Exercícios Resolvidos de Teoria Eletromagnética

Jason Alfredo Carlson Gallas

Professor Titular de Física Teórica

Doutor em Física pela Universidade Ludwig Maximilian de Munique, Alemanha

Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul
91501-970 Porto Alegre, BRASIL

Matéria para a SEGUNDA prova. Numeração conforme a **quarta** edição do livro "Fundamentos de Física", Halliday, Resnick e Walker.

Esta e outras listas encontram-se em: *http://www.if.ufrgs.br/∼jgallas*

Conteúdo

Comentários/Sugestões e Erros: favor enviar para `jgallas @ if.ufrgs.br`
(`lista2.tex`)

26 Potencial Elétrico

26.1 Questões

Q 26-1.

Podemos considerar o potencial da Terra igual a $+100$ Volts em vez de igual a zero? Que efeito terá esta escolha nos valores medidos para: *(a)* potenciais e *(b)* diferenças de potencial?

▶ Sim. O potencial elétrico num ponto pode assumir qualquer valor. Somente a **diferença de potencial** é que possui sentido físico determinado. Por razões de comodidade, podemos admitir que o potencial da Terra (ou de qualquer outro referencial eqüipotencial) seja igual a zero. Qualquer outro valor escolhido também serve, pois o que será fisicamente relevante é a **diferença de potencial**.

Q 26-2.

O que aconteceria a uma pessoa, de pé sobre uma plataforma isolada, se o seu potencial fosse aumentado 10 000 Volts em relação a Terra?

▶ Não aconteceria nada de grave: como a pessoa está isolada, ela apenas teria seu potencial aumentado em 10.000 Volts. Mas caso a pessoa resolvesse descer da tal plataforma deveria faze-lo com muito cuidado...

Q 26-3.

Por que o elétron-volt é freqüentemente uma unidade mais convencional para energia do que o joule?

▶ Espaço reservado para a SUA resposta.....

Q 26-13.

O fato de só conhecermos $\vec{E}$, num dado ponto torna possível o cálculo de V neste mesmo ponto? Se não, que informações adicionais são necessárias?

▶ Não. De acordo com a Eq. 26-8, para se calcular uma diferença de potencial, torna-se necessário o conhecimento de **E** ao longo de um dado percurso ligando os dois pontos tomados para o cálculo desta diferença de potencial.

Q 26-14.

Na Fig. 26-2 do Halliday, o campo elétrico $\vec{E}$ é maior do lado esquerdo ou do lado direito?

▶ O módulo do campo elétrico pode ser estimado da a razão $\Delta V/\Delta d$, onde d é a distância entre duas superfícies eqüipotenciais. Note que do lado esquerdo da figura 26-2 a distância entre duas superfícies eqüipotenciais é menor do que a distância entre duas superfícies eqüipotenciais do lado direito. Sendo assim, concluímos que o valor de E na extremidade esquerda da figura 26-2 é maior do que E na extremidade direita da figura 26-2. Lembre que E é proporcional à densidade de linhas de força (as quais são ortogonais às superfícies eqüipotenciais em cada um dos pontos destas superfícies eqüipotenciais).

Q 26-24.

Vimos na seção 26-10 que o potencial no interior de um condutor é o mesmo que o da sua superfície. **(a)** E no caso de um condutor com uma cavidade irregular no seu interior? **(b)** E no caso da cavidade ter uma pequena "brecha" ligando-a com o lado de fora? *(c)* E no caso da cavidade estar fechada mas possuir uma carga puntiforme suspensa no seu interior? Discuta o potencial no interior do material condutor e em diferentes pontos dentro das cavidades.

▶ **(a)** Teria o mesmo valor $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{q}{R}$.

(b) Se o condutor está isolado e carregado, teríamos igualmente $E = 0$ e $V =$ constante no interior e na superfície, mas não poderíamos determinar o valor numérico da constante.

(c) Idem ao item *(b)*, inclusive dentro da cavidade irregular.

A carga puntiforme irá induzir cargas de sinal contrário e de mesmo valor absoluto na superfície da cavidade e, conseqüentemente, de mesmo valor na superfície externa do sólido irregular. No sólido, neste caso, devido a presença da carga q, o potencial mudará de valor mas ainda será constante e o campo elétrico nulo, pois tratase de um condutor carregado e isolado.

26.2 Problemas e Exercícios

26.2.1 O potencial elétrico

E 26-1.

A diferença de potencial elétrico entre pontos de descarga durante uma determinada tempestade é de 1.2×10^9 V. Qual é o módulo da variação na energia potencial elétrica de um elétron que se move entre estes pontos?

▶ Use o conceito de potencial e, subseqüentemente, uma conversão de unidades, de *Joules* para *eV*, conforme o Apêndice F, para obter a resposta do livro:

$$\begin{aligned}\Delta U &= e\,\Delta V \\ &= (1.6 \times 10^{-19}\text{ C})(1.2 \times 10^9\text{ V}) \\ &= 1.92 \times 10^{-10}\text{ J} \\ &= (1.92 \times 10^{-10}\text{ J})(6.242 \times 10^{18}\text{ eV/J}) \\ &= 11.98 \times 10^8\text{ eV} \simeq 1.2\text{ GeV}.\end{aligned}$$

E 26-2.

Uma bateria de carro de 12 Volts é capaz de fornecer uma carga de 84 Ampères·hora. **(a)** Quantos Coulombs de carga isto representa? **(b)** Se toda esta carga for descarregada a 12 Volts, quanta energia estará disponível?

▶ **(a)** Como $1\text{ A} = 1$ C/s, encontramos:

$$q = it = (84)(3600) = 3.024 \times 10^5\text{ C}.$$

(b) Usando a Eq. 4, encontramos para a energia solicitada o seguinte valor:

$$W = qV = 3.024 \times 10^5 \times 12 \simeq 3.62\,\text{M J}.$$

P 26-3.

Em um relâmpago típico, a diferença de potencial entre pontos de descarga é cerca de 10^9 V e a quantidade de carga transferida é cerca de 30 C. **(a)** Quanta energia é liberada? **(b)** Se toda a carga que foi liberada pudesse ser usada para acelerar um carro de 1000 kg a partir do repouso, qual seria a sua velocidade final? **(c)** Que quantidade de gelo a 0^0 C seria possível derreter se toda a energia liberada pudesse ser usada para este fim? O calor de fusão do gelo é $L = 3.3 \times 10^5$ J/kg.

▶ **(a)** Usando a Eq. 4, encontramos o seguinte valor para a energia:

$$U = qV = 30 \times 10^9\text{ J}.$$

(b) Igualando a energia solicitada no item *(a)* com a energia cinética do carro, encontramos: $U = K = mv^2/2$ e, portanto,

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = 7.75 \times 10^3\text{ m/s}.$$

(c) A energia U fornece o calor Q necessário para fundir uma certa massa M de gelo. Fazendo $Q = L$ e usando a Eq. 5 do Cap. 20, encontramos o seguinte valor para a massa M:

$$M = \frac{U}{L} = \frac{30 \times 10^9\text{ J}}{3.3 \times 10^5\text{ J/kg}} = 9.10 \times 10^4\text{ kg}$$

P 26-5.

