Exercícios Resolvidos de Teoria Eletromagnética

Jason Alfredo Carlson Gallas

Professor Titular de Física Teórica

Doutor em Física pela Universidade Ludwig Maximilian de Munique, Alemanha

Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul
91501-970 Porto Alegre, BRASIL

Matéria para a PRIMEIRA prova. Numeração conforme a **quarta** edição do livro
"Fundamentos de Física", Halliday, Resnick e Walker.

Esta e outras listas encontram-se em: *http://www.if.ufrgs.br/∼jgallas* clicando-se em 'ENSINO'

Conteúdo

Comentários/Sugestões e Erros: favor enviar para `jgallas @ if.ufrgs.br`
(`lista1.tex`)

23 Carga Elétrica

23.1 Questões

Q 23-1

Sendo dadas duas esferas de metal montadas em suporte portátil de material isolante, invente um modo de carregá-las com quantidades de cargas iguais e de sinais opostos. Você pode usar uma barra de vidro ativada com seda, mas ela não pode tocar as esferas. É necessário que as esferas sejam do mesmo tamanho, para o método funcionar?

▶ Um método simples é usar indução elétrostática: ao aproximarmos a barra de vidro de qualquer uma das esferas quando ambas estiverem em contato iremos induzir (i) na esfera mais próxima, uma mesma carga igual e oposta à carga da barra e, (ii) na esfera mais afastada, uma carga igual e de mesmo sinal que a da barra. Se separarmos então as duas esferas, cada uma delas irá ficar com cargas de mesma magnitude porém com sinais opostos. Este processo não depende do raio das esferas. Note, entretanto, que a *densidade* de cargas sobre a superfície de cada esfera após a separação obviamente depende do raio das esferas.

Q 23-2

Na questão anterior, descubra um modo de carregar as esferas com quantidades de carga iguais e de mesmo sinal. Novamente, é necessário que as esferas tenham o mesmo tamanho para o método a ser usado?

▶ O enunciado do problema anterior não permite que toquemos com o bastão nas esferas. Portanto, repetimos a indução eletrostática descrita no exercício anterior. Porém, mantendo sempre a barra próxima de uma das esferas, removemos a outra, tratando de neutralizar a carga sobre ela (por exemplo, aterrando-a). Se afastarmos o bastão da esfera e a colocarmos novamente em contato com a esfera cuja carga foi neutralizada, iremos permitir que a carga possa redistribuir-se *homogeneamente* sobre ambas as esferas. Deste modo garantimos que o *sinal* das cargas em ambas esferas é o mesmo. Para que a magnitude das cargas seja também idêntica é necessário que as esferas tenham o mesmo raio. É que a densidade superficial comum às duas esferas quando em contato irá sofrer alterações diferentes em cada esfera, após elas serem separadas, caso os raios sejam diferentes.

Q 23-3

Uma barra carregada atrai fragmentos de cortiça que, assim que a tocam, são violentamente repelidos. Explique a causa disto.

▶ Como os dois corpos atraem-se inicialmente, deduzimos que eles possuem quantidades de cargas com sinais *diferentes*. Ao tocarem-se a quantidade de cargas menor é equilibrada pelas cargas de sinal oposto. Como a carga que sobra reparte-se entre os dois corpos, estes passam a repelir-se por possuirem, então, cargas de *mesmo* sinal.

⊛ Note que *afirmar* existir repulsão após os corpos tocarem-se equivale a afirmar ser *diferente* a quantidade de cargas existente inicialmente em cada corpo.

Q 23-4

As experiências descritas na Secção 23-2 poderiam ser explicadas postulando-se quatro tipos de carga, a saber, a do vidro, a da seda, a do plástico e a da pele do animal. Qual é o argumento contra isto?

▶ É fácil verificar experimentalmente que os quatro tipos 'novos' de carga não poderiam ser diferentes umas das outras. Isto porque é possível separar-se os quatro tipos de carga em dois pares de duas cargas que são indistinguíveis um do outro, experimentalmente.

Q 23-6

Um isolante carregado pode ser descarregado passando-o logo acima de uma chama. Explique por quê?

▶ É que a alta temperatura acima da chama ioniza o ar, tornando-o condutor, permitindo o fluxo de cargas.

Q 23-9

Por que as experiências em eletrostática não funcionam bem em dias úmidos?

▶ Em dias úmidos existe um excesso de vapor de água no ar. Conforme será estudado no Capítulo 24, a molécula de água, H_2O, pertence à classe de molécululas que possui o que se chama de 'momento de dipolo elétrico', isto é, nestas moléculas o centro das cargas positivas não coincide com o centro das cargas negativas. Este desequilíbrio faz com que tais moléculas sejam elétricamente ativas, podendo ser atraidas por superfícies carregadas, tanto positiva quanto negativamente. Ao colidirem com superfícies carregadas, as moléculas agem no sentido de neutralizar parte da carga na superfície, provocando deste modo efeitos indesejáveis para os experimentos de eletrostática. Isto porque não se tem mais certeza sobre qual a quantidade de carga que *realmente* se encontra sobre a superfície.

Q 23-13

Uma pessoa em pé sobre um banco isolado toca um condutor também isolado, mas carregado. Haverá descarga completa do condutor?

▶ Não. Haverá apenas uma redistribuição da carga entre o condutor e a pessoa.

Q 23-14

(a) Uma barra de vidro positivamente carregada atrai um objeto suspenso. Podemos concluir que o objeto está carregado negativamente? *(b)* A mesma barra carregada positivamente repele o objeto suspenso. Podemos concluir que o objeto está positivamente carregado?

