΔA e ΔT infinitesimais.
Da igualdade mais à direita vemos que, para evitar variações de C com T, o coeficiente de expansão térmica dos separadores deverá ser escolhido tal que

$$\alpha_s = 2\alpha_{\text{Al}} = 92\times 10^{-6}\ /^o\text{C}.$$

27.2.3 Capacitores em paralelo e em série

E 27-15.

Quantos capacitores de 1 μF devem ser ligados em paralelo para acumularem uma carga de 1 C com um potencial de 110 V através dos capacitores?

▶ Para poder armazenar 1 C a 110 V a capacitância equivalente do arranjo a ser construido deverá ser:

$$C_{eq} = \frac{q}{V} = \frac{1}{110} \simeq 9091\ \mu\text{F}.$$

Para uma conexão em paralelo sabemos que $C_{eq} = n\ C$ onde C é a capacitância individual de cada capacitor a ser usado. Portanto, o número total de capacitores será:

$$n = \frac{C_{eq}}{C} = \frac{9091\ \mu\text{F}}{1\ \mu\text{F}} = 9091.$$

E 27-16.

Na Fig. 27-24, determine a capacitância equivalente da combinação. Suponha $C_1 = 10\ \mu$F, $C_2 = 5\ \mu$F e $C_3 = 4\ \mu$F.

▶ Os capacitores C_1 e C_2 estão em paralelo, formando um capacitor equivalente C_{12} que, por sua vez, está em série com C_3. Portanto, a capacitância equivalente total é dada por

$$C\text{eq} = \frac{C_{12} \times C_3}{C_{12} + C_3} = \frac{(10+5) \times 4}{(10+5)+4} = \frac{60}{19} \simeq 3.15\ \mu\text{F}.$$

E 27-17.

Na Fig. 27-25, determine a capacitância equivalente da combinação. Suponha $C_1 = 10\ \mu$F, $C_2 = 5\ \mu$F e $C_3 = 4\ \mu$F.

▶ Os capacitores C_1 e C_2 estão em série. Portanto

$$C_{12} = \frac{1}{\frac{1}{10} + \frac{1}{5}} = \frac{10}{3}\ \mu\text{F}.$$

O capacitor equivalente total é dado pela ligação em paralelo de C_{12} e C_3:

$$C_{eq} = \frac{10}{3} + 4 = \frac{10}{3} + \frac{12}{3} = \frac{22}{3} \simeq 7.33\ \mu\text{F}.$$

E 27-18.

Cada um dos capacitores descarregados na Fig. 27-26 tem uma capacitância de $25\ \mu$F. Uma diferença de potencial de 4200 V é estabelecida quando a chave é fechada. Quantos coulombs de carga passam então através do amperímetro A?

▶ Basta usar a fórmula $q = C_{eq} V$, onde C_{eq} é o capacitor equivalente da ligação em paralelo, $C_{eq} = 3C$, onde $C = 25\ \mu$F, e $V = 4200$ Volts. Portanto, a carga total medida é

$$q = 3 \times 25 \times 10^{-6} \times 4200 = 315\ \text{mC}.$$

P 27-19.

Uma capacitância $C_1 = 6\ \mu$F é ligada em série com uma capacitância $C_2 = 4\ \mu$F e uma diferença de potencial de 200 V é aplicada através do par. **(a)** Calcule a capacitância equivalente. **(b)** Qual é a carga em cada capacitor? **(c)** Qual a diferença de potencial através de cada capacitor?

▶ **(a)** A capacitância equivalente é

$$C_{eq} = \frac{1}{1/6 + 1/4} = \frac{24}{4+6} = \frac{12}{5}\ \mu\ \text{F}.$$

(b) A carga no capacitor equivalente é

$$q = C_{eq} V = \frac{12 \times 10^{-6}}{5} \times 200 = 0.48 \times 10^{-3}\ \text{C}.$$

Como os capacitores estão em série, este valor é o módulo da carga que está sobre cada uma das placas dos dois capacitores. Ou seja, $q_1 = q_2 = 0.48$ mC. **(c)**

$$V_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{0.48 \times 10^{-3}}{6 \times 10^{-6}} = 80\ \text{Volts},$$

e

$$V_2 = \frac{q_2}{C_2} = \frac{0.48 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-6}} = 120\ \text{Volts}.$$

P 27-26.