Quando um elétron se move de A até B ao longo da linha de campo elétrico mostrado na Fig. 26-24 (pg. 82), o campo elétrico realiza um trabalho de 3.94×10^{-19} J sobre ele. Quais são as diferenças de potencial elétrico **(a)** $V_B - V_A$, **(b)** $V_C - V_A$ e **(c)** $V_C - V_B$?

▶ **(a)**

$$V_B - V_A = -\frac{W_{AB}}{q_0} = -\frac{3.94 \times 10^{-19}}{1.6 \times 10^{-19}} = -2.46\text{ V}.$$

`Nota`: q_0 é uma carga-teste **positiva** e W_{AB} o trabalho feito pelo **campo elétrico**. Observe das linhas de campo na figura que o ponto A está mais próximo de cargas negativas do que o ponto B. (O vetor campo **E** aponta para as cargas negativas.)
(b) A ddp é a mesma que a do item anterior.
(c) Zero, pois os pontos B e C estão sobre uma equipotencial.

26.2.2 Cálculo do potencial a partir do campo

E 26-9.

A densidade de carga de um plano infinito, carregado é $\sigma = 0.10\ \mu\text{C/m}^2$. Qual é a distância entre as superfícies eqüipotenciais cuja diferença de potencial é de 50 Volts?

▶ De acordo com a Tabela 1, para um plano infinito uniformemente carregado, podemos escrever a seguinte relação:

$$V = V_0 - \frac{\sigma\, z}{2\epsilon_0}.$$

Donde se conclui que para duas superfícies eqüipotenciais separadas por uma distância Δz, a diferença de energia potencial é dada por:

$$\Delta V = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\,\Delta z.$$

Portanto considerando apenas o módulo de Δz, encontramos a resposta:

$$\Delta z = \frac{2\epsilon_0 \Delta V}{\sigma} = 8.85\,\text{mm}.$$

P 26-11.

O campo elétrico dentro de uma esfera não-condutora de raio R, com carga espalhada com uniformidade por todo seu volume, está radialmente direcionado e tem módulo dado por

$$E = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

Nesta expressão, q (positiva ou negativa) é a carga total da esfera e R é a distância ao centro da esfera. **(a)** Tomando $V = 0$ no centro da esfera, determine o potencial $V(r)$ dentro da esfera. **(b)** Qual é a diferença de potencial elétrico entre um ponto da superfície e o centro da esfera? **(c)** Sendo q positiva, qual destes dois pontos tem maior potencial?

► **(a)** Como a expressão do campo é dada, para determinar-se o potencial basta calcular a integral

$$\begin{aligned} V(r) - V(0) = -\int_0^r E\,dr &= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\int_0^r r\,dr \\ &= -\frac{q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{r^2}{R^3}. \end{aligned}$$

Como $V(0) = 0$, temos

$$V(r) = -\frac{q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{r^2}{R^3}.$$

(b) Na superfície ($r = R$) a diferença de potencial é

$$\Delta V = V(R) - V(0) = -\frac{q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}.$$

(c) Como a diferença acima é negativa, o **centro** tem potencial maior.

P 26-12.

Um contador Geiger possui um cilindro metálico com 2.0 cm de diâmetro, tendo estendido ao longo do seu eixo um fio de 1.3×10^{-4} cm de diâmetro. Se aplicarmos 850 V entre eles, calcule o campo elétrico na superfície: *(a)* do fio e *(b)* do cilindro. (*Sugestão*: Use o resultado do Problema 24, Cap. 25.)

► Usando o resultado do problema 25-24, pag. 58, encontramos para o campo elétrico entre o fio e o cilindro a expressão $E = \lambda/(2\pi\epsilon_0 r)$. Usando a Eq. 26-11, pag. 68, encontramos para a diferença de potencial entre o fio e o cilindro a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \Delta V = V_f - V_c = -\int_{r_c}^{r_f} E dr &= \int_{r_f}^{r_c} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} ln\Big(\frac{r_c}{r_f}\Big), \end{aligned}$$

onde r_f e r_c representam os raios do *fio* e do *cilindro*, respectivamente. Desta equação obtemos facilmente que

$$\lambda = \frac{2\pi\epsilon_0 \Delta V}{ln[r_c/r_f]},$$

e, portanto, que

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\Delta V}{r\, ln[r_c/r_f]} = \frac{88.164 \text{ Volts}}{r}.$$

Portanto: *(a)* Na superfície do fio, temos:

$$E = \frac{88.164 \text{ Volts}}{6.5 \times 10^{-7} \text{ m}} = 136\,\text{M V/m};$$

(b) Na superfície do cilindro:

$$E = \frac{88.164 \text{ Volts}}{0.01 \text{ m}} = 8.82\,\text{kV/m}.$$

P 26-13*.

Uma carga q está uniformemente distribuída através de um volume esférico de raio R. **(a)** Fazendo $V = 0$ no infinito, mostre que o potencial a uma distância r do centro, onde $r < R$, é dado por

$$V = \frac{q(3R^2 - r^2)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

(Sugestão: Ver o exemplo 25-7.) **(b)** Por que este resultado difere daquele do item (a) do Problema 11? **(c)** Qual a diferença de potencial entre um ponto da superfície e o centro da esfera? **(d)** Por que este resultado não difere daquele do item (b) do Problema 11?

► **(a)** `Fora` da distribuição de cargas a magnitude do campo elétrico é $E = q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$ e o potencial é $V = q/(4\pi\varepsilon_0 r)$, onde r é a distância a partir do centro da distribuição de cargas.

Dentro da distribuição, usamos uma superfície Gaussiana esférica de raio r concêntrica com a distribuição de cargas. O campo é normal à superfície e sua magnitude é uniforme sobre ela, de modo que o fluxo através da superfície é $4\pi r^2 E$. A carga dentro da Gaussiana é qr^3/R^3.
Com isto, a lei de Gauss fornece-nos

$$4\pi\varepsilon_0 r^2 E = \frac{qr^3}{R^3}$$

que, simplificando, mostra ser o campo *fora* da Gaussiana dado por

$$E = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

Se chamarmos de V_s o potencial sobre a superfície da distribuição de cargas, então o potencial num ponto interno localizado a uma distância r do centro será

$$\begin{aligned} V &= V_s - \int_R^r E\,dr \\ &= V_s - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\int_R^r r\,dr \\ &= V_s - \frac{qr^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3} + \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}. \end{aligned}$$

O valor de V_s pode ser encontrado colocando-se $r = R$ na expressão do potencial em pontos *fora* da distribuição de cargas, o que fornece-nos $V_s = q/(4\pi\varepsilon_0 R)$. Portanto

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Big[\frac{1}{R} - \frac{r^2}{2R^3} + \frac{1}{2R}\Big] = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\big(3R^2 - r^2\big).$$

(b) No Problema 11 o potencial elétrico foi tomado como sendo zero no centro da esfera enquanto que aqui, o zero está no infinito.
De acordo com a expressão derivada na parte (a), o potencial no centro da esfera é $V_c = 3q/(8\pi\varepsilon_0 R)$. Portanto, $V - V_c = -qr^2/(8\pi\varepsilon_0 R^3)$, que é o resultado encontrado no Problema 11.
(c) A diferença de potencial é

$$\Delta V = V_s - V_c = \frac{2q}{8\pi\varepsilon_0 R} - \frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R} = -\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$

Este valor ó mesmo dado pela expressão obtida no Problema 11, como não poderia deixar de ser.
(d) Moral da história toda: apenas as **diferenças de potencial** tem significado físico, não importando qual o valor do potencial num só ponto. Analogamente ao caso gravitacional, mudar-se o ponto de referência de lugar *não altera* as diferenças de potencial.