▶ (a) Não. Poderíamos estar lidando com um objeto neutro porém *metálico*, sobre o qual seria possível induzir uma carga, que passaria então a ser atraido pela barra. (b) Sim, pois não se pode induzir carga de mesmo sinal.

Q 23-16

Teria feito alguma diferença significativa se Benjamin Franklin tivesse chamado os elétrons de positivos e os prótons de negativos?

▶ Não. Tais nomes são apenas uma questão de convenção.

⊛ Na terceira edição do livro, afirmava-se que Franklin, além de 'positivo' e 'negativo', haveria introduzido também as denominações 'bateria' e 'carga'. Na quarta edição a coisa já mudou de figura... Eu tenho a impressão que 'positivo' e 'negativo' devem ser anteriores a Franklin mas não consegui localizar referências adequadas. O químico francês Charles François de Cisternay Du Fay (1698-1739), descobriu a existência de dois "tipos de eletricidade": *vitrea* (do vidro) e *resinosa* (da resina).
Porém, a quem será que devemos os nomes de cargas "positivas" e "negativas"? Ofereço uma garrafa de boa champanha a quem por primeiro me mostrar a solução deste puzzle!

Q 23-17

A Lei de Coulomb prevê que a força exercida por uma carga puntiforme sobre outra é proporcional ao produto das duas cargas. Como você poderia testar este fato no laboratório?

▶ Estudando de que modo varia a força necessária para levar-se cargas de distintos valores até uma distância d, constante, de uma outra carga fixa no espaço.

Q 23-18

Um elétron (carga $= -e$) gira ao redor de um núcleo (carga $= +2e$) de um átomo de hélio. Qual das partículas exerce maior força sobre a outra?

▶ Se realmente você não souber a resposta correta, ou faz e *entende* o Exercício **E 23-2** ou tranca o curso bem rápido!

Q 23-15 extra A força elétrica que uma carga exerce sobre outra se altera ao aproximarmos delas outras cargas?

▶ A força entre duas cargas quaisquer depende única e exclusivamente das grandezas que aparecem na expressão matemática da lei de Coulomb. Portanto, é fácil concluir-se que a força pre-existente entre um par de cargas jamais poderá depender da aproximação de uma ou mais cargas. Observe, entretanto, que a 'novidade' que resulta da aproximação de cargas extras é que a força *resultante* sobre cada carga pre-existente poderá alterar-se, podendo tal resultante ser facilmente determinada com o princípio de superposição.

23.2 Problemas e Exercícios

23.2.1 Lei de Coulomb

E 23-1

Qual seria a força eletrostática entre duas cargas de 1 Coulomb separadas por uma distância de *(a)* 1.0 m e *(b)* 1.0 km se tal configuração pudesse ser estabelecida?

▶ (a) $F = (8.99 \times 10^9)\ \frac{1\times 1}{1^2} = 8.99 \times 10^9$ N.

(b) $F = (8.99 \times 10^9)\ \frac{1\times 1}{(10^3)^2} = 8.99 \times 10^3$ N.

E 23-2

Uma carga puntiforme de $+3.0 \times 10^{-6}$ C dista 12 cm de uma segunda carga puntiforme de -1.5×10^{-6} C. Calcular o módulo da força eletrostática que atua sobre cada carga.

▶ De acordo com a terceira Lei de Newton, a força que uma carga q_1 exerce sobre outra carga q_2 é igual em módulo e de sentido contrário à força que a carga q_2 exerce sobre a carga q_1. O valor desta força é dado pela Eq. 23-4. Conforme a convenção do livro, usamos aqui os módulos das cargas. Portanto

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q_1q_2}{r^2} \\ &= (8.99\times 10^9)\,\frac{(3\times 10^{-6})(1.5\times 10^{-6})}{(12\times 10^{-2})^2} \\ &= 2.81 \text{ N.} \end{aligned}$$

E 23-3

Qual deve ser a distância entre duas cargas puntiformes $q_1 = 26\ \mu$C e $q_2 = -47\ \mu$C para que o módulo da força eletrostática entre elas seja de 5.7 N?

▶

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{\frac{(8.99\times 10^9)(26\times 10^{-6})(47\times 10^{-6})}{5.7}} \\ &\simeq 1.4 \text{ metros.} \end{aligned}$$

E 23-4

Na descarga de um relâmpago típico, uma corrente de 2.5×10^4 Ampères flui durante 20 μs. Que quantidade de carga é transferida pelo relâmpago? [Note: Ampère é a unidade de corrente no SI; está definida na Secção 28-2 do livro; mas o capítulo 23 fornece meios de resolver o problema proposto.]

▶ Usamos a Eq. (23-3):

$$dq = i\ dt = (2.5\times 10^4)(20\times 10^{-6}) = 0.5 \text{ C.}$$

⊛ Tal carga é grande ou pequena? Compare com as cargas dadas nos Exemplos resolvidos do livro.

E 23-5

Duas partículas igualmente carregadas, mantidas a uma distância 3.2×10^{-3} m uma da outra, são largadas a partir do repouso. O módulo da aceleração inicial da primeira partícula é de 7.0 m/s^2 e o da segunda é de 9.0 m/s^2. Sabendo-se que a massa da primeira partícula vale 6.3×10^{-7} Kg, quais são: *(a)* a massa da segunda partícula? *(b)* o módulo da carga comum?

