Exercícios Resolvidos de Teoria Eletromagnética

Jason Alfredo Carlson Gallas, professor titular de física teórica,

Doutor em Física pela Universidade Ludwig Maximilian de Munique, Alemanha

Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul
91501-970 Porto Alegre, BRASIL

Matéria para a QUARTA prova. Numeração conforme a **quarta** edição do livro "Fundamentos de Física", Halliday, Resnick e Walker.

Esta e outras listas encontram-se em: *http://www.if.ufrgs.br/∼jgallas*

Conteúdo

Comentários/Sugestões e Erros: favor enviar para jgallas @ if.ufrgs.br
(lista4.tex)

33 Indutância

33.1 Questões

Q 33-2.

Quando o fluxo magnético que atravessa cada espira de uma bobina é o mesmo, a indutância da bobina pode ser calculada por $L = N\Phi_B/i$ (Eq. 33-2). Como poderíamos calcular L de uma bobina para a qual tal hipótese não é válida?

▶ Basta computar a fem para cada uma das espiras, soma-las, e depois usar $\mathcal{E} = -L\, di/dt$ para obter o valor de L.

Q 33-4.

Desejamos enrolar uma bobina de modo que ela tenha resistência mas essencialmente nenhuma indutância. Como fazer isto?

▶ Uma maneira de fazer é enrolar o fio que compõe a bobina em duas camadas, de modo que a corrente passe nelas em sentidos contrários. Deste modo a indutância tenderá para zero.

33.2 Problemas e Exercícios

33.2.1 Indutância – (1/8)

E 33-1.

A indutância de uma bobina compacta de 400 espiras vale 8 mH. Calcule o fluxo magnético através da bobina quando a corrente é de 5 mA.

▶ Como $N\Phi = Li$, onde N é o número de espiras, L é a indutância e i a corrente, temos

$$\begin{aligned}\Phi = \frac{Li}{N} &= \frac{(8\times 10^{-3}\text{ H})(5\times 10^{-3}\text{ A})}{400}\\ &= 1\times 10^{-7}\text{ Wb.}\end{aligned}$$

E 33-2.

Uma bobina circular tem um raio de 10 cm e é formada por 30 espiras de arame enroladas muito próximas. Um campo magnético externo de 2.60 mT é perpendicular à bobina. **(a)** Não havendo corrente na bobina, qual é o fluxo através dela? **(b)** Quando a corrente na bobina é de 3.8 A, num certo sentido, o fluxo líquido através da bobina é nulo. Qual é a indutância da bobina?

▶ **(a)**

$$\begin{aligned}\Phi_B = NBA &= NB(\pi r^2)\\ &= (30)(2.6\times 10^{-3})(\pi)(10\times 10^{-2})^2\\ &= 2.45\times 10^{-3}\text{ Wb.}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}L = \frac{\Phi_B}{i} &= \frac{2.45\times 10^{-3}}{3.80}\\ &= 6.45\times 10^{-4}\text{ H/m.}\end{aligned}$$

Preste atenção nas *unidades* envolvidas.

E 33-3.

Um solenóide é enrolado com uma única camada de fio de cobre isolado (diâmetro $=2.5$ mm). Ele tem 4 cm de diâmetro e um comprimento de 2 m. **(a)** Quantas espiras possui o solenóide? **(b)** Qual é a indutância por metro de comprimento, na região central do solenóide? Suponha que as espiras adjacentes se toquem e que a espessura do isolamento seja desprezível.

▶ **(a)** O número N de espiras multiplicado pelo diâmetro de cada espira deve ser igual ao comprimento do solenóide. Portanto, temos

$$N = \frac{\ell}{d_{\text{fio}}} = \frac{2}{2.5\times 10^{-3}} = 800 \text{ espiras.}$$

(b) $N\ \Phi_B = N\ B\ A = (n\ell)(\mu_0\, n\, i)(A) = L\, i$. Portanto, simplificando a corrente, segue

$$\begin{aligned}\frac{L}{\ell} = \mu_0 n^2 A &= (4\pi\times 10^{-7})\Big(\frac{800}{2}\Big)^2\ \pi\ (0.02)^2\\ &= 2.53\times 10^{-4}\text{ H/m.}\end{aligned}$$

P 33-4.