A Fig. 27-28 mostra dois capacitores em série, cuja seção central, de comprimento b, pode ser deslocada verticalmente. Mostre que a capacitância equivalente dessa combinação em série é independente da posição da seção central e é dada por

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{a - b}.$$

▶ Chamando-se de d a distância entre as placas da parte superior da figura, obtemos as seguintes expressões para as capacitâncias individuais de cada um dos dois capacitores:

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 A}{d}, \qquad C_2 = \frac{\epsilon_0 A}{a - b - d}.$$

Ligando-os em série obtemos

$$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{1}{\frac{d}{\epsilon_0 A} + \frac{a-b-d}{\epsilon_0 A}} = \frac{\epsilon_0 A}{a - b}.$$

Desta expressão vemos que a capacitância equivalente não depende de d, ou seja, não depende da posição da seção reta central.

P 27-28.

Na Fig. 27-29, os capacitores $C_1 = 1\ \mu$F e $C_2 = 3\ \mu$F são ambos carregados a um potencial $V = 100$ V mas com polaridades opostas, como é mostrado. As chaves S_1 e S_2 são, então fechadas. **(a)** Qual é a diferença de potencial entre os pontos a e b? **(b)** Qual é a carga sobre C_1? **(c)** Qual é a carga sobre C_2?

▶ (a) Após as chaves serem fechadas as diferenças de potencial são as mesmas e os dois capacitores estão em paralelo. A ddp de a até b é $V_{ab} = Q/C_{eq}$, one Q é

a carga líquida na combinação e C_{eq} é a capacitância equivalente.
A capacitância equivalente é

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = 4 \times 10^{-6} \text{ F}.$$

A carga total na combinação é a carga líquida sobre cada par de placa conectadas. A carga sobre o capacitor 1 é

$$\begin{aligned} q_1 &= C_1 V \\ &= (1 \times 10^{-6})(100 \text{ V}) = 1 \times 10^{-4} \text{ C} \end{aligned}$$

e a carga sobre o capacitor 2 é

$$\begin{aligned} q_2 &= C_2 V \\ &= (3 \times 10^{-6})(100 \text{ V}) = 3 \times 10^{-4} \text{ C}, \end{aligned}$$

de modo que a carga líquida sobre a combinação é $(3-1) \times 10^{-4}$ C $= 2 \times 10^{-4}$ C. Portanto, a diferença de potencial pedida é

$$V_{ab} = \frac{2 \times 10^{-4} \text{ C}}{4 \times 10^{-6} \text{ F}} = 50 \text{ V}.$$

(b) A carga no capacitor 1 é agora

$$q_1 = C_1 V_{ab} = (1 \times 10^{-6})(50) = 5 \times 10^{-5} \text{ C}.$$

(c) A carga no capacitor 2 é agora

$$q_2 = C_2 V_{ab} = (3 \times 10^{-6})(50) = 1.5 \times 10^{-4} \text{ C}.$$

P 27-29.

Quando a chave S, na Fig. 27-30, é girada para a esquerda, as placas do capacitor C, adquirem uma diferença de potencial V_0. Os capacitores C_1 e C_2 estão inicialmente descarregados. A chave é, agora, girada para a direita. Quais são as cargas finais q_1, q_2 e q sobre os capacitores correspondentes?

▶ As cargas nos capacitores 2 e 3 são as mesmas, de modo que eles podem ser substituidos por um capacitor equivalente dado por

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{C_2 + C_3}{C_2 C_3}.$$

Portanto $C_{\text{eq}} = C_2 C_3 / (C_2 + C_3)$. A carga no capacitor equivalente é a mesma que em qualquer um dos capacitores da combinação. A diferença de potencial através do capacitor equivalente é q_2 / C_{eq}. A diferença de potencial através do capacitor 1 é q_1 / C_1, onde q_1 é a carga em C_1.
A diferença de potencia através da combinação dos capacitores 2 e 3 tem que ser a mesma diferença de potencial através do capacitor 1, de modo que