▶ (a) Usando a terceira lei de Newton temos $m_1a_1 = m_2a_2$, de modo que

$$\begin{aligned} m_2 = m_1\frac{a_1}{a_2} &= 6.3\times 10^{-7}\times\frac{7}{9} \\ &= 4.9\times 10^{-7} \text{ kg.} \end{aligned}$$

(b) Como temos $F = q^2/(4\pi\varepsilon_0 r^2) = m_1a_1$ segue que

$$\begin{aligned} q &= r\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m_1 a_1} \\ &= 3.2\times 10^{-3}\times\sqrt{\frac{(6.3\times 10^{-7})(7)}{9\times 10^9}} \\ &= 7.1\times 10^{-11} \text{ C.} \end{aligned}$$

E 23-7

Duas esferas condutoras idênticas e isoladas, 1 e 2, possuem quantidades iguais de carga e estão separadas por uma distância grande comparada com seus diâmetros (Fig. 23-13a). A força eletrostática que atua sobre a esfera 2 devida a esfera 1 é $\mathbf{F}$. Suponha agora que uma terceira esfera idêntica 3, dotada de um suporte isolante e inicialmente descarregada, toque primeiro a esfera 1 (Fig. 23-13b), depois a esfera 2 (Fig.. 23-13c) e, em seguida, seja afastada (Fig. 23-13d). Em termos de $\mathbf{F}$, qual é a força $\mathbf{F}'$ que atua agora sobre a esfera 2?

▶ Chamemos de q a carga inicial sobre as esferas 1 e 2. Após ser tocada pela esfera 3, a esfera 1 retém uma carga igual a $q/2$. Após ser tocada pela esfera 3, a esfera 2 irá ficar com uma carga igual a $(q+q/2)/2 = 3q/4$. Portanto, teremos em módulo

$$F' = \kappa\Big(\frac{q}{2}\Big)\Big(\frac{3q}{4}\Big) = \frac{3}{8}\,\kappa\, q^2 = \frac{3}{8}\,F,$$

onde κ é uma constante (que envolve $4\pi\varepsilon_0$ bem como a distância *fixa* entre as esferas 1 e 2, mas que não vem ao caso aqui) e $F \equiv \kappa\, q^2$ representa o módulo de $\mathbf{F}$.

P 23-8

Três partículas carregadas, localizadas sobre uma linha reta, estão separadas pela distância d (como mostra a Fig. 23-14). As cargas q_1 e q_2 são mantidas fixas. A carga q_3, que está livre para mover-se, encontra-se em equilíbrio (nenhuma força eletrostática líquida atua sobre ela). Determine q_1 em termos de q_2.

▶ Chame de F_i a força sobre q_3 devida a carga q_i. Observando a figura, podemos ver que como q_3 está em equilíbrio devemos ter $F_1 = F_2$. As forças F_1 e F_2 têm módulos iguais mas sentidos opostos, logo, q_1 e q_2 tem sinais opostos. Abreviando-se $K = 1/(4\pi\epsilon_0)$, temos então

$$F_1 = K\,\frac{q_1q_3}{(2d)^2}$$

$$F_2 = K\frac{q_2q_3}{d^2}.$$

Substituindo estes valores na equação $F_1 = F_2$, obtemos $|q_1| = 4|q_2|$. Como as cargas devem ter sinais opostos, podemos escrever $q_1 = -4q_2$, que é a resposta procurada.
Observe que o sinal da carga q_2 permanece totalmente arbitrário.

P 23-10

Na Fig. 23-15, quais são as componentes horizontal e vertical da força eletrostática resultante que atua sobre a carga do vértice esquerdo inferior do quadrado, sendo $q = 1.0 \times 10^{-7}$ C e $a = 5.0$ cm?

▶ Primeiro, escolhemos um sistema de coordenadas com a origem coincidente com a carga no canto esquerdo, com o eixo x horizontal e eixo y vertical, como de costume. A força exercida pela carga $+q$ na carga $+2q$ é

$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(+q)(+2q)}{a^2}(-\mathbf{j}).$$

A força exercida por $-q$ sobre $+2q$ é

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(-q)(+2q)}{(\sqrt{2}a)^2}\Big(-\frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{2}}\Big)\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{a^2}\Big(\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}+\frac{\mathbf{j}}{\sqrt{2}}\Big).\end{aligned}$$

Finalmente, a força exercida por $-2q$ sobre $+2q$ é

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_3 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(-2q)(+2q)}{a^2}(-\mathbf{i})\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(4q^2)}{a^2}(\mathbf{i}).\end{aligned}$$

Portanto, a magnitude da componente horizontal da força resultante é dada por

$$\begin{aligned}F_x &= F_{1x}+F_{2x}+F_{3x}\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{a^2}\Big(0+\frac{1}{\sqrt{2}}+4\Big)\\ &= (8.99\times 10^9)\frac{1\times 10^{-7}}{5\times 10^{-2}}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}+4\Big)\\ &= 0.17\text{ N},\end{aligned}$$

enquanto que a magnitude da componente vertical é dada por

$$\begin{aligned}F_y &= F_{1y}+F_{2y}+F_{3y}\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{a^2}\Big(-2+\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)\\ &= -0.046\text{ N}.\end{aligned}$$

P 23-12

Duas esferas condutoras idênticas, mantidas fixas, atraem-se com uma força eletrostática de módulo igual a 0.108 N quando separadas por uma distância de 50.0 cm. As esferas são então ligadas por um fio condutor fino. Quando o fio é removido, as esferas se repelem com uma força eletrostática de módulo igual a 0.036 N. Quais eram as cargas iniciais das esferas?