P 26-14*.

Uma casca esférica espessa de carga Q e densidade volumétrica de carga ρ, está limitada pelos raios r_1 e r_2, onde $r_2 > r_1$. Com $V = 0$ no infinito, determine o potencial elétrico V em função da distância r ao centro da distribuição, considerando as regiões **(a)** $r > r_2$, **(b)** $r_1 < r < r_2$, **(c)** $r < r_1$. **(d)** Estas soluções concordam em $r = r_2$ e $r = r_1$? (Sugestão: Ver o exemplo 25-7.)

► **(a)** Para $r > r_2$ o campo é como o de uma carga puntiforme e o potencial é

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r},$$

onde o zero do potencial foi tomado no infinito.
(b) Para determinar o potencial no intervalo $r_1 < r < r_2$ usamos a lei de Gauss para calcular o campo elétrico, integrando-o posteriormente ao longo de uma trajetória radial, de r_2 até r. A melhor Gaussiana é uma superfície esférica concêntrica com a casca em questão. O campo é radial, normal à superfície, com magnitude uniforme sobre a superfície, de modo que o fluxo através da superfície é $\boxed{\Phi = 4\pi r^2 E}$. O volume da casca é $4\pi(r_2^3 - r_1^3)/3$, de modo que a densidade de carga é

$$\rho = \frac{3Q}{4\pi(r_2^3 - r_1^3)}.$$

Assim, a carga englobada pela Gaussiana de raio r é

$$q = \frac{4\pi}{3}(r^3 - r_1^3)\,\rho = Q\,\Big(\frac{r^3 - r_1^3}{r_2^3 - r_1^3}\Big).$$

A lei de Gauss fornece-nos

$$4\pi\varepsilon_0 r^2 E = Q\Big(\frac{r^3 - r_1^3}{r_2^3 - r_1^3}\Big),$$

donde obtemos a magnitude do campo elétrico:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^3 - r_1^3}{r^2(r_2^3 - r_1^3)}.$$

Sendo V_s o potencial elétrico na superfície externa da casca ($r = r_2$), então o potencial a uma distância r do centro é dado por

$$\begin{aligned} V &= V_s - \int_{r_2}^r E\,dr \\ &= V_s - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_2^3 - r_1^3}\int_{r_2}^r \Big(r - \frac{r_1^3}{r^2}\Big)\,dr \\ &= V_s - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_2^3 - r_1^3}\Big(\frac{r^2}{2} - \frac{r_2^2}{2} + \frac{r_1^3}{r} - \frac{r_1^3}{r_2}\Big). \end{aligned}$$

O valor da constante V_s na superfície externa é encontrado substituindo-se $r = r_2$ na expressão para o potencial que foi determinada no item (a) acima, ou seja, $V_s = Q/(4\pi\varepsilon_0 r_2)$. Substituindo-se este valor na expressão acima e simplificando-a, obtemos

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_2^3 - r_1^3}\Big(\frac{3r_2^2}{2} - \frac{r^2}{2} - \frac{r_1^3}{r}\Big).$$

Como $\rho = 3Q/[4\pi(r_2^3 - r_1^3)]$, o potencial pode ser escrito de uma maneira mais simples e elegante como

$$V = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\Big(\frac{3r_2^2}{2} - \frac{r^2}{2} - \frac{r_1^3}{r}\Big).$$

(c) O campo elétrico anula-se na cavidade, de modo que o potencial será sempre o mesmo em qualquer ponto da cavidade, tendo o mesmo valor que o potencial de um ponto qualquer sobre a superfície interna da casca. Escolhendo-se $r = r_1$ no resultado do item (b) e simplificando, encontramos

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(r_2^2 - r_1^2)}{2(r_2^3 - r_1^3)},$$

ou ainda, em termos da densidade de carga ρ,

$$V = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(r_2^2 - r_1^2).$$

(d) As soluções concordam para $r = r_1$ e $r = r_2$.

26.2.3 Potencial criado por uma carga puntiforme

E 26-19.

Grande parte do material compreendido pelos anéis de Saturno (Fig. 26-27 na terceira edição do Halliday, ou Fig. 26-28 na quarta) tem a forma de minúsculas partículas de poeira cujos raios são da ordem de 10^{-6} m. Estes pequenos grãos estão numa região que contém um gás ionizado e diluído, e adquirem elétrons em excesso. Se o potencial elétrico na superfície de um grão for de -400 V, quantos elétrons em excesso foram adquiridos?

▶ Usando o resultado do Exemplo 26-3, encontramos para o potencial da esfera a seguinte expressão:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Sendo n o número de elétrons em excesso, temos $q = ne$ e, portanto,

$$n = \frac{4\pi\epsilon_0 VR}{e} = 2.78\times 10^5 \text{ elétrons.}$$

P 26-24.

Um campo elétrico de aproximadamente 100 V/m é freqüentemente observado próximo à superfície da Terra. Se este campo fosse realmente constante sobre a superfície total, qual seria o valor do potencial elétrico num ponto sobre a superfície? (Veja Exemplo 26-5; suponha $V = 0$ no infinito.)

▶ Usando o resultado do Exemplo 26-5, encontramos para o potencial da esfera a seguinte expressão: $V = q/(4\pi\epsilon_0 r)$. Usando a Eq. 25-16, verificamos que o campo elétrico de uma esfera é dado por

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{r^2}.$$

Portanto, usando-se o valor para o raio médio da terra $r = 6.37\times 10^6$ m, dado no Apêndice C, temos

$$V = E\,r = 637\,\text{M V}.$$

P 26-25.

Suponha que a carga negativa de uma moeda, de um centavo, de cobre, fosse levada para uma distância muito grande da Terra — talvez uma galáxia distante — e que a carga positiva fosse uniformemente distribuida sobre a superfície da Terra. De quanto variaria o potencial elétrico na superfície da Terra? (Veja o Exemplo 23-3.)