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_{\text{eq}}}. \qquad (a)$$

Quando fechamos a chave pela segunda vez, parte da carga originalmente no capacitor 1 flui para a combinação de 2 e 3. Sendo q_0 é a carga original, a lei da conservação da carga nos fornece

$$q_1 + q_2 = q_0 = C_1 V_0, \qquad (b)$$

onde V_0 é a diferença de potencial original através do capacitor 1.
Da Eqs. (b) tiramos que

$$q_2 = C_1 V_0 - q_1$$

que, quando substituida na Eq. (a), fornece

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{C_1 V_0 - q_1}{C_{\text{eq}}},$$

que, finalmente, nos fornece q_1:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{C_1^2 \, V_0}{C_{\text{eq}} + C_1} \\ &= \frac{C_1^1 \, V_0}{\frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} + C_1} \\ &= \frac{C_1^2 (C_2 + C_3) V_0}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3}. \end{aligned}$$

As cargas nos capacitores 2 e 3 são

$$\begin{aligned} q_2 = q_3 &= C_1 V_0 - q_1 \\ &= C_1 V_0 - \frac{C_1^2 (C_2 + C_3) V_0}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} \\ &= \frac{C_1 C_2 C_3 V_0}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3}. \end{aligned}$$

▶ `Segunda solução:` Considere a figura abaixo:

As cargas iniciais estão indicadas à esquerda de cada capacitor. As cargas finais estão indicadas à direita de cada capacitor. Inicialmente, podemos escrever a seguinte relação:

$$q = C_1 V_0.$$

De acordo com a Lei da Conservação da Carga, ao conectarmos os capacitores C_2 e C_3, a carga total $-q$ no condutor, X indicado na figura da solução deste problema, deve permanecer constante. Logo,

$$-q = -q_1 - q_3$$

Donde se conclui que

$$q_1 + q_3 = C_1 V_0$$

Aplicando a Lei da Conservação da Carga no condutor Y indicado na figura de solução deste problema, encontramos: $0 = -q_2 + q_3$. Donde se conclui que $q_2 = q_3$. Aplicando a Lei da Conservação da Carga para o condutor Z, indicado na figura do problema, não conduz a nenhuma equação nova. Sabemos que o campo eletrostático é conservativo. Então, as somas de diferença de potencial ao longo da malha fechada deve ser nula (Lei das Malhas). Portanto,

$$0 = \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_3}{C_3} - \frac{q_1}{C_1}$$

As relações (1), (2) e (3) formam um sistema de três equações e três incógnitas q_1, q_2 e q_3. A solução deste sistema fornece a resposta

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{C_1C_2 + C_1C_3}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3} C_1 V_0, \\ q_2 = q_3 &= \frac{C_2C_3}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3} C_1 V_0. \end{aligned}$$

27.2.4 Armazenamento de energia num campo elétrico

E 27-34.

Que capacitância é necessária para armazenar uma energia de 10 kW·h sob uma diferença de potencial de 1000 V?

► Como sabemos que a energia armazenada num capacitor é $U = CV^2/2$, a 'dificuldade' do problema consiste apenas em determinar quantos Joules correspondem a 10 kW·h.

Lembrando que 1 J $=$ 1Watt·segundo, simplesmente precisamos multiplicar $(10^3$ W$/kW)(3600$ s/h$)$ para obter que 10 kW·h $= 3.6 \times 10^7$ J. Portanto

$$C = \frac{2U}{V^2} = \frac{2(3.6 \times 10^7)}{(1000)^2} = 72 \text{ F}.$$

E 27-37.

Dois capacitores, de capacitância 2μF e 4μF, são ligados em paralelo através de uma diferença de potencial de 300 V. Calcular a energia total armazenada nos capacitores.

► A energia total é a soma das energias armazenadas em cada capacitor. Com eles estão conectados em paralelo, a diferença de potencial V a que estão submetidos é a mesma. A energia total é, portanto,

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}(C_1 + C_2)V^2 \\ &= \frac{1}{2}\Big(2 \times 10^{-6} + 4 \times 10^{-6}\Big)(300)^3 \\ &= 0.27 \text{ J}. \end{aligned}$$

P 27-47.