▶ Sejam q_1 e q_2 as cargas originais que desejamos calcular, separadas duma distância r. Escolhamos um sistema de coordenadas de modo que a força sobre q_2 é positiva se ela for repelida por q_1. Neste caso a *magnitude* da força 'inicial' sobre q_2 é

$$F_i = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2},$$

onde o sinal negativo indica que as esferas se atraem. Em outras palavras, o sinal negativo indica que o produto $q_1q_2 = -4\pi\epsilon_0 r^2 F_i$ é negativo, pois a força F_i, $(F_i > 0)$, é força de *atração*.
Como as esferas são idênticas, após o fio haver sido conectado ambas terão uma mesma carga sobre elas, de valor $(q_1+q_2)/2$. Neste caso a força de repulsão 'final' é dada por

$$F_f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(q_1+q_2)^2}{4r^2}.$$

Das duas expressões acima tiramos a soma e o produto de q_1 e q_2, ou seja

$$\begin{aligned}q_1q_2 = -4\pi\epsilon_0 r^2 F_i &= -\frac{(0.5)^2(0.108)}{9\times 10^9}\\ &= -3\times 10^{-12}\ \text{C}^2\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}q_1+q_2 = r\sqrt{4\,(4\pi\epsilon_0)F_f} &= \pm(0.5)\sqrt{\frac{4(0.036)}{9\times 10^9}}\\ &= \pm 2\times 10^{-6}\ \text{C}.\end{aligned}$$

Conhecendo-se a soma e o produto de dois números, conhecemos na verdade os coeficientes da equação do segundo grau que define estes números, ou seja,

$$(x-q_1)(x-q_2) = x^2-(q_1+q_2)x+q_1q_2.$$

Dito de outra forma, se substituirmos

$$q_2 = -(3 \times 10^{-12})/q_1 \qquad (*)$$

na equação da soma acima temos duas possibilidades:

$$q_1 - \frac{3.0 \times 10^{-12}}{q_1} = +\,2 \times 10^{-6}, \qquad (I)$$

ou

$$q_1 - \frac{3.0 \times 10^{-12}}{q_1} = -\,2 \times 10^{-6}. \qquad (II)$$

Considerando-se a Eq. I, temos

$$q_1^2 - 2 \times 10^{-6}\, q_1 - 3 \times 10^{-12} = 0,$$

de onde tiramos as duas soluções

$$q_1 = \frac{-2 \times 10^{-6} \pm \sqrt{(2 \times 10^{-6})^2 + 4(3 \times 10^{-12})}}{2}.$$

O sinal $+$ fornece-nos

$$q_1 = 1 \times 10^{-6}\ \text{C} \qquad \text{e} \qquad q_2 = -3 \times 10^{-6}\ \text{C},$$

enquanto que o sinal $-$ fornece-nos

$$q_1 = -3 \times 10^{-6}\ \text{C} \qquad \text{e} \qquad q_2 = 1 \times 10^{-6}\ \text{C},$$

onde usamos a Eq. (*) acima para calcular q_2 a partir de q_1.

Repetindo-se a análise a partir da Eq. II percebemos que existe outro par de soluções possível, uma vez que revertendo-se os sinais das cargas, as forças permanecem as mesmas:

$$q_1 = -1 \times 10^{-6}\ \text{C} \qquad \text{e} \qquad q_2 = 3 \times 10^{-6}\ \text{C},$$

ou

$$q_1 = 3 \times 10^{-6}\ \text{C} \qquad \text{e} \qquad q_2 = -1 \times 10^{-6}\ \text{C}.$$

P 23-15

Duas cargas puntiformes *livres* $+q$ e $+4q$ estão a uma distância L uma da outra. Uma terceira carga é, então, colocada de tal modo que todo o sistema fica em equilíbrio. *(a)* Determine a posição, o módulo e o sinal da terceira carga. *(b)* Mostre que o equilíbrio é instável.

► *(a)* A terceira carga deve estar situada sobre a linha que une a carga $+q$ com a carga $+4q$. Somente quando a terceira carga estiver situada nesta posição, será possível obter uma resultante nula, pois, em qualquer outra situação, as forças serão de atração (caso a terceira carga seja negativa) ou de repulsão (caso a terceira carga seja positiva). Por outro lado, a terceira carga deve ser `negativa` pois, se ela fosse positiva, as cargas $+q$ e $+4q$ não poderiam ficar em equilíbrio, pois as forças sobre elas seriam somente repulsivas. Vamos designar a terceira carga por $-Q$, sendo Q maior que zero. Seja x a distância entre $+q$ e $-Q$. Para que a carga $-Q$ esteja em equilíbrio, o módulo da força que $+q$ exerce sobre $-Q$ deve ser igual ao módulo da força que $+4q$ exerce sobre $-Q$. Portanto,

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{qQ}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(4q)Q}{(L-x)^2}$$

ou seja

$$(L-x)^2 = 4x^2.$$

As soluções da equação do segundo grau são $-L$ e $L/3$, sendo que apenas esta última solução é fisicamente aceitável.

Para determinar o módulo de Q, use a condição de equilíbrio duas cargas do sistema. Por exemplo, para que a carga $+q$ esteja em equilíbrio, o módulo da força que $-Q$ exerce sobre $+q$ deve igualar a módulo da força de $+4q$ sobre $+q$:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{qQ}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(4q)q}{L^2}.$$

Dai tiramos que $Q = 4qx^2/L^2$ que, para $x = L/3$, fornece o valor procurado:

$$Q = \frac{4}{9}q.$$

(b) O equilíbrio é instável; esta conclusão pode ser provada analiticamente ou, de modo mais simples, pode ser verificada acompanhando-se o seguinte raciocínio. Um pequeno deslocamento da carga $-Q$ de sua posição de equilíbrio (para a esquerda ou para a direita) produz uma força resultante orientada para esquerda ou para a direita.