Um solenóide longo e estreito, pode ser curvado de modo a formar um toróide. Mostre que, para um solenóide suficientemente longo e estreito, a equação que dá a indutância do toróide (Eq. 33-7) assim formado é equivalente à de um solenóide (Eq. 33-4) com um comprimento apropriado.

▶ Para um solenóide muito comprido, com o qual desejamos construir um toróide, escrevemos a indutância em função do número total de espiras, N, e não de

$n = N/\ell$, a densidade de espiras por unidade de comprimento. As expressões da indutância para um solenóide e um toróide são, respectivamente,

$$L_S = \mu_0 n^2 \ell A = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} A,$$
$$L_T = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\Big(\frac{b}{a}\Big).$$

Para poder comparar estas fórmulas, expandimos o logarítmo que aparece em L_T. Para que isto seja possível assumimos que o toróide tenha dimensões suficientemente grandes tais que $x = b/a \simeq 1$, ou seja, tal que $b \simeq a$. Calculando (ou simplesmente olhando numa Tabela qualquer), vemos que para um valor arbitrário $x \geq 1/2$ o logarítmo pode ser representado pela seguinte série de potências:

$$\ln x = \Big(\frac{x-1}{x}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{x-1}{x}\Big)^2 + \frac{1}{3}\Big(\frac{x-1}{x}\Big)^3 + \cdots$$

Considerando apenas o primeiro termo na série acima, segue, para $x = b/a$:

$$\ln x \simeq \frac{x-1}{x} = \frac{b/a - 1}{b/a} = \frac{b-a}{b},$$

de modo que

$$L_T \simeq \frac{\mu_0 N^2 h (b-a)}{2\pi b}.$$

Observando agora que $h(b-a) = A$ e que $2\pi b \simeq \ell$ obtemos, nestas condições, que, realmente,

$$L_S \simeq L_T.$$

Como para um toróide sempre temos $b > a$, da expansão do logarítmo acima vemos que a aproximação feita é bastante boa.

P 33-5.

Indutores em série. Dois indutores L_1 e L_2 estão ligados em série e separados por uma distância grande. **(a)** Mostre que a indutância equivalente é dada por $L_{\text{eq}} = L_1 + L_2$. **(b)** Por que a separação entre os indutores tem de ser grande para que a relação acima seja válida? **(c)** Qual é a generalização do item (a) para N indutores em série?

▶ **(a)** Nas condições discutidas abaixo, no item (b), a conservação da energia requer que a queda de tensão $\mathcal{E}$, ao atravessarmos os dois indutores, seja igual à soma das quedas ao atravessarmos cada indutor separadamente:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2.$$

Como a corrente que atravessa os três indutores em questão é exatamente a mesma, da definição de indutância, podemos escrever

$$\mathcal{E} = -L_{\text{eq}}\frac{di}{dt}, \qquad \mathcal{E}_1 = -L_1\frac{di}{dt}, \qquad \mathcal{E}_2 = -L_2\frac{di}{dt}.$$

Substituindo estes valores na equação acima e simplificando obtemos

$$L_{\text{eq}} = L_1 + L_2.$$

(b) A expressão acima será válida sempre que o fenômeno de *indução mútua* puder ser desprezado. Para tanto é preciso que L_1 e L_2 estejam bem afastados, como requerido pelo problema. O caso em que a indutância mútua não pode ser desprezada é tratado explicitamente no Problema 33-49, adiante.

(c) Quando tivermos N indutores em série (e *sem* a presença de indução mútua!), vemos facilmente que $\mathcal{E} = \sum_{k=1}^N \mathcal{E}_k$ e, conseqüentemente, que $L_{\text{eq}} = \sum_{k=1}^N L_k$.

P 33-6.

Indutores em paralelo. Dois indutores L_1 e L_2 estão ligados em paralelo e separados por uma distância grande. **(a)** Mostre que a indutância equivalente é dada por

$$\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}.$$

(b) Por que a separação entre os indutores tem de ser grande para que a relação acima seja válida? **(c)** Qual a generalização do item (a) para N indutores separados?

▶ Este problema é análogo e sua resposta tem a mesma fundamentação teórica do Problema 33-5.