Um capacitor cilíndrico tem raio interno a e raio externo b (como indicado na Fig. 27-6, pág. 95). Mostre que metade da energia potencial elétrica armazenada está dentro de um cilindro cujo raio é

$$r = \sqrt{ab}.$$

► A energia acumulada num campo elétrico que ocupa um volume $\mathcal{V}$ é obtida integrando-se, sobre todo o volume $\mathcal{V}$, a densidade de energia u_E do campo elétrico. Portanto,

$$U(r) = \int u_E \, d\mathcal{V} = \frac{\epsilon_0}{2}\int_a^r E^2 d\mathcal{V},$$

onde $dV = 2\pi r L dr$ é o elemento de volume da gaussiana cilíndrica de raio r considerada (ver Fig. 27-6). Usando a Eq. 27-12, encontramos que o campo elétrico entre as placas de um capacitor cilíndrico de comprimento L contendo uma carga q e de raio r é dado por

$$E(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L r}.$$

Substituindo-se este valor na equação para $U(r)$, acima, encontramos a seguinte relação para a energia acumulada no campo elétrico dentro do volume compreendido entre o cilindro de raio a e o cilindro de raio r:

$$\begin{aligned} U(r) &= \frac{\epsilon_0}{2}\int_a^r \left(\frac{q}{2\pi\epsilon_0 Lr}\right)^2 2\pi Lr\, dr \\ &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L}\int_a^r \frac{dr}{r} \\ &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L}\ln\left(\frac{r}{a}\right). \end{aligned}$$

A energia potencial máxima U_M é obtida para $r \equiv b$:

$$U_M \equiv U(b) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L}\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Para obter o valor de r pedido precisamos simplesmente determinar o valor de r para o qual tenhamos $U(r) = U_M/2$. Substituindo-se nesta equação os valores de $U(r)$ e U_M acima, encontramos sem nenhuma dificuldade que

$$r = \sqrt{ab}.$$

P 27-49.

Mostre que as placas de um capacitor de placas paralelas se atraem mutuamente com uma força dada por

$$F = \frac{q^2}{2\epsilon_0 A}.$$

Obtenha o resultado calculando o trabalho necessário para aumentar a separação das placas de x para $x + dx$, com a carga q permanecendo constante.

► O trabalho feito num campo elétrico é definido por

$$\begin{aligned} dW &= F\, dx \\ &= q\, dV = qE\, dx. \end{aligned}$$

Portanto, por comparação destas fórmulas, obtemos a magnitude da força é $F = e\,E$.
Para um capacitor de placas paralelas sabemos que a magnitude do campo é dada por $E = \sigma/2\epsilon_0$ onde $\sigma = q/A$. Portanto

$$F = qE = q\,\frac{\sigma}{2\epsilon_0} = q\,\frac{q}{2\epsilon_0 A} = \frac{q^2}{2\epsilon_0 A}.$$

Modo alternativo, não supondo q constante: Considere uma carga infinitesimal dq sobre uma das placas do capacitor. O módulo dF da força infinitesimal devida ao campo elétrico $\vec{E}$ existente no capacitor é dada por

$$dF = E\ dq.$$

A Eq. 27-7 nos diz que módulo do campo elétrico $\vec{E}$ existente no capacitor é

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 A}.$$

Portanto

$$F = \int dF = \int E\ dq = \frac{1}{\epsilon_0 A}\int_0^q q dq = \frac{q^2}{2\epsilon_0 A}.$$

P 27-50.

Usando o resultado do Problema 27-49, mostre que a força por unidade de área (a *tensão eletrostática*) atuando sobre cada placa é dada por $\epsilon_0 E^2/2$. (Na realidade, este resultado é geral, valendo para condutores de *qualquer* formato, com um campo elétrico $\mathbf{E}$ na sua superfície.

► De acordo com o problema 27-49, a força em cada placa do capacitor é dada por $F = q^2/(2\epsilon_0 A)$, onde q é a carga sobre a placa e A é a área da placa. O campo elétrico entre as placas é $E = q/(\epsilon_0 A)$, de modo que $q = \epsilon_0 AE$ e

$$F = \frac{q^2}{2\epsilon_0 A} = \frac{\epsilon_0^2 A^2 E^2}{2\epsilon_0 A} = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 AE^2.$$

Assim sendo, a força por unidade de área é

$$\frac{F}{A} = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2.$$

P 27-51*.