P 23-16

(a) Que cargas positivas iguais teriam de ser colocadas na Terra e na Lua para neutralizar a atração gravitacional entre elas? É necessário conhecer a distância entre a Terra e a Lua para resolver este problema? Explique. *(b)* Quantos quilogramas de hidrogênio seriam necessários para fornecer a carga positiva calculada no item *(a)*?

► *(a)* A igualdade das forças envolvidas fornece a seguinte expressão:

$$G\,\frac{M_T M_L}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q^2}{r^2},$$

onde M_T é a massa da Terra e M_L a massa da Lua. Portanto, usando-se as constantes fornecidas no Apêndice C, temos

$$q = \sqrt{G 4\pi\epsilon_0 M_T M_L} = 5.7 \times 10^{13} \text{ C}.$$

Como foi possível eliminar r entre os dois membros da equação inicial, vemos claramente *não ser necessário conhecer-se o valor de r.*

(b) Um átomo de hidrogênio contribui com uma carga positiva de 1.6×10^{-19} C. Portanto, o número N de átomos de hidrogênio necessários para se igualar a carga do item (a) é dado por

$$N = \frac{5.7 \times 10^{13}}{1.6 \times 10^{-19}} = 3.5 \times 10^{32} \text{ C}.$$

Portanto, a massa de hidrogênio necessária é simplesmente $M = N m_H$, onde m_H é a massa de um átomo de hidrogênio (em kilogramas) [veja o valor da *unidade de massa unificada* no Apêndice B, pág. 321]

$$\begin{aligned} M &= (3.5 \times 10^{32})(1.0087)(1.6605 \times 10^{-27}) \\ &= 5.9 \times 10^{5} \text{ Kg}. \end{aligned}$$

P 23-18

Uma carga Q é dividida em duas partes q e $Q - q$, que são, a seguir, afastadas por uma certa distância entre si. Qual deve ser o valor de q em termos de Q, de modo que a repulsão eletrostática entre as duas cargas seja máxima?

► A magnitude da repulsão entre q e $Q - q$ é

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Q-q)q}{r^2}.$$

A condição para que F seja máxima em relação a q é que sejam satisfeitas `simultaneamente` as equações

$$\frac{\partial F}{\partial q} = 0, \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} < 0.$$

A primeira condição produz

$$\frac{\partial F}{\partial q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial q}\{Qq - q^2\} = \frac{Q - 2q}{4\pi\epsilon_0 \, r^2} = 0,$$

cuja solução é $q = Q/2$.
Como a segunda derivada é *sempre* menor que zero, a solução encontrada, $q = Q/2$, produzirá a força máxima.

⊛ Observe que a resposta do problema é $q = Q/2$ e *não* $Q = 2q$.

P 23-19

Duas pequenas esferas condutoras de massa m estão suspensas por um fio de seda de comprimento L e possuem a mesma carga q, conforme é mostrado na figura abaixo. Considerando que o ângulo θ é tão pequeno que $\tan\ \theta$ possa ser substituida por $\text{sen}\ \theta$: *(a)* mostre que para esta aproximação no equilíbrio teremos:

$$x = \left(\frac{q^2 L}{2\pi\epsilon_0 mg}\right)^{1/3},$$

onde x é a distância entre as esferas. *(b)* Sendo $L = 120$ cm, $m = 10$ g e $x = 5.0$ cm, quanto vale q?

► *(a)* Chamando de T a tensão em cada um dos fios e de F o módulo da força eletrostática que atua sobre cada uma das bolas temos, para que haja equilíbrio:

$$\begin{aligned} T \ \text{sen}\,\theta &= F \\ T \ \cos\theta &= mg. \end{aligned}$$

Dividindo membro a membro as duas relações anteriores, encontramos:

$$\tan\ \theta = \frac{F}{mg}.$$

Como θ é um ângulo pequeno, podemos usar a aproximação

$$\frac{F}{mg} = \tan\ \theta \simeq \text{sen}\,\theta = \frac{x/2}{L}.$$

Por outro lado, a força eletrostática de repulsão entre as cargas é dada por

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{x^2}.$$

Igualando-se as duas expressões para F e resolvendo para x, encontramos que

$$x = \left(\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q^2 L}{mg}\right)^{1/3}.$$

(b) As duas cargas possuem o mesmo sinal. Portanto, da expressão acima para x, obtemos

$$\begin{aligned} q = \pm\sqrt{\frac{x^3 \ 2\pi\epsilon_0 \ mg}{L}} &= \pm 2.4 \times 10^{-8} \\ &= \pm 24 \times 10^{-9} \text{ C} \\ &= \pm 24 \text{ nC}. \end{aligned}$$

P 23-20

No problema anterior, cujas esferas são *condutoras (a)* O que acontecerá após uma delas ser descarregada? Explique sua resposta. *(b)* Calcule a nova separação de equilíbrio das bolas.