(a) Da definição de ligação em paralelo vemos que agora vale $i = i_1 + i_2$, sendo que a queda de tensão nos três componentes em questão é a mesma, $\mathcal{E}$. Portanto

$$\mathcal{E} = -L_{\text{eq}}\frac{di}{dt}, \quad \mathcal{E} = -L_1\frac{di_1}{dt}, \quad \mathcal{E} = -L_2\frac{di_2}{dt}.$$

Substituindo estes valores na relação

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt},$$

obtida derivando-se $i = i_1 + i_2$, segue facilmente que

$$\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}.$$

(b) A justificativa é idêntica à do item (b) do Problema 33-5.
(c) Para N indutores em paralelo, extendendo o cálculo feito no item (a) acima, obtemos

$$\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{L_k}.$$

P 33-7.

Uma tira larga de cobre (largura W) é curvada formando um tubo de raio R com duas extensões planas, como mostra a Fig. 33-14. Uma corrente i flui através da tira, distribuida uniformemente sobre sua largura. Fez-se, deste modo, um "solenóide de uma única espira". **(a)** Deduza uma expressão para o módulo do campo magnético $\mathbf{B}$ na parte tubular (longe das bordas). (Sugestão: Suponha que o campo magnético fora deste solenóide de uma única espira seja desprezível.) **(b)** Determine a indutância deste solenóide de uma única espira, desprezando as duas extensões planas.

▶ **(a)** Aplicando-se a lei de Ampère à parte tubular, tal como feito no caso do solenóide, produz

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B\,W = \mu_0\, i,$$

donde tiramos

$$B = \frac{\mu_0\, i}{W}.$$

(b) O fluxo é

$$\Phi_B = B\,A = \frac{\mu_0\, i}{W} \pi R^2.$$

Sabemos que $N\Phi_B = L\,i$. Como temos uma única espira, $N = 1$, e, portanto,

$$N\,\Phi_B = \frac{\mu_0\, i}{W} \pi R^2 = L\,i$$

o que implica que

$$L = \frac{\mu_0 \pi R^2}{W}.$$

▶ **(a)** Observe que podemos considerar o tubo como "composto" por N espiras, cada uma transportando uma corrente $\Delta i = i/N$. Neste caso, estaremos tratando de um solenóide para o qual a densidade de espiras por unidade de comprimento é $n = N/W$. Assim sendo, usando a Eq. 31-12, pág. 194, para o solenóide ideal, encontramos, notando que $i_0 \equiv \Delta i$,

$$B = \mu_0 i_0 n = \mu_0 \Big(\frac{i}{N}\Big)\Big(\frac{N}{W}\Big) = \frac{\mu_0 i}{W},$$

que coincide com o valor acima.

P 33-8.

Dois fios longos e paralelos, cada um com raio a, cujos centros estão separados por uma distância d, são percorridos por correntes iguais mas em sentidos opostos. Mostre que, desprezando o fluxo dentro dos próprios fios, a indutância para um comprimento ℓ deste par de fios é dada por:

$$L = \frac{\mu_0 \ell}{\pi}\, \ln \frac{d-a}{a}.$$

Veja o Exemplo 31-3, pag. 188. (*Sugestão*: calcule o fluxo através de um retângulo que tem os fios como lados).

▶ A área de integração para o cálculo do fluxo magnético é limitada pelas duas linhas tracejadas na Figura abaixo e pelas bordas do fio.

Se a origem for escolhida como estando sobre o eixo do fio à direita e r medir a distância a partir deste eixo, a integração se estenderá desde $r = a$ até $r = d - a$. Considere primeiramente o fio à direita. Na região de integração o campo que ele produz *entra* na página e tem magnitude $B = \mu_0 i/2\pi r$. Divida a região em tirinhas de comprimento ℓ e largura dr, como indicado. O fluxo através da tirinha a uma distância r do eixo do fio é $d\Phi = B\ell dr$ e o fluxo através da região toda é

$$\Phi = \frac{\mu_0 i\ell}{2\pi} \int_a^{d-a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i\ell}{2\pi}\, \ln\Big(\frac{d-a}{a}\Big).$$

O outro fio produz o mesmo resultado, de modo que o fluxo total através do retângulo tracejado é

$$\Phi_{\text{Total}} = 2\Phi = \frac{\mu_0 i\ell}{\pi}\, \ln\Big(\frac{d-a}{a}\Big).$$