Uma carga q é colocada lentamente na superfície de uma bolha de sabão, de raio R_0. Devido à repulsão mútua existente entre as cargas superficiais, o raio aumenta ligeiramente para R. Por causa da expansão, a pressão do ar dentro da bolha cai para $\mathcal{V}_0 p/\mathcal{V}$ onde p é a pressão atmosférica, $\mathcal{V}_0$ é o volume inicial e $\mathcal{V}$ é o volume final. Mostre que

$$q^2 = 32\pi\epsilon_0 pR(R^3 - R_0^3).$$

(*Sugestão:* Considere forças que atuam sobre uma pequena área da bolha carregada. Forças decorrentes de (i) pressão do gás; (ii) a pressão atmosférica; (iii) a tensão eletrostática. Ver o Problema 50.)

▶ Conforme o Problema 27-50, a força eletrostática que atua numa pequena área ΔA é $F_e = \epsilon_0 E^2 \Delta A/2$. O campo elétrico na superfície é $E = q/(4\pi\epsilon_0 R^2)$, onde q é a carga na bolha. Portanto

$$F_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{q^2 \Delta A}{16\pi^2\epsilon_0^2 R^4} = \frac{q^2\Delta A}{32\pi^2\epsilon_0^2 R^4},$$

apontando para fora. A força do gás dentro é o produto da pressão dentro pela área, ou seja,

$$F_g = p\frac{\mathcal{V}_0}{\mathcal{V}}\Delta A = p\frac{\frac{4}{3}\pi R_0^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}\Delta A = p\frac{R_0^3}{R^3}\Delta A,$$

apontando para fora. A força do ar fora é $F_a = p\Delta A$, apontando para dentro.

Como a superfície da bolha esta em equilíbrio, a soma das três forças deve anular-se: $F_e + F_g - F_a = 0$. Esta equação fornece-nos

$$\frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 R^4} + p\,\frac{R_0^3}{R^3} - p = 0,$$

de onde tiramos facilmente que

$$q^2 = 32\pi^2\epsilon R^4 p\Big(1 - \frac{R_0^3}{R^3}\Big) = 32\pi^2\epsilon_0 pR(R^3 - R_0^3).$$

▶ `Em outras palavras:`

As forças que atuam sobre o elemento de área da bolha carregada são causadas pelas seguintes pressões: *(a)* A pressão do gás p_g do interior da bolha (atuando de dentro para fora), *(b)* A pressão atmosférica p (atuando de fora para dentro), *(c)* A tensão eletrostática mencionada no Problema 27-12 (atuando de dentro para fora). No equilíbrio, como a soma das forças é igual a zero, cancelando a área comum considerada, podemos escrever:

$$p_g + \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = p. \qquad (*)$$

De acordo com o enunciado do problema, temos:

$$p_g = \frac{\mathcal{V}_0}{\mathcal{V}}\,p = \frac{\frac{4}{3}\pi R_0^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}\,p = \frac{R_0^3}{R^3}\,p.$$

O campo elétrico da distribuição de cargas esfericamente simétrica existente na superfície da bolha é dado por

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}.$$

Substituindo-se p_g e E na Eq. (*) acima obtemos

$$\frac{R_0^3}{R^3}p + \frac{\epsilon_0}{2}\Big(\frac{1}{16\pi^2\epsilon_0^2}\frac{q^2}{R^4}\Big) = p$$

de onde se tira facilmente que o valor pedido é

$$q^2 = 32\pi^2\epsilon_0 pR(R^3 - R_0^3).$$

27.2.5 Capacitor com um dielétrico

E 27-53.

Dado um capacitor de 7.4 pF, cheio de ar, pedimos convertê-lo num capacitor que armazene 7.4 μJ com uma diferença de potencial máxima de 652 V. Qual dos dielétricos listados na Tabela 27-2 poderia ser usado para preencher a lacuna de ar do capacitor?

▶ Com o dielétrico dentro, a capacitância é dada por $C = \kappa C_0$, onde C_0 representa a capacitância antes do dielétrico ser inserido. A energia armazenada é dada por

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\kappa C_0 V^2.$$

Portanto,

$$\kappa = \frac{2U}{C_0V^2} = \frac{2\,(7.4\times 10^{-6})}{(7.4\times 10^{-12})(652)^2} = 4.7.$$

Da Tabela 27-2 vemos que poderíamos usar *pirex* para preencher a lacuna do capacitor.

E 27-56.

Um cabo coaxial usado numa linha de transmissão tem um raio interno de 0.1 mm e um raio externo de 0.6 mm. Calcular a capacitância por metro de cabo. Suponha que o espaço entre os condutores seja preenchido compoliestireno.