▶ O Exemplo 23-3 nos diz que a carga contida em tal moeda é $q = 1.37\times 10^5$ C, enquanto que do Apêndice C vemos que o raio da Terra é $R_T = 6.37\times 10^6$ m. Como a carga positiva pode ser considerada como estando no infinito, vemos que a variação de potencial será

$$\begin{aligned} V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_T} &= \frac{(9\times 10^9)(1.37\times 10^5)}{6.37\times 10^6} \\ &= 1.93\times 10^8 \text{ V.}\end{aligned}$$

Note que a resposta do livro está incorreta.

P 26-26.

Uma gota esférica de água tem uma carga de 30 pC e o potencial na sua superfície é de 500 V. *(a)* Calcule o raio da gota. *(b)* Se duas gotas iguais a esta, com mesma carga e o mesmo raio, se juntarem para constituir uma única gota esférica, qual será o potencial na superfície desta nova gota?

▶ *(a)* Usando a Eq. 26-12, temos $V = q/(4\pi\epsilon_0 R) = 500$ V, ou seja,

$$R = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 V} = 0.539\,\text{mm}.$$

(b) O raio r da nova gota esférica pode ser obtido da expressão $4\pi r^3 = 2(4\pi R^3)$, ou seja, $r = 2^{1/3}R$. A carga total sobre a nova gota é dada por $2q = 6\times 10^{-11}$ C. Supondo que haja uma distribuição uniforme, vemos que o potencial V' procurado é dado por

$$V' = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0(2^{1/3}R)} = 794\,\text{V}.$$

26.2.4 Potencial criado por um dipolo elétrico

P 26-32.

Uma carga puntiforme $q_1 = 6e$ está fixa na origem de um sistema de coordenadas retangulares, e uma segunda carga puntiforme $q_2 = -10e$ está fixa em $x = 8.6$ nm, $y = 0$. O lugar geométrico de todos os pontos, no plano xy com $V = 0$, é um círculo centrado sobre o eixo x, como mostra a Fig. 26-31. Determine **(a)** a posição x_c do centro do círculo e **(b)** o raio R do círculo. **(c)** A seção transversal no plano xy da superfície equipotencial de 5 V também é um círculo?

▶ **(a)** e **(b)** As equações que determinam x_c e R são as seguintes, chamando de A o ponto em $R + x_c$ e de B o ponto em $R - x_c$, onde o círculo intersecta o eixo x:

$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon_0\, V_A = \frac{q_1}{R+x_c} + \frac{q_2}{x_2-(R-x_c)} &= 0,\\ 4\pi\epsilon_0\, V_B = \frac{q_1}{R-x_c} + \frac{q_2}{x_2-(R+x_c)} &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema de equações para R e x_c encontramos

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{q_1^2 x_2}{q_1^2-q_2^2} = \frac{(6e)^2(8.6)}{(6e)^2-(-10e)^2} = -4.8\text{ nm},\\ R &= \frac{q_1q_2x_2}{q_1^2-q_2^2} = \frac{(6e)(-10e)(8.6)}{(6e)^2-(-10e)^2} = 8.1\text{ nm}. \end{aligned}$$

(c) Não. A única equipotencial que é um círculo é aquela para $V = 0$.

P 26-33.

Para a configuração de cargas da Fig. 26-32 abaixo, mostre que $V(r)$ para os pontos sobre o eixo vertical, supondo que $r \gg d$ é dado por

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{r}\Big(1+\frac{2d}{r}\Big).$$

(*Sugestão*: A configuração de cargas pode ser vista como a soma de uma carga isolada e um dipolo.)

▶ $V = V_1 + V_2$ onde $V_1 =$ potencial da carga do centro e $V_2 =$ potencial do dipolo.

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{Kq}{r},\\ V_2 &= K\frac{q}{r-d} + K\frac{-q}{r+d}\\ &= Kq\frac{r+d-r+d}{r^2-d^2} = K\frac{2qd}{r^2-d^2}, \end{aligned}$$

$$V = V_1 + V_2 = K\Big(\frac{q}{r} + \frac{2qd}{r^2-d^2}\Big).$$

Para $r \gg d$ temos, finalmente,

$$V = K\Big(\frac{q}{r} + \frac{2qd}{r^2}\Big).$$

E 26-34.

▶ Temos que, uma carga $-5q$ está a uma distância $2d$ de P, uma carga $-5q$ está a uma distância d de P, e duas cargas $+5q$ estão cada uma a uma distância d de P, de modo que o potencial elétrico em P é

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Big[-\frac{5}{2d} - \frac{5}{d} + \frac{5}{d} + \frac{5}{d}\Big] = -\frac{5q}{8\pi\varepsilon_0\, d}.$$

O zero do potencial foi tomado como estando no infinito.

E 26-39.

▶ **(a)** Toda carga está a mesma distância R de C, de modo que o potencial elétrico em C é

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Big[\frac{Q}{R} - \frac{6Q}{R}\Big] = -\frac{5Q}{4\pi\varepsilon_0 R},$$

onde o zero do potencial foi tomado no infinito.

(b) Toda a carga está a mesma distância $\sqrt{R^2+z^2}$ de P de modo que o potencial elétrico é

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Big[\frac{Q}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{6Q}{\sqrt{R^2+z^2}}\Big] \\ &= -\frac{5Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}. \end{aligned}$$

26.2.5 Potencial criado por distribuição contínua de cargas

E 26-40.

Um disco de plástico é carregado sobre um lado com uma densidade superficial de carga σ e, a seguir, três quadrantes do disco são retirados. O quadrante que resta, é mostrado na Fig. 26-39, pg. 85. Com $V=0$ no infinito, qual é o potencial criado por esse quadrante no ponto P, que está sobre o eixo central do disco original, a uma distância z do centro original?

► Como o disco foi uniformemente carregado, isto implica que quando o disco completo estava presente cada quadrante contribuia de modo igual para o potencial em P, de modo que *o potencial em P devido a um único quadrante é igual a um quarto do potencial devido ao disco todo*.

Vamos, portanto, determinar o potencial devido ao disco completo.

Consideremos um anel de carga com raio r e largura dr. Sua área é $2\pi r\ \ dr$ e ele contém uma carga $dq = 2\pi\sigma r\ dr$. Toda esta carga está a uma distância $\sqrt{r^2+z^2}$ de P, de modo que o potencial devido a tal anel é

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi\sigma r\ dr}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{\sigma r\ dr}{2\varepsilon_0\sqrt{r^2+z^2}}.$$

O potencial total em P é a soma dos potenciais de todos anéis:

$$\begin{aligned} V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r\ dr}{\sqrt{r^2+z^2}} &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sqrt{r^2+z^2}\Big|_0^R \\ &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\Big[\sqrt{R^2+z^2}-z\Big]. \end{aligned}$$

O potencial V_{mq}, devido a meio quadrante, em P é

$$V_{mq} = \frac{V}{4} = \frac{\sigma}{8\varepsilon_0}\Big[\sqrt{R^2+z^2}-z\Big].$$

P 26-41.

Qual é o potencial no ponto P na Fig. 26-40, a uma distância d da extremidade direita de uma barra fina de plástico de comprimento L e carga total $-Q$? A carga está distribuída uniformemente e $V=0$ no infinito.