Portanto, temos para a indutância total

$$L = \frac{\Phi_{\text{Total}}}{i} = \frac{\mu_0 \ell}{\pi}\, \ln\Big(\frac{d-a}{a}\Big).$$

▶ A indutância L também pode ser encontrada combinando-se a lei da indução de Faraday e a Eq. 33-11, de modo que

$$-L\frac{di}{dt} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

O fluxo é calculado pela seguinte integral:

$$\Phi_B = \int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A}.$$

A área de integração para o fluxo é a área de uma espira formada por dois fios imaginários adicionados para conectar os dois fios dados, fechando o circuito. O comprimento dos novos fios é muito pequeno comparado com o comprimento dos fios iniciais; assim, podemos ignorar a contribuição daqueles. Então, o campo magnético B é a soma dos dois campos magnéticos dos fios iniciais. Note que os dois campos possuem o mesmo sentido (para dentro da página) e, portanto, segundo a Lei de Ampère (Eq. 17 do Cap. 31, pag. 191), temos:

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} + \frac{\mu_0 i}{2\pi(d-r)}.$$

$B(r)$ não varia na direção paralela aos fios e, portanto, para dA utilizamos um retângulo muito estreito de comprimento ℓ e largura dr; escolhendo o sentido de dA para dentro da página (o mesmo sentido de B), temos:

$$\begin{aligned}\Phi_B &= \int B(r)\ \ell dr \cos 0^0 \\ &= \frac{\mu_0 i\ell}{2\pi}\int\Big[\frac{1}{r}+\frac{1}{d-r}\Big]dr \\ &= \frac{\mu_0 i\ell}{\pi}\ \ln\Big(\frac{d-a}{a}\Big).\end{aligned}$$

Donde se conclui que

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\mu_0\ell}{\pi}\ \frac{di}{dt}\ \ln\Big(\frac{d-a}{a}\Big) = L\frac{di}{dt}.$$

Portanto, sem levar em consideração o fluxo dentro do fio, encontramos:

$$L = \frac{\mu_0\ell}{\pi}\ln\Big(\frac{d-a}{a}\Big).$$

33.2.2 Auto-Indução – (9/13)

E 33-9. Num dado instante, a corrente e a fem induzida num indutor têm os sentidos indicados na Fig. 33-15. **(a)** A corrente está crescendo ou decrescendo? **(b)** A fem vale 17 V e a taxa de variação da corrente é 25 kA/s; qual é o valor da indutância?

▶ **(a)** Como $\mathcal{E}$ aumenta i, a corrente i deve estar decrescendo.
(b) De $\mathcal{E} = Ldi/dt$ obtemos

$$L = \frac{\mathcal{E}}{di/dt} = \frac{17}{2.5\times 10^3} = 6.8\times 10^{-4}\ \text{H}.$$

E 33-10.

Um indutor de 12 H transporta uma corrente constante de 2 A. De que modo podemos gerar uma fem auto-induzida de 60 V no indutor?

▶ Como $\mathcal{E} = -L(di/dt)$, basta fazer com que a corrente varie a uma taxa de

$$\frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} = \frac{60\ \text{V}}{12\ \text{H}} = 5\ \text{A/s}.$$

E 33-11.

Um solenóide cilíndrico longo com 100 espiras/cm tem um raio de 1.6 cm. Suponha que o campo magnético que ele produz seja paralelo ao eixo do solenóide e uniforme em seu interior. **(a)** Qual é a sua indutância por metro de comprimento? **(b)** Se a corrente variar a uma taxa de 13 A/s, qual será a fem induzida por metro?

▶ **(a)** O "difícil" aqui é converter corretamente o número de espiras:

$$\begin{aligned} n = 100\ \text{espiras/cm} &= 100\ \text{espiras}/(10^{-2}\ \text{m}) \\ &= 10^4\ \text{espiras/m}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{L}{\ell} = \mu_0 n^2 A &= (4\pi\times 10^{-7})(10^4)^2\pi(0.016)^2 \\ &= 0.1\ \text{H/m}.\end{aligned}$$

(b) Desprezando o sinal, temos

$$\frac{\mathcal{E}}{\ell} = \frac{L}{\ell}\frac{di}{dt} = 0.1\ \text{H/m}\times 13\ \text{A/s} = 1.3\ \text{V/m}.$$

E 33-12.