▶ Usando as Eqs. 27-14 e 27-30 encontramos que a capacitância do cabo é

$$C = \kappa\, C_{\text{ar}} = \kappa\,\frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)}.$$

Portanto, por unidade de comprimento temos

$$\tilde{C} \equiv \frac{C}{L} = \kappa\,\frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(6/1)} = 80.7 \text{ pF/m}.$$

onde usamos $\kappa = 2.6$ (que corresponde ao poliestireno, veja Tabela 27-2, pág. 101).

P 27-57.

Uma certa substância tem uma constante dielétrica de 2.8 e uma rigidez dielétrica de 18 MV/m. Se a usarmos como material dielétrico num capacitor de placas paralelas, qual deverá ser a área mínima das placas para que a capacitância seja de 7×10^{-2} μF e para que o capacitor seja capaz de resistir a uma diferença de potencial de 4 kV?

▶ A capacitância é $C = \kappa C_0 = \kappa\epsilon_0 A/d$, onde C_0 é a capacitância sem o dielétrico, κ é a constante dielétrica do meio, A a área de uma placa e d a separação das placas. O campo elétrico entre as placas é $E = V/d$, onde V é a diferença de potencial entre as placas.
Portanto, $d = V/E$ e $C = \kappa\epsilon_0 AE/V$, donde tiramos

$$A = \frac{CV}{\kappa\epsilon_0 E}.$$

Para que esta área seja mínima, o campo elétrico deve ser o maior possível sem que rompa o dielétrico:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(7\times 10^{-8}\text{ F})(4\times 10^3\text{ V})}{2.8\ (8.85\times 10^{-12}\text{ F/m})(18\times 10^6\text{ V/m})} \\ &= 0.63\text{ m}^2. \end{aligned}$$

P 27-64.

Um capacitor de placas paralelas, de área A, é preenchido com dois dielétricos como mostra a Fig. 27-35 na pág. 111. Mostre que neste caso a capacitância é dada por

▶ O valor pedido corresponde à capacitância C do capacitor equivalente da ligação em série de

$$C_1 = \kappa_1\epsilon_0\frac{A}{d/2} \qquad \text{e} \qquad C_2 = \kappa_2\epsilon_0\frac{A}{d/2},$$

cuja única diferença é o dielétrico:

$$\frac{1}{C} = \frac{d/2}{\kappa_1\epsilon_0 A} + \frac{d/2}{\kappa_2\epsilon_0 A} = \frac{d/2}{\epsilon_0 A}\ \frac{\kappa_1+\kappa_2}{\kappa_1\kappa_2}.$$

Portanto

$$C = \frac{2\epsilon_0 A}{d}\Big(\frac{\kappa_1\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2}\Big).$$

Solução alternativa:

▶ O campo elétrico uniforme para cada uma das camadas dielétricas entre as placas do capacitor é dada por

$$E_1 = \frac{q/A}{\kappa_1\epsilon_0} \qquad \text{e} \qquad E_2 = \frac{q/A}{\kappa_2\epsilon_0}.$$

Sabemos que $C = q/V$, onde

$$V = V_1 + V_2 = \frac{d}{2}E_1 + \frac{d}{2}E_2.$$

Portanto

$$\begin{aligned} C &= \frac{q}{\frac{d}{2}\,(E_1+E_2)} \\ &= \frac{2q}{d\left(\frac{q/A}{\kappa_1\epsilon_0}+\frac{q/A}{\kappa_2\epsilon_0}\right)} \\ &= \frac{2\epsilon_0 A}{d}\Big(\frac{\kappa_1\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2}\Big). \end{aligned}$$

Note que, no caso de um capacitor no ar (sem os dielétricos), temos $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ e a relação acima se reduz a $C = \epsilon_0 A/d$, conforme esperado. Quando os dois dielétricos forem iguais, isto é, para $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$, a relação anterior também fornece o resultado esperado: $C = \kappa\epsilon_0 A/d$.

27.2.6 Os dielétricos e a lei de Gauss

E 27-66

Um capacitor de placas paralelas tem uma capacitância de 100 pF, placas de área igual a 100 cm^2 e usa mica como dielétrico ($\kappa = 5.4$). Pra uma diferença de potencial de 50 V, calcule: **(a)** E na mica; **(b)** o módulo da carga livre sobre as placas, e **(c)** o módulo da carga superficial induzida.