► Considere um elemento infinitesimal da barra, localizado entre x e $x+dx$. Ele possui um comprimento dx e contém uma carga $dq = \lambda\ dx$, onde $\lambda = -Q/L$ é a densidade linear de carga da barra. Sua distância do ponto P é $d+x$ e o potencial que ela cria no ponto P é

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{d+x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\ dx}{d+x}.$$

Para encontrar o potencial total no ponto P basta agora integrar sobre todo comprimento da barra. Portanto,

$$\begin{aligned} V &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{dx}{d+x} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln(d+x)\Big|_0^L \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\Big(\ln(d+L)-\ln d\Big) \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\Big(\frac{d+L}{d}\Big) \\ &= \frac{-Q/L}{4\pi\epsilon_0}\ln\Big(1+\frac{L}{d}\Big). \end{aligned}$$

26.2.6 Cálculo do campo a partir do potencial

E 26-45.

Na seção 26-8, vimos que o potencial para um ponto sobre o eixo central de um disco carregado era

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\Big(\sqrt{R^2+z^2}-z\Big).$$

Use a Eq. 26-34 e a simetria para mostrar que E para um tal ponto é dado por

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\Big(1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\Big).$$

►

$$\begin{aligned} \vec{E}_r &= -\frac{dV(r)}{dr}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \\ &= -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{d}{dr}[(q^2+r^2)^{1/2}-r] \\ &= -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\Big[\frac{1}{2}(a^2+r^2)^{-1/2}\cdot 2r-1\Big] \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}[1-\frac{r}{(a^2+r^2)^{1/2}}]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{Se} \quad r \gg a \quad \to \quad E = K\frac{q}{r^2}, \quad \text{onde} \quad q = \sigma\pi a^2;$$
$$\text{Se} \quad r \ll a \quad \to \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

P 26-48.

(a) Mostre, calculando diretamente a partir da Eq. 26-25, que o potencial elétrico, num ponto do eixo de um anel carregado, de raio R, é dado por

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{\sqrt{z^2+R^2}}.$$

(b) Partindo deste resultado, obtenha uma expressão correspondente para E, nos pontos axiais, e compare com o resultado do cálculo direto de E apresentado na seção 24-6 do Cap. 24.

► **(a)** Seja $d\ell$ um elemento de linha do anel. A densidade de carga linear do anel é $\lambda = q/(2\pi R)$. O potencial dV produzido por um elemento infinitesimal de carga $dq = \lambda d\ell$ é dado por

$$\begin{aligned} dV &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{dq}{r} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(q/2\pi R)d\ell}{(R^2+z^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

O potencial no ponto P considerado é dado pela integral

$$V = \int dV = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{2\pi R}\,\frac{d\ell}{(R^2+z^2)^{1/2}}.$$

Note que R e z permanecem constantes ao longo do anel, fazendo com que a integral se reduza a

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(q/2\pi R)}{(R^2+z^2)^{1/2}}\int d\ell.$$

Como a integral de $d\ell$ é igual a $\ell = 2\pi R$, o comprimento do anel, obtemos

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{(R^2+z^2)^{1/2}}.$$

(b) Analisando a simetria do problema, concluímos que o campo elétrico não possui nenhuma componente ortogonal ao eixo do anel. Portanto, o campo elétrico é orientado ao longo do eixo do anel (para fora do anel), sendo dado por

$$E = -\frac{dV}{dz} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{qz}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

P 26-49.

A barra fina com carga positiva da Fig. 26-42 tem uma densidade linear de carga uniforme λ e se encontra ao longo de um eixo x como é mostrado. **(a)** Com $V = 0$ no infinito, determine o potencial devido à barra no ponto P sobre o eixo x. **(b)** Use o resultado do item anterior para calcular a componente do campo elétrico em P ao longo do eixo x. **(c)** Use a simetria para determinar a componente do campo elétrico em P numa direção perpendicular ao eixo x.

► **(a)** Suponha a origem dos x como sendo a extremidade direita da barra e considere um elemento infinitesimal da barra localizado numa coordenada negativa $x = x'$, com um comprimento dx' e contendo uma carga $dq = \lambda dx'$. Sua distância de P é $x - x'$ e o potencial que tal elemento cria em P é

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{dq}{(x-x')} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\lambda dx'}{(x-x')}.$$

Para encontrar o potencial total em P, integramos sobre toda a barra:

$$\begin{aligned} V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{0}\frac{dx'}{x-x'} &= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\,\ln(x-x')\Big|_{-L}^{0} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\,\ln\frac{x+L}{x}. \end{aligned}$$

(b) Encontramos a componente x do campo elétrico através da derivada do potencial elétrico com respeito a x:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\lambda}{4\pi\pi\varepsilon_0}\,\frac{\partial}{\partial x}\,\ln\frac{x+L}{x} \\ &= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{x}{x+L}\Big(\frac{1}{x} - \frac{x+L}{x^2}\Big) \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{L}{x(x+L)}. \end{aligned}$$

(c) Considere dois pontos a iguais distâncias de ambos lados de P, ao longo da linha que é perpendicular ao eixo x. A diferença no potencial elétrico dividida pela separação dos dois pontos dá a componente transversal do campo elétrico. Como os dois pontos estão situados simetricamente em relação à barra, seus potenciais coincidem sendo, portanto, zero a diferença de potencial. Consequentemente, a componente transversal do campo elétrico também é zero.

P 26-50.

Na Fig. 26-43, uma barra fina de comprimento L carregada positivamente, colocada ao longo do eixo x com uma extremidade na origem ($x = 0$), tem uma distribuição de carga linear dada por $\lambda = kx$, onde k é constante. **(a)** Considerando o potencial no infinito igual a zero, calcule o valor de V no ponto P sobre o eixo dos y. **(b)** Determine a componente vertical E_y, da intensidade do campo elétrico em P, a partir do resultado do item*(a)*, bem como através de um cálculo direto. **(c)** Por que não podemos calcular o componente horizontal (E_x) do campo elétrico em P usando o resultado do item (a)?

▶ **(a)** Temos que $dq = \lambda dx$ e, portanto, que

$$\begin{aligned} V = \int dV &= K \int \frac{dq}{r} \\ &= K \int_0^L \frac{\lambda dx}{(x^2+y^2)^{1/2}} \\ &= K\,k \int_0^L \frac{x dx}{(x^2+y^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

Sabendo que $u = x^2 + y^2$, $du = 2xdx$ e que $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}$, temos

$$\begin{aligned} V &= K\,k \frac{1}{2} \int_0^L \frac{2x dx}{(x^2+y^2)^{1/2}} \\ &= Kk\frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_0^L \\ &= K\,k[(x^2+y^2)^{1/2}]_0^L \\ &= K\,k\left[(L^2+y^2)^{1/2} - y\right]. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \vec{E_y} &= -\frac{d}{dy}V(y)\vec{j} \\ &= -K\,k\left[\frac{1}{2}(L^2+y^2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot 2y - 1\right]\vec{j} \\ &= K\,k\left[1 - y(L^2+y^2)^{-1/2}\right]\vec{j}. \end{aligned}$$

O cálculo direto do módulo da componente E_y pode ser feito da seguinte maneira:

$$E_y = Kk\int_0^L \frac{x\cos\theta}{y^2+x^2}dx.$$

(c) Quando calculamos o potencial $V(y)$ no item *(a)*, a variável x foi integrada. Assim, não podemos usar a relação dada por $e_x = -\frac{\partial}{\partial x}V\vec{i}$ para calcular $\vec{E_x}$. Isto seria possível somente se soubéssemos o potencial $V(x,y)$.