A indutância de uma bobina compacta é tal que uma fem de 3 mV é induzida quando a corrente varia a uma taxa de 5 A/s. Uma corrente constante de 8 A produz um fluxo magnético de 40 μWb através de cada espira. **(a)** Calcule a indutância da bobina. **(b)** Quantas espiras tem a bobina?

▶ **(a)** A menos do sinal, temos

$$L = \frac{\mathcal{E}}{di/dt} = \frac{3\times 10^{-3}\text{ V}}{5\text{ A/s}} = 6\times 10^{-4}\text{ H}.$$

(b) Da definição do fluxo concatenado obtemos

$$N = \frac{L\,i}{\Phi_B} = \frac{(6\times 10^{-4}\text{ H})(8\text{ A})}{40\times 10^{-6}\text{ Wb}} = 120\text{ espiras}.$$

P 33-13.

A corrente i que percorre um indutor de 4.6 H varia com o tempo t conforme é mostrado no gráfico da Fig. 33-16. A resistência do indutor vale 12 Ω. Determine a fem induzida $\mathcal{E}$ durante os intervalos de tempo **(a)** de $t = 0$ até $t = 2$ ms; **(b)** de $t = 2$ até $t = 5$ ms; **(c)** de $t = 5$ até $t = 6$ ms. (Ignore o comportamento nas extremidades dos intervalos.)

▶ Use $\mathcal{E} = L di/dt$ extraindo di/dt do gráfico dado. Aqui, perceba que as diferenças devem sempre ser tomadas entre o *valor final* menos o *valor inicial* para que o sinal da inclinação esteja correto.
(a) Para $0 < t < 2$ ms:

$$\mathcal{E} = L\frac{\Delta i}{\Delta t} = 4.6\ \frac{7.0 - 0.0}{(2.0 - 0.0)\times 10^{-3}} = 1.6\times 10^4\text{ V}.$$

(b) Para 2 ms $< t <$ 5 ms:

$$\mathcal{E} = L\frac{\Delta i}{\Delta t} = 4.6\ \frac{5.0 - 7.0}{(5.0 - 2.0)\times 10^{-3}} = -3.1\times 10^3\text{ V}.$$

(c) Para 5 ms $< t <$ 6 ms:

$$\mathcal{E} = L\frac{\Delta i}{\Delta t} = 4.6\ \frac{0.0 - 5.0}{(6.0 - 5.0)\times 10^{-3}} = -2.3\times 10^4\text{ V}.$$

Observe que o sinal das tensões reproduz a inclinação das curvas no gráfico dado, apesar de estarmos aqui ignorando o sinal negativo da fem induzida.

E 33-14.

A corrente num circuito RL atinge um terço de seu valor de equilíbrio em 5 segundos. Calcule a constante indutiva de tempo.

▶ Nesta situação de carga, a corrente no circuito é determinada pela equação

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\Big(1 - e^{-Rt/L}\Big).$$

O valor de equilíbrio, $\mathcal{E}/R$, "é atingido" em $t = \infty$. Conseqüentemente, a equação que fornece a resposta do problema é

$$\frac{1}{3}\frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R}\Big(1 - e^{-5R/L}\Big),$$

ou seja,

$$-\frac{5R}{L} = \ln\Big(1 - \frac{1}{3}\Big) = -0.4055.$$

Portanto,

$$\tau_L \equiv \frac{L}{R} = \frac{5}{0.4055} = 12.33\text{ s}.$$

33.2.3 Circuitos RL – (14/28)

E 33-15.

Em termos da *constante de tempo* τ_L, quanto tempo devemos esperar para que a corrente num circuito RL cresça ficando a 0.1% do seu valor de equilíbrio?

▶ Usando a Eq. 33-18, obtemos:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}\Big(1 - e^{-t/\tau_L}\Big).$$

Desejamos determinar o valor de t para o qual $i = 0.999\,\mathcal{E}/R$. Isto significa

$$\Big(1 - \frac{0.1}{100}\Big)\,\frac{\mathcal{E}}{R} = 0.999\,\frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R}\Big(1 - e^{-t/\tau_L}\Big),$$

isto é

$$0.999 = 1 - e^{-t/\tau_L}$$

ou seja

$$e^{-t/\tau_L} = 0.001.$$

Calculando o logarítmo natural obtemos

$$-\frac{t}{\tau_L} = \ln(0.001) = -6.908,$$

ou seja, $t = 6.908\tau_L$, que é a resposta procurada.