▶ *(a)* O campo elétrico na região entre as placas é $E = V/d$, onde V é a diferença de potencial entre as placas e d a separação das placas. Como $C = \kappa\epsilon_0 A/d$, onde A é a área de uma placa e κ a constante dielétrica, temos que $d = \kappa\epsilon_0 A/C$ e, portanto, que

$$\begin{aligned} E &= \frac{V}{d} = \frac{VC}{\kappa\epsilon_0 A} \\ &= \frac{50\,(100\times 10^{-12})}{5.4\ (8.85\times 10^{-12})(100\times 10^{-4})} \\ &= 1\times 10^4\text{ V/m}. \end{aligned}$$

(b) A carga livre nas placas é

$$q_\ell = VC = (100\times 10^{-12})(50) = 5\times 10^{-9}\text{ C}.$$

(c) O campo elétrico é produzido por *ambas* cargas, livre e induzida. Como campo devido a uma camada grande e uniforme de carga é $q/(2\epsilon_0 A)$, o campo entre as placas é

$$E = \frac{q_\ell}{2\epsilon_0 A} + \frac{q_\ell}{2\epsilon_0 A} - \frac{q_i}{2\epsilon_0 A} - \frac{q_i}{2\epsilon_0 A}.$$

O primeiro termo deve-se àcarga livre positiva em uma das placas, o segundo deve-se à carga livre negativa na outra placa, o terceiro deve-se à carga induzida positiva em uma das superfícies do dielétrico o quarto deve-se à carga induzida negativa na outra superfície do dielétrico. Observe que o campo devido a carga induzida é oposto ao campo devido à carga livre, de modo que eles tendem a cancelar-se. A carga induzida é, portanto,

$$\begin{aligned} q_i &= q_\ell - \epsilon_0 AE \\ &= 5 \times 10^{-9} \text{ C} \\ &\quad -(8.85 \times 10^{-12})(100 \times 10^4)(1 \times 10^4) \text{ C} \\ &= 4.1 \times 10^{-9} \text{ C} \\ &= 4.1 \text{ nC}. \end{aligned}$$

P 27-71

Uma lâmina dielétrica de espessura b é introduzida entre as placas de um capacitor de placas paralelas de separação d. Mostre que a capacitância é dada por

$$C = \frac{\kappa\epsilon_0 A}{\kappa d - (\kappa - 1)b}.$$

(*Sugestão:* Deduza a fórmula seguindo o modelo do Exemplo 27-10.) Esta fórmula prevê o resultado numérico correto do Exemplo 27-10? Verifique que a fórmula está de acordo com os casos especiais quando $b = 0$, $\kappa = 1$ e $b = d$.

▶ Seja E um campo elétrico na região vazia e E_d o campo elétrico no interior do dielétrico. Da Eq. 27-32 sabemos que $E_d = E/\kappa$. Portanto, observando a Fig. 27-17 que corresponde à situação deste problema, vemos que a diferença de potencial através do capacitor é dada por

$$V = xE + bE_d + (d - b - x)E,$$

ou seja

$$V = (d - b + \frac{b}{\kappa})E.$$

Como sabemos que $E = q/(A\epsilon_0)$ (veja Eq. 27-7), segue que

$$V = \frac{q}{A\epsilon_0\kappa}\Big[\kappa d - (\kappa - 1)b\Big],$$

donde tiramos sem dificuldades que, realmente,

$$C \equiv \frac{q}{V} = \frac{\kappa\epsilon_0 A}{\kappa d - (\kappa - 1)b}.$$

Note que este resultado *não* depende da posição exata da lâmina dentro do dielétrico. A lâmina tanto poderá estar tocando qualquer uma das placas como estar no meio delas, sem que se altere o valor acima.

Tanto para $b = 0$ quanto para $\kappa = 1$ a relação anterior fornece corretamente a capacitância no vácuo, ou seja, $C = \epsilon_0 A/d$.

Quando $b = d$, situação em que o dielétrico preenche totalmente o espaço entre as placas do capacitor, a expressão acima também fornece o resultado correto, a saber, $C = \kappa A\epsilon_0/d$.