▶ (a) Quando uma das bolas for descarregada não poderá mais haver repulsão Coulombiana entre as bolas e, consequentemente, as bolas cairão sob ação do campo gravitacional até se tocarem. Ao entrarem em contato, a carga q que estava originalmente numa das bolas irá se repartir igualmente entre ambas bolas que, então, por estarem novamente ambas carregadas, passarão a repelir-se até atingir uma nova separação de equilíbrio, digamos x'.
(b) A nova separação de equilíbrio x' pode ser calculada usando-se $q' = q/2$:

$$\begin{aligned} x' = \Big(\frac{(q')^2 L}{2\pi\epsilon_0 mg}\Big)^{1/3} &= \Big(\frac{1}{4}\Big)^{1/3} \overbrace{\Big(\frac{q^2 L}{2\pi\epsilon_0 mg}\Big)^{1/3}}^{\equiv x=5 \text{ cm}} \\ &= \Big(\frac{1}{4}\Big)^{1/3} \times 0.05 \text{ m} \\ &= 3.1 \times 10^{-2} \text{ m} \\ &= 3.1 \text{ cm}. \end{aligned}$$

⊛ É possível determinar o valor da tensão no fio de seda?

P 23-21

A Fig. 23-17 mostra uma longa barra não condutora, de massa desprezível e comprimento L, presa por um pino no seu centro e equilibrada com um peso W a uma distância x de sua extremidade esquerda. Nas extremidades esquerda e direita da barra são colocadas pequenas esferas condutoras com cargas positivas q e $2q$, respectivamente. A uma distância h diretamente abaixo de cada uma dessas cargas está fixada uma esfera com uma carga positiva Q. *(a)* Determine a distância x quando a barra está horizontal e equilibrada. *(b)* Qual valor deveria ter h para que a barra não exercesse nenhuma força sobre o mancal na situação horizontal e equilibrada?

▶ (a) Como a barra esta em equilíbrio, a força líquida sobre ela é zero e o torque em relação a qualquer ponto também é zero. Para resolver o problema, vamos escrever a expressão para o torque líquido no mancal, igualala a zero e resolver para x.
A carga Q à esquerda exerce uma força para cima de magnitude $(1/[4\pi\varepsilon_0])(qQ/h^2)$, localizada a uma distância $L/2$ do mancal. Considere seu torque como sendo, por exemplo, positivo. O peso exerce uma força para baixo de magnitude W, a uma distância $x - L/2$ a partir do mancal. Pela convenção acima, seu torque também é positivo. A carga Q à direita exerce uma força para cima de magnitude $(1/[4\pi\varepsilon_0])(2qQ/h^2)$, a uma distância $L/2$ do mancal. Seu torque é negativo.
Para que não haja rotação, os torque sacima devem anular-se, ou seja

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{h^2}\frac{L}{2} + W\Big(x - \frac{L}{2}\Big) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qQ}{h^2}\frac{L}{2} = 0.$$

Portanto, resolvendo-se para x, obtemos

$$x = \frac{L}{2}\Big(1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{Wh^2}\Big).$$

(b) A força líquida na barra anula-se. Denotando-se por N a magnitude da força para cima exercida pelo mancal, então

$$W - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{h^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qQ}{h^2} = 0.$$

Quando a barra não exerçe nenhuma força, temos $N = 0$. Neste caso, a expressão acima, fornece-nos facilmente que

$$h = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3qQ}{W}}.$$

⊛ Observe que é essencial usar sempre um valor positivo para o braço de alavanca, para não se inverter o sentido do torque. Neste problema, o braço de alavanca positivo é $x - L/2$, e não $L/2 - x$!

23.2.2 A Carga é Quantizada

E 23-24

Qual é a carga total em Coulombs de 75 kg de elétrons?

▶ A massa do elétron é $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg de maneira que a quantidade de elétrons em $M = 75$ kg é

$$N = \frac{M}{m} = \frac{75}{9.11 \times 10^{-31}} = 8.23 \times 10^{31} \text{ elétrons.}$$

Portanto, a carga total é

$$\begin{aligned} q = -N\,e &= -(8.23 \times 10^{31})(1.60 \times 10^{-19}) \\ &= -1.32 \times 10^{13} \text{ C.} \end{aligned}$$

E 23-26

O módulo da força eletrostática entre dois íons idênticos que estão separados por uma distância de 5.0×10^{-10} m vale 3.7×10^{-9} N. *(a)* Qual a carga de cada íon? *(b)* Quantos elétrons estão "faltando" em cada íon (o que dá ao íon sua carga não equilibrada)?

▶ *(a)* Da Lei de Coulomb temos:

$$q = r\,\sqrt{(4\pi\epsilon_0)F} = \pm\, 3.2 \times 10^{-19} \text{ C}.$$

(b) Cada elétron faltante produz uma carga positiva de 1.6×10^{-19} C. Usando a Eq. 23-10, $q = ne$, encontramos o seguinte número n de elétrons que faltam:

$$n = \frac{3.2 \times 10^{-19}}{1.6 \times 10^{-19}} = 2 \text{ elétrons}.$$

E 23-27

Duas pequenas gotas esféricas de água possuem cargas idênticas de -1.0×10^{-16} C, e estão separadas, centro a centro, de 1.0 cm. *(a)* Qual é o módulo da força eletrostática que atua entre elas? *(b)* Quantos elétrons em excesso existem em cada gota, dando a ela a sua carga não equilibrada?

▶ (a) Aplicando diretamente a lei de Coulomb encontramos, em magnitude,

$$\begin{aligned} F &= \frac{(9 \times 10^9)(1 \times 10^{-16})}{(1 \times 10^{-2})^2} \\ &= 9 \times 10^{-19} \text{ N}. \end{aligned}$$

(b)A quantidade N de elétrons em excesso em cada gota é

$$N = \frac{-q}{e} = \frac{1.0 \times 10^{-16}}{1.60 \times 10^{-19}} = 625.$$

P 23-31

Pelo filamento de uma lâmpada de 100 W, operando em um circuito de 120 V, passa uma corrente (suposta constante) de 0.83 A. Quanto tempo é necessário para que 1 mol de elétrons passe pela lâmpada?