E 33-16.

A corrente num circuito RL cai de 1 A para 10 mA no primeiro segundo após a remoção da bateria do circuito. Sendo $L = 10$ H, calcule a resistência R do circuito.

▶ A corrente no circuito é dada por

$$i(t) = i_0 e^{-t/\tau_L},$$

onde i_0 é a corrente (no instante $t=0$) e τ_L $(=L/R)$ é a constante de tempo indutiva. Desta equação obtemos

$$\begin{aligned}\tau_L &= -\frac{t}{\ln[i/i_0]}\\ &= -\frac{1\text{s}}{\ln[(10\times 10^{-3}\text{ A})/(1\text{ A})]} = 0.217\text{ s.}\end{aligned}$$

Portanto $R = L/\tau_L = (10\text{ H})/(0.217\text{ s}) = 46\Omega$.

E 33-17.

Quanto tempo, após a remoção da bateria, a diferença de potencial através do resistor num circuito RL (com $L=2$ H, $R=3$ Ω) decai a 10% de seu valor inicial?

▶ A corrente durante a descarga é controlada pela equação $i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-Rt/L}$, sendo que, como sempre, a diferença de potencial é dada por $v_R(t) = R\,i(t)$. Portanto, o problema consiste em determinar-se o onstante t que satisfaz a condição

$$0.1\, v_R(0) = v_R(t),$$

ou seja $0.1\,\mathcal{E} = \mathcal{E}e^{-3t/2}$, de onde tiramos

$$\begin{aligned}\ln 0.1 &= -3t/2\\ t &= 1.54\text{ s.}\end{aligned}$$

E 33-19.

Um solenóide de indutância igual a 6.3 μH está ligado em série a um resistor de 1.2 kΩ. **(a)** Ligando-se uma bateria de 14 V a esse par, quanto tempo levará para que a corrente através do resistor atinja 80% de seu valor final? **(b)** Qual é a corrente através do resistor no instante $t=\tau_L$?

▶ **(a)** Se a bateria for ligada ao circuito no instante $t=0$, a corrente num instante t posterior é dada por

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}\Big(1-e^{-t/\tau_L}\Big),$$

onde $\tau_L = L/R$. O problema pede para achar o instante t para o qual $i = 0.8\,\mathcal{E}/R$. Isto significa termos

$$0.8 = 1 - e^{-t/\tau_L}$$

ou seja

$$e^{-t/\tau_L} = 0.2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}t &= -\ln(0.2)\tau_L = 1.609\,\tau_L\\ &= \frac{1.609\,L}{R}\\ &= \frac{1.609\times 6.3\times 10^{-6}\text{ H}}{1.2\times 10^{-3}\ \Omega} = 8.45\times 10^{-9}\text{ s.}\end{aligned}$$

(b) Para $t=\tau_L$ a corrente no circuito é

$$\begin{aligned}i = \frac{\mathcal{E}}{R}(1-e^{-1}) &= \Big(\frac{14\text{ V}}{1.2\times 10^{3}\ \Omega}\Big)(1-e^{-1})\\ &= 7.37\times 10^{-3}\text{A.}\end{aligned}$$

E 33-20.

O fluxo concatenado total através de uma certa bobina de 0.75 Ω de resistência vale 26 mW, quando é percorrida por uma corrente de 5.5 A. **(a)** Calcular a indutância da bobina. **(b)** Se uma bateria de 6 V for subitamente ligada à bobina, quanto tempo levará para que a corrente cresça de 0 até 2.5 A?

▶ **(a)** A indutância pedida é

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{26\times 10^{-3}}{5.5} = 4.7\times 10^{-3}\text{ H.}$$

(b) Isolando-se t da Eq. (33-18), que dá o crescimento da corrente, temos

$$\begin{aligned}t &= -\,\tau_L \ln\Big(1-\frac{iR}{\mathcal{E}}\Big)\\ &= -\,\frac{L}{R}\ln\Big(1-\frac{iR}{\mathcal{E}}\Big)\\ &= -\frac{4.7\times 10^{-3}}{0.75}\ln\Big(1-\frac{(2.5)(0.75)}{6.0}\Big)\\ &= 2.4\times 10^{-3}\text{ s.}\end{aligned}$$

P 33-21.