26.2.7 Energia potencial elétrica de um sistema de cargas puntiformes

E 26-52.

Duas cargas $q = +2.0 \times 10^{-6}$ C estão fixas no espaço, separadas pela distância $d = 2.0$ cm, como está indicado na figura abaixo. *(a)* Qual é o potencial elétrico no ponto C? *(b)* Uma terceira carga $q = +2.0 \times 10^{-6}$ C é trazida lentamente do infinito até o ponto C. Quanto trabalho foi realizado? *(c)* Qual a energia potencial U da configuração quando a terceira carga está no lugar desejado?

▶ *(a)* A distância r entre o ponto C e qualquer uma das duas cargas é dada por

$$r = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{d}{\sqrt{2}}.$$

Como as cargas estão a mesma distância, de acordo com o Princípio de Superposição, basta calcular o potencial devido a qualquer uma delas e multiplicar por dois. Portanto, o potencial em C é

$$V_c = 2 \times \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}\right] = 2.54\,\text{M Volts}.$$

(b) Sabendo-se o potencial no ponto C fica fácil calcular o trabalho para deslocar a carga $q_3 (= q)$ até tal ponto:

$$W = U_3 = q_3 V_c = (2 \times 10^{-6})(2.54 \times 10^6) = 5.08\,\text{J}.$$

Alternativamente, usando a técnica indicada no Exemplo 26-10, encontramos para a energia potencial do conjunto das três cargas a seguinte relação:

$$U_f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q^2}{d} + \frac{q^2}{d/\sqrt{2}} + \frac{q^2}{d/\sqrt{2}}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{1}{d}+\frac{\sqrt{2}}{d}+\frac{\sqrt{2}}{d}\Big]\\
&= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d}(1+2\sqrt{2}) \simeq 6.884\,\text{J}.
\end{aligned}
$$

Antes de trazer do infinito a terceira carga, a energia potencial inicial do conjunto das duas cargas é dado por:

$$U_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{r}.$$

Substituindo os dados numéricos, obtemos para a energia potencial inicial $U_1 = 1.798\,\text{J}$. O trabalho que o agente externo deve realizar para deslocar a terceira carga do infinito até o ponto C é numéricamente igual à variação da energia potencial do sistema, ou seja,

$$W = U_f - U_i = 6.884 - 1.798 = 5.086\,\text{J}.$$

(c) A energia potencial do conjunto das três cargas já foi calculada no item *(b)*, ou seja,

$$U_f = 6.884\,\text{J}.$$

E 26-56.

Determine uma expressão para o trabalho necessário para colocarmos as quatro cargas reunidas como está indicado na figura abaixo.

▶ A energia total da configuração é a soma das energias correspondentes a cada par de cargas, a saber:

$$
\begin{aligned}
U &= U_{12}+U_{13}+U_{14}+U_{23}+U_{24}+U_{34}\\
&= K\Big(\frac{-q^2}{a}+\frac{q^2}{a\sqrt{2}}-\frac{q^2}{a}-\frac{q^2}{a}+\frac{q^2}{a\sqrt{2}}-\frac{q^2}{a}\Big)\\
&= \frac{Kq^2}{a}(-4+\sqrt{2}) = -0.21\frac{q^2}{\epsilon_0 a}.
\end{aligned}
$$

E 26-59.

▶ **(a)** Seja $\ell(=\ 0.15\,\text{m})$ o comprimento do retângulo e $\omega(=\ 0.050\,\text{m})$ sua largura. A carga q_1 está a uma distância ℓ do ponto A e a carga q_2 está a uma distância ω, de modo que o potencial elétrico em A é

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Big[\frac{q_1}{\ell}+\frac{q_2}{w}\Big] = 6.0\times 10^4 \text{ Volts}.$$

(b) Analogamente,

$$V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Big[\frac{q_1}{w}+\frac{q_2}{\ell}\Big] = -7.8\times 10^5 \text{ Volts}.$$

(c) Como a energia cinética é zero no início e no fim da viagem, o trabalho feito pelo agente externo é igual à variação da energia potencial do sistema. A energia potencial é dada pelo produto da carga q_3 e o potencial elétrico. Sendo U_A a energia potencial quando q_3 está em A e U_B quando está em B, o trabalho feito para mover-se q_3 de B para A é

$$
\begin{aligned}
W &= U_A - U_B\\
&= q_3(V_A - V_B)\\
&= (3.0\times 10^{-6})\Big(6.0\times 10^4 + 7.8\times 10^5\Big)\\
&= 2.5 \text{ J}.
\end{aligned}
$$

(d) O trabalho feito pelo agente externo é positivo e, portanto, a energia do sistema de três cargas **aumenta**.
(e) e **(f)** A força eletrostática é conservativa. Portanto, o trabalho é sempre o mesmo, independentemente da trajetória percorrida.

P 26-61.

Uma partícula de carga Q (positiva) é mantida num ponto P fixo. Uma segunda partícula de massa m e carga (negativa) $-q$ move-se com velocidade constante, num círculo de raio r_1, cujo centro é o ponto P. Obtenha uma expressão para o trabalho W que deve ser realizado por um agente externo sobre a segunda partícula a fim de aumentar o raio deste círculo para r_2.

▶ Seja W_e o trabalho realizado contra as forças eletrostáticas. Então, sendo $V_i = Q/(4\pi\varepsilon_0 r_i)$ num ponto r_i devido a carga Q, temos

$$W_e = -q(V_2 - V_1) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\Big].$$

Como o movimento é circular uniforme, igualando a força centrípeta com a força eletrostática, obtemos uma relação que nos fornece mv^2 e, portanto, a energia cinética:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r^2} = \frac{mv^2}{r}.$$

Com isto, a energia cinética da carga $-q$ é

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r}.$$

A variação da energia cinética entre as órbitas de raios r_1 e r_2 é

$$K_1 - K_2 = \frac{1}{2}\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\Big].$$

P 26-64.

Uma partícula de carga q é mantida fixa num ponto P e uma segunda partícula de massa m com a mesma carga q está inicialmente em repouso a uma distância r_1 de P. A segunda partícula é, então, liberada, sendo repelida pela primeira. Determine sua velocidade no instante em que ela se encontra a uma distância r_2 de P. Dados: $q = 3.1$ μC; $m = 20$ mg; $r_1 = 0.90$ mm e $r_2 = 2.5$ mm.