▶ De acordo com a Eq. 23-3, a corrente constante que passa pela lâmpada é $i = \Delta q/\Delta t$, onde Δq é a quantidade de carga que passa através da lâmpada num intervalo Δt.

A carga Δq correspondente a 1 mol de elétrons nada mais é do que $\Delta q = N_A\, e$, onde $N_A = 6.023 \times 10^{23}$ é o número de Avogadro. Portanto

$$\begin{aligned} \Delta t = \frac{N_A\, e}{i} &= \frac{(6.023 \times 10^{23})(1.60 \times 10^{-19})}{0.83} \\ &= 1.2 \times 10^5 \text{ segundos} \\ &= \frac{1.2 \times 10^5}{24 \times 60 \times 60} = 1.38 \text{ dias}. \end{aligned}$$

P 23-34

Na estrtura cristalina do composto $CsCl$ (cloreto de césio), os íons Cs^+ formam os vértices de um cubo e um íon de Cl^- está no centro do cubo (Fig. 23-18). O comprimento das arestas do cubo é de 0.40 nm. Em cada íon Cs^+ falta um elétron (e assim cada um tem uma carga de $+e$), e o íon Cl^- tem um elétron em excesso (e assim uma carga $-e$). *(a)* Qual é o módulo da força eletrostática líquida exercida sobre o íon Cl^- pelos oito íons Cs^+ nos vértices do cubo? *(b)* Quando está faltando um dos íons Cs^+, dizemos que o cristal apresenta um *defeito*; neste caso, qual será a força eletrostática líquida exercida sobre o íon Cl^- pelos sete íons Cs^+ remanescentes?

▶ (a) A força líquida sobre o íon Cl^- é claramente zero pois as forças individuais atrativas exercidas por cada um dos íons de Cs^+ cancelam-se aos pares, por estarem dispostas simetricamente (diametralmente opostas) em relação ao centro do cubo.

(b) Em vez de remover um íon de césio, podemos podemos superpor uma carga $-e$ na posição de tal íon. Isto neutraliza o íon local e, para efeitos eletrostáticos, é equivalente a remover o íon original. Deste modo vemos que a única força não balanceada passa a ser a força exercida pela carga adicionada.

Chamando de a a aresta do cubo, temos que a diagonal do cubo é dada por $\sqrt{3}\ a$. Portanto a distância entre os íons é $d = \sqrt{3}/2)\ a$ e a magnitude da força

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{(3/4)a} \\ &= (9 \times 10^9)\,\frac{(1.60 \times 10^{-19})^2}{(3/4)(0.40 \times 10^{-9})} \\ &= 1.9 \times 10^{-9} \text{ N}. \end{aligned}$$

P 23-35 Sabemos que, dentro das limitações impostas pelas medidas, os módulos da carga negativa do elétron e da carga positiva do próton são iguais. Suponha, entretanto, que estes módulos diferissem entre sí por 0.00010%. Com que força duas pequenas moedas de cobre, colocadas a 1.0 m uma da outra, se repeliriam? O que podemos concluir? (*Sugestão*: Veja o Exemplo 23-3.)

▶ Como sugerido no problema, supomos que a moeda é a mesma do exemplo 23-3, que possui uma carga tanto positiva quanto negativa igual dada por $q = 1.37 \times 10^5$ C. Se houvesse uma diferença (desequilíbrio) de cargas, uma das cargas seria maior do que a outra, teríamos para tal carga um valor

$$q_m = \eta q = (10^{-4})(10^{-2})(1.37 \times 10^5) = 0.137,$$

onde $\eta = 0.0001\% = 0.0001 \times 0.01 = 10^{-6}$. Portanto a magnitude da força entre as moedas seria igual a

$$\begin{aligned} F &= \frac{q_m^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ &= \frac{(8.99 \times 10^9)(0.137)^2}{(1.0)^2} \\ &= 1.7 \times 10^8 \text{ N.} \end{aligned}$$

Como tal força seria facilmente observável, concluimos que uma eventual diferença entre a magnitude das cargas positiva e negativa na moeda somente poderia ocorrer com um percentual bem menor que 0.0001%.
Note que sabendo-se o valor da menor força possível de se medir no laboratório é possivel estabelecer qual o limite percentual máximo de *erro* que temos hoje em dia na determinação das cargas. De qualquer modo, tal limite é MUITO pequeno, ou seja, uma eventual assimetria entre o valor das cargas parece não existir na prática, pois teria conseqüências observáveis, devido ao grande número de cargas presente nos corpos macroscópicos (que estão em equilíbrio).

23.2.3 A Carga é Conservada

E 23-37

No *decaimento beta* uma partícula fundamental se transforma em outra partícula, emitindo ou um elétron ou um pósitron. *(a)* Quando um próton sofre decaimento beta transformando-se num nêutron, que partícula é emitida? *(b)* Quando um nêutron sofre decaimento beta transformando-se num próton, qual das partículas é emitida?

▶ (a) Como existe conservação de carga no decaimento, a partícula emitida precisa ser um pósitron.
(b) Analogamente, a partícula emitida é um elétron.