▶ Usando a regra das malhas obtemos

$$\mathcal{E} - L\frac{di}{dt} = iR,$$

ou seja

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= L\frac{di}{dt} + iR\\ &= L\frac{d}{dt}\big(3+5t\big) + (3+5t)R\\ &= (6)(5) + (3+5t)(4)\\ &= (42+20\,t)\text{ V.}\end{aligned}$$

P 33-22.

▶ A equação que rege a tensão no indutor é

$$V_i = \mathcal{E} e^{-t_i/\tau_L},$$

onde o subíndice $i = 1, 2, \ldots, 8$, serve para indicar convenientemente o instante de tempo que queremos considerar. Utilizando agora dois pontos quaisquer da Tabela dada, por exemplo $t = 1$ ms e $t = 2$ ms, vemos que:

$$V_1 = \mathcal{E} e^{-t_1/\tau_L}, \qquad V_2 = \mathcal{E} e^{-t_2/\tau_L},$$

ou seja, que

$$\frac{V_2}{V_1} = e^{[-t_2-(-t_1)]/\tau_L} = e^{(t_1-t_2)/\tau_L}.$$

Portanto

$$\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \frac{t_1 - t_2}{\tau_L},$$

de onde obtemos que

$$\tau_L = \frac{t_1 - t_2}{\ln(V_2/V_1)} = \frac{1.0 \text{ ms} - 2.0 \text{ ms}}{\ln(13.8/18.2)} = 3.6 \text{ ms}.$$

Agora, para obter o valor de $\mathcal{E}$, basta usar o fato que $V_i = \mathcal{E} e^{-t_i/\tau_L}$, substituindo-se nesta fórmula qualquer um dos pontos da Tabela. Por exemplo, usando-se o *primeiro* ponto da Tabela obtemos:

$$\mathcal{E} = V_1 e^{-t/\tau_L} = (18.2) e^{-1.0/3.6} = 24 \text{ V}.$$

Observe que na expressão acima usamos milisegundos como unidade de tempo, para abreviar os cálculos.
É fácil conferir agora que a equação

$$V_i = 24 e^{-t_i/(3.6\times 10^{-3})} \text{ Volts}$$

permite obter-se corretamente qualquer um dos outros pontos na Tabela.

P 33-23.

▶ Para obter o resultado pedido, basta computar a derivada de ambos lados da Eq. (33-18):

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \frac{d}{dt}\Big[\frac{\mathcal{E}}{R}\Big(1 - e^{-Rt/L}\Big)\Big] \\ &= \frac{\mathcal{E}}{L} e^{-RT/L} \\ &= \Big(\frac{45.0}{50.0\times 10^{-3}}\Big) e^{\frac{-(180)(1.20\times 10^{-3})}{50.0\times 10^{-3}}} \\ &= 12.0 \text{ A/s}. \end{aligned}$$

P 33-24.

▶ **(a)** Como a circunferência interna do toróide é $\ell = 2\pi a = 2\pi(10 \text{ cm}) = 62.8$ cm, o número de espiras do toróide é aproximadamente $N = 62.8 \text{ cm}/1.0 \text{ mm} = 628$. Portanto, da Eq. (33-7), temos

$$\begin{aligned} L &= \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\frac{b}{a} \\ &= \frac{(4\pi 10^{-7})(628)^2(0.12-0.10)}{2\pi} \ln\frac{12}{10} \\ &= 2.9\times 10^{-4} \text{ H}. \end{aligned}$$

(b) Como o comprimento total do fio é $\ell = (628)(4)(2.0\times 10^{-2}) = 50$ m, a resistência do fio é $R = (50 \text{ m})(0.02\ \Omega/\text{m}) = 1\Omega$. Portanto,

$$\tau_L = \frac{L}{R} = \frac{2.9\times 10^{-4}}{1} = 2.9\times 10^{-4} \text{ s}.$$

P 33-25.