▶ Pela lei da conservação da energia, temos:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{r_1} + 0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{r_2} + \frac{mv^2}{2}.$$

Donde se conclui que

$$v^2 = \frac{2}{m}\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\Big].$$

Substituindo os dados numéricos, obtemos a seguinte resposta:

$$v = 2.48 \times 10^3 \text{ m/s}.$$

P 26-65.

Duas pequenas esferas de metal de massa $m_1 = 5$ g e massa $m_2 = 10$ g têm cargas positivas iguais, $q = 5$ μC. As esferas estão ligadas por uma corda de massa desprezível e de comprimento $d = 1$ m, que é muito maior que o raio das esferas. *(a)* Calcule a energia potencial eletrostática do sistema. *(b)* Qual é a aceleração de cada uma das esferas no instante em que cortamos o fio? *(c)* Determine a velocidade de cada uma das esferas muito tempo depois do fio ter sido cortado.

▶ *(a)* A energia potencial inicial é dada por

$$U_{\text{inicial}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{d} = 0.225\,\text{J}.$$

(b) A força F existente depois do fio ser cortado é dada pela força de interação Coulombiana. Portanto,

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{d^2} = 0.22475\,\text{N}.$$

De acordo com a Terceira Lei de Newton, esta força é a mesma (em módulo) para as duas esferas. Portanto, as magnitudes das acelerações são dadas por

$$a_1 = \frac{F}{m_1} = 45.0 \text{ m/s}^2,$$
$$a_2 = \frac{F}{m_2} = 22.5 \text{ m/s}^2.$$

(c) Muito tempo depois do fio ser cortado, as esferas estão suficientemente afastadas de modo que a energia potencial é igual a zero. Neste caso, pela Lei da Conservação de energia, temos:

$$U_{\text{final}} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2.$$

Da conservação do momento linear sabemos que $0 = m_1v_1 - m_2v_2$ e, como temos $m_1 = m_2/2$, segue que $v_1 = 2v_2$. Substituindo-se este valores de v_1 e m_1 na expressão da energia final U_{final} acima encontramos finalmente que

$$U_{\text{final}} = \frac{3}{2}m_2v_2^2 = U_{\text{inicial}} = 0.225.$$

Portanto,

$$v_2 = 3.873\,\text{m/s}, \qquad v_1 = 2v_2 = 7.746\,\text{m/s}.$$

P 26-70.

▶ Considere a energia potencial como sendo zero quando o elétron que se move estiver muito distante dos elétrons fixos e use o princípio de conservação da energia.
A energia potencial final é $U_f = 2e^2/(4\pi\varepsilon_0 d)$, onde d é a metade da distância entre os elétrons.
A energia cinética inicial é $K_i = mv^2/2$, onde v é a velocidade inicial e m a massa do elétron que se move.
A nergia cinética final é zero.
Portanto, $K_i = U_f$ ou, isto é, $mv^2/2 = 2e^2/(4\pi\varepsilon d)$, de onde se obtém

$$v = \sqrt{\frac{4e^2}{4\pi\varepsilon_0 md}} = 3.2 \times 10^2 \text{ m/s}.$$

26.2.8 Um condutor isolado

P 26-75.

Qual é a carga sobre uma esfera condutora de raio $r = 0.15$ m sabendo-se que seu potencial é 1500 V e que $V = 0$ no infinito?

► Sendo zero o potencial no infinito, o potencial na superfície da esfera é $V = q/(4\pi\varepsilon_0 r)$, onde q é a carga sobre a esfera e r o seu raio. Portanto

$$q = 4\pi\varepsilon_0 V = \frac{(0.15 \text{ m})(1500 \text{ V})}{9.0 \times 10^9 \;\; N \cdot m^2/C^2} = 2.5 \times 10^{-8} \text{ C}.$$

P 26-79.

Duas esferas metálicas têm raio de 3 cm e cargas de $+1 \times 10^{-8}$ C e -3×10^{-8} C. Suponha que estas cargas estejam distribuídas de maneira uniforme e que os centros das esferas estejam afastados 2 metros um do outro. Sendo assim, calcule: *(a)* o potencial do ponto situado à meia distância entre os centros das esferas e *(b)* o potencial de cada esfera.

► *(a)* No ponto situado à meia distância, o potencial é dado por

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{+1 \times 10^{-8}}{1 \text{ m}} + \frac{-3 \times 10^{-8}}{1 \text{ m}}\Big] \\ &= 9 \times 10^9 \times (-2) \times 10^{-8} = -180\,\text{V}. \end{aligned}$$

(b) Como d é muito maior que r, para calcular o potencial de cada esfera podemos desprezar a influência mútua entre as esferas. Portanto,

$$\begin{aligned} V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q_1}{r} &= 9 \times 10^9\,\frac{(1 \times 10^{-8})}{3 \times 10^{-2}} \\ &= 3000\,\text{V}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q_2}{r} &= 9 \times 10^9\,\frac{(-3 \times 10^{-8})}{3 \times 10^{-2}} \\ &= -9000\,\text{V}. \end{aligned}$$

26.2.9 O acelerador de van de Graaff

P 26-84.

► **(a)**

$$\begin{aligned} K = 2a\Delta V &= 2(1.6 \times 10^{-19}\text{ C})(1.0 \times 10^6\text{ V}) \\ &= 3.2 \times 10^{-12}\text{ J}. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} K = a\Delta V &= (1.6 \times 10^{-19}\text{ C})(1.0 \times 10^6\text{ V}) \\ &= 1.6 \times 10^{-12}\text{ J}. \end{aligned}$$

(c) Como $K = mv^2/2$, temos

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}}.$$

Como a partícula α tem o dobro da carga de um próton e 4 vezes mais massa, a razão das velocidades finais é $v_p/v_\alpha = \sqrt{2}$. Para $\Delta V = 10^6$ Volts, temos

$$v_p = 1.4 \times 10^7\text{ m/s} \qquad v_\alpha = 9.8 \times 10^6\text{ m/s}.$$

P 26-86.

Um eletrodo de alta voltagem de um acelerador eletrostático é uma casca esférica metálica, carregada, que possui um potencial $V = +9.0$ MV. *(a)* Descargas elétricas ocorrem no gás desta máquina num campo $E = 100$ MV/m. Que restrição a respeito do raio r da casca deve ser feita para evitar que tais descargas aconteçam? *(b)* Uma longa correia de borracha em movimento transporta cargas para a casca a 300 μC/s, e o potencial da casca permanece constante devido ao escoamento. Qual é a potência mínima necessária para transportar a carga? *(c)* A correia tem largura $w = 0.50$ m e se movimenta com velocidade $v = 30$ m/s. Determine a densidade superficial de carga sobre a correia.