⊛ As reações *completas* de decaimento beta aqui mencionados são, na verdade, as seguintes:

$$p \to n + e^+ + \nu, \qquad\qquad n \to p + e^- + \nu,$$

onde ν representa uma partícula elementar chamada *neutrino*. Interessados, podem ler mais sobre Decaimento Beta na Secção 47-5 do livro texto.

E 23-38

Usando o Apêndice D, identifique X nas seguintes reações nucleares:

$$\begin{array}{lrcl} (a) & {}^1H + {}^1Be & \to & X + n; \\ (b) & {}^{12}C + {}^1H & \to & X; \\ (c) & {}^{15}N + {}^1H & \to & {}^4He + X. \end{array}$$

▶ Como nenhuma das reações acima inclui decaimento beta, a quantidade de prótons, de neutrons e de elétrons é conservada. Os números atômicos (prótons e de elétrons) e as massas molares (prótons + nêutrons) estão no Apêndice D.

(a) ^{1}H tem 1 próton, 1 elétron e 0 nêutrons enquanto que o ^{9}Be tem 4 prótons, 4 elétrons e $9 - 4 = 5$ nêutrons. Portanto X tem $1 + 4 = 5$ prótons, $1 + 4$ elétrons e $0 + 5 - 1 = 4$ nêutrons. Um dos nêutrons é liberado na reação. Assim sendo, X deve ser o boro, ^{9}B, com massa molar igual a $5 + 4 = 9$ g/mol.

(b) ^{12}C tem 6 prótons, 6 elétrons e $12 - 6 = 6$ nêutrons enquanto que o ^{1}H tem 1 próton, 1 elétron e 0 nêutrons. Portanto X tem $6 + 1 = 7$ prótons, $6 + 1 = 7$ elétrons e $6 + 0 = 6$ nêutrons e, consequentemente, deve ser o nitrogênio, ^{13}N, que tem massa molar $7+6 = 13$ g/mol.

(c) ^{15}N tem 7 prótons, 7 elétrons e $15 - 7 = 8$ nêutrons, o ^{1}H tem 1 próton, 1 elétron e 0 nêutrons e o ^{4}He tem 2 prótons, 2 elétrons e $4 - 2 = 2$ nêutrons. Portanto X tem $7 + 1 - 2 = 6$ prótons, 6 elétrons e $8 + 0 - 2 = 6$ nêutrons, devendo ser o carbono, ^{12}C, com massa molar de $6 + 6 = 12$ g/mol.

23.2.4 As Constantes da Física: Um Aparte

E 23-41

(a) Combine as quantidades h, G e c para formar uma grandeza com dimensão de comprimento. (*Sugestão*: combine o “tempo de Planck” com a velocidade da luz, conforme Exemplo 23-7.) *(b)* Calcule este “comprimento de Planck” numéricamente.

► (a) Usando-se o Apêndice A, fica fácil ver que as três contantes dadas tem as seguintes dimensões:

$$[\hbar] = \left[\frac{h}{2\pi}\right] = J\ s = N\ m\ s = \frac{\text{kg}\ m^2}{s}$$
$$[G] = \frac{m^3}{s^2\ \text{kg}},$$
$$[c] = \frac{m}{s}.$$

Portanto, o produto $[\hbar][G]$ não contém kg:

$$[\hbar]\ [G] = \frac{m^5}{s^3}.$$

Através de divisão do produto acima por uma potência apropriada de $[c]$ podemos obter eliminar facilmente ou m ou s do produto, ou seja,

$$\frac{[\hbar][G]}{[c]^5} = \frac{m^5}{s^3}\ \frac{s^5}{m^5} = s^2,$$
$$\frac{[\hbar][G]}{[c]^3} = \frac{m^5}{s^3}\ \frac{s^3}{m^3} = m^2.$$

Portanto $\ell_{\text{Planck}} = \sqrt{\hbar G/c^3}$.
(b) O valor numérico pedido é, uma vez que $\hbar = h/(2\pi)$,

$$\ell_{\text{Planck}} = \sqrt{\frac{hG}{2\pi c^3}} = 1.61 \times 10^{-35}\ \text{m}.$$

P 23-42

(a) Combine as grandezas h, G e c para formar uma grandeza com dimensão de massa. Não inclua nenhum fator adimensional. (*Sugestão*: Considere as unidades h, G e c como é mostrado no Exemplo 23-7.) *(b)* Calcule esta "massa de Planck" numericamente.

► A resposta pode ser encontrada fazendo-se uma análise dimensional das constantes dadas e de funções simples obtidas a partir delas:

$$m_{\text{Planck}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$$
$$= \sqrt{\frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{2\pi\ 6.67 \times 10^{-11}}}$$
$$= 2.17 \times 10^{-8}\ \text{kg}.$$

Pode-se *verificar* que esta resposta está correta fazendo-se agora o 'inverso' da análise dimensional que foi usada para estabelece-la, usando-se o conveniente resumo dado no Apêndice A:

$$\frac{[\hbar][c]}{[G]} = \frac{J\ s\ \frac{m}{s}}{\frac{m^3}{s^2\ \text{kg}}} = J\ \frac{s^2\ \text{kg}}{m^2} = Nm\ \frac{s^2\ \text{kg}}{m^2}$$
$$= \text{kg}\frac{m^2}{s^2}\ \frac{s^2\ \text{kg}}{m^2} = \text{kg}^2.$$

Portanto, extraindo-se a raiz quadrada deste radicando vemos que, realmente, a combinação das constantes acima tem dimensão de massa.

⊛ E se usassemos h em vez de $\hbar$?... Em outras palavras, qual das duas constantes devemos tomar?