► O potencial da esfera é dado por $V = q/(4\pi\epsilon_0 r)$ e o campo elétrico nas vizinhanças da superfície externa da esfera é dado por $E = q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$. Portanto, $E = V/r$. Para um valor $E < 10^8$ V/m, é necessário que

$$r = \frac{V}{E} = (9 \times 10^6)(10^{-8}) = 0.09\,\text{m} = 9\,\text{cm}.$$

(b) O trabalho realizado pela força externa para carregar a esfera com uma carga total Q é dado por $W = QV$. Portanto, a potência P fornecida para o gerador eletrostático deve ser dada por

$$P = \frac{dW}{dt} = V\frac{dQ}{dt} = 2700\,\text{W} = 2.7\,\text{kW}.$$

(c) Sendo σ a densidade superficial de cargas e x o comprimento da correia, encontramos $Q = \sigma A = \sigma(wx)$. Com isto

$$\frac{dQ}{dt} = \sigma\frac{dx}{dt} = \sigma wv.$$

Donde se conclui que

$$\sigma = \frac{dQ/dt}{wv} = 2\times 10^{-5}\ \text{C/m}^2 = 20\,\mu\ \text{C/m}^2.$$

26.2.10 Problemas Adicionais

P 26-89.

Duas cargas iguais $+q$ estão fixas nas extremidades de uma linha de comprimento $2a$. Uma carga $+Q$, de massa m, é colocada no centro da linha e pode mover-se livremente. (a) mostre que o movimento de Q é instável para pequenos deslocamentos perpendiculares á linha, e estável para pequenos deslocamentos ao longo da linha. (b) Se a carga Q for deslocada, ao longo da linha, por uma distância $x < a$, qual será o potencial elétrico no local de Q, devido ás duas cargas $+q$? (c) Aplique a expansão binomial á expressão desse potencial e retenha somente o termo de mais baixa ordem em x. A seguir, determine o módulo da força eletrostática que atua sobre Q na posição x. (d) Se a carga Q for abandonada nesta posição x, qual será a freqüência angular da oscilação resultante de Q em torno do centro da linha?

► (a)

26.2.11 Problemas da terceira edição do livro-texto

E 26-64.

Duas esferas condutoras, idênticas, de raio $r = 0.15$ cm, estão afastadas por uma distância $a = 10$ m. Qual é a carga de cada esfera se o potencial de uma delas é $+1500$ V e o da outra -1500 V? Que suposições foram feitas?

► Como $r \ll a$, podemos supor que as duas esferas possuem uma distribuição uniforme de cargas, uma vez que podemos desprezar a ação do campo elétrico de uma das esferas sobre a outra esfera. Portanto,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} = \pm 1500\ \text{V}.$$

Donde se conclui que para $r = 0.15$ m, as cargas valem $q = \pm 25$ nC.

P 26-29*.

Uma grossa camada esférica, com densidade de carga uniforme, é limitada pelos raios r_1 e r_2, onde $r_2 > r_1$. Calcule o potencial elétrico V em função da distância r ao centro da distribuição, considerando as regiões onde: *(a)* $r > r_2$; *(b)* $r_2 > r > r_1$ e *(c)* $r < r_1$. *(d)* Estas soluções concordam se $r = r_2$ e se $r = r_1$?

► *(a)* Seja Q a carga total contida na camada esférica. Para $r > r_2$ é claro que o potencial V é dado pelo potencial de uma carga puntiforme, portanto,

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

A carga total também pode ser expressa em função da densidade de cargas ρ de seguinte modo:

$$\begin{aligned} Q = \int \rho dV &= \rho \times \text{(volume da camada esférica)} \\ &= \rho \times \frac{4}{3}\pi(r_2^3 - r_1^3). \end{aligned}$$

Sobre a superfície da camada esférica, o potencial V calculado acima fornece

$$V_{r_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\Big[r_2^2 - \frac{r_1^3}{r_2}\Big].$$

(b) Para determinar o potencial V_r na região entre r_1 e r_2, é conveniente utilizar a Eq. 26-8,

$$V_f - V_i = -\int_i^f \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}.$$

Considere um caminho retilíneo ligado a um ponto da superfície a um ponto situado a uma distância r do centro da esfera. Logo, integrando a Eq. 26-8 entre estes limites, encontramos:

$$V_r - V_{r_2} = -\int_{r_2}^r \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}.$$

Para determinar o campo elétrico entre r_1 e r_2 é conveniente utilizar a Lei de Gauss. Construa uma superfície gaussiana esférica de raio igual a r. De acordo com a figura indicada na solução deste problema, vemos que existe uma carga total Q_1 no interior desta superfície gaussiana esférica. Portanto, aplicando a Lei de Gauss, podemos escrever a seguinte relação:

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_1}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0}\times V_{\text{camada}},$$

onde V_{camada} representa o volume da camada esférica que contém a carga Q_1.
Portanto, podemos escrever a seguinte relação para o módulo do campo elétrico:

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0 r^2}(r^3 - r_1^3).$$

Para integrar $V_r - V_2 = -\int_{r_2}^{r} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$ note que o campo elétrico **E** é orientado para fora enquanto que o percurso escolhido (de r_2 até r) está orientado para dentro. Note também que $ds = -dr$ (porque quando s aumenta a distância até o centro r diminui). Portanto, levando em conta a relação tirada da Eq. 8 e a acima citada, temos:

$$\begin{aligned} V_r &= V_{r_2} - \int_{r_2}^{r} \left[\frac{\rho}{3\epsilon_0 r^2}(r^3 - r_1^3)\right] dr, \\ &= V_{r_2} - \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left[\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r_2^2}{2}\right) + r_1^3\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Substituindo o resultado encontrado anteriormente para V_2 na relação acima, encontramos a seguinte resposta para o potencial V_r em função de r para a região entre r_1 e r_2:

$$V_r = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left[\frac{3r_2^2}{2} - \frac{r^2}{2} - \frac{r_1^3}{r}\right].$$

Caso você deseje obter V_r em termos da carga total Q da camada esférica, basta substituir ρ por Q usando a relação encontrada entre estas grandezas no item *(a)*.

(c) Em todos os pontos da cavidade, como não existe nenhuma carga nesta região e levando em conta a simetria esférica, concluimos que o potencial é constante e igual ao potencial na superfície esférica de raio r_1. Em outras palavras, concluimos que todo o volume delimitado pela superfície esférica de raio r_1 é um volume **eqüipotencial**. Este potencial **comum** é igual ao potencial na superfície esférica de raio r_1, ou seja, fazendo $r = r_1$ na relação encontrada para V_r encontramos a resposta:

$$V_{r_1} = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\left[r_2^2 - r_1^2\right]$$

Caso você deseje obter V_1 em termos da carga total Q da camada esférica, basta usar a relação para ela, encontrada no item *(a)*.

(d) Faça $r = r_2$ na expressão para V_r, item *(b)*, e você encontrará o potencial na superfície esférica de raio r_2, ou seja, você encontrará o potencial na superfície externa da camada esférica pela relação V_2 [item *(a)*]. Faça $r = r_1$ na expressão para V_r e você encontrará o potencial na superfície esférica de raio r_1, ou seja, você encontrará o resultado V_1 (item *(c)*).