Na Figura 33-17, $\mathcal{E} = 100$ V, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $R_3 = 30\ \Omega$ e $L = 2$ H. Determine os valores de i_1 e i_2 **(a)** imediatamente após o fechamento da chave S; **(b)** muito tempo depois do fechamento de S; *(c)* imediatamente após S ser aberta outra vez; *(d)* muito tempo depois da abertura de S.

▶ **(a)** O indutor impede um crescimento rápido da corrente através dele, de modo que imediatamente após a chave S ser fechada a corrente no indutor é zero (= circuito aberto). Isto significa que

$$i_1 = i_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2} = \frac{100\text{V}}{10\ \Omega + 20\ \Omega} = 3.33 \text{ A}.$$

(b) Muito tempo depois do fechamento do circuito a corrente através do indutor atinge o valor de equilíbrio e praticamente não mais se altera. A fem através do indutor é zero e ele comporta-se como se estivesse sido substituido por um pedaço de fio. A corrente em R_3 é $i_1 - i_2$. A lei de Kirchhoff para as malhas fornece

$$\begin{aligned} \mathcal{E} - i_1 R_1 - i_2 R_2 &= 0, \\ \mathcal{E} - i_1 R_1 - (i_1 - i_2) R_3 &= 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{\mathcal{E}(R_2 + R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \\ &= \frac{100\times(20+30)}{10\times 20 + 10\times 30 + 20\times 30} = 4.55 \text{ A}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_2 &= \frac{\mathcal{E} R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \\ &= \frac{100 \times 30}{10 \times 20 + 10 \times 30 + 20 \times 30} = 2.73 \text{ A.} \end{aligned}$$

(c) Neste caso a malha do lado esquerdo está aberta. Como a indutância desta malha é nula, a corrente nela cai imediatamente para zero quando a chave é aberta. Ou seja, $i_1 = 0$. A corrente em R_3 varia lentamente apenas pois existe um indutor nesta malha. Imediatamente após a chave ser aberta a corrente tem o mesmo valor que tinha no momento anterior ao fechamento da chave. Este valor é $4.55 - 2.73$ A = 1.82 A. A corrente em R_2 é idêntica à corrente em R_3, 1.82 A.
(d) Nesta situação não existem mais fontes de fem no circuito de modo que eventualmente todas correntes terão decaido para zero.

P 33-26.

No circuito mostrado na Fig. 33-18, $\mathcal{E} = 10$ V, $R_1 = 5\ \Omega$ $R_2 = 10\ \Omega$ e $L = 5$ H. Considere as situações: (I) a chave S acaba de ser fechada e (II) a chave S ficou fechada durante muito tempo. Calcule para estas duas situações: **(a)** a corrente i_1 através de R_1, **(b)** a corrente i_2 através de R_2, **(c)** a corrente i através da chave, **(d)** a diferença de potencial através de R_2, **(e)** a diferença de potencial através de L, **(f)** di_2/dt.

► (I) Chave S acaba de ser fechada: neste instante a reação do indutor à variação da corrente (que era nula) é máxima, atuando de modo a tentar manter a corrente (nula) naquele ramo. Portanto:
(a) $i_1 = i = \mathcal{E}/R_1 = 10/5 = 2$ A.
(b) $i_2 = 0$, pois no instante em que a chave é fechada o indutor se opõe ao máximo à passagem de corrente.
(c) $i = i_1 = 2$ A.
(d) $V_2 = i_2\, R_2 = 0 \times 2 = 0$ V.
(e) $V_L = \mathcal{E}_L = 10$ V, oposta a $\mathcal{E}$.
(f) $\frac{di_2}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} = \frac{10}{5} = 2$ A/s.

(II) Um longo tempo após o fechamento da chave S o indutor estará carregado, pronto para reagir caso apareça algum $di_2/dt \neq 0$. Entretanto, enquanto não houver variação de corrente através do indutor ele se comporta como um *curto circuito*, ou seja, não reage à passagem da corrente.
(a) $i_1 = \frac{\mathcal{E}}{R} = 2$ A.
(b) $di_2/dt = 0$ A/s e $i_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2} = \frac{10}{10} = 1$ A.
(c) $i = i_1 + i_2 = 3$ A.
(d) $V_2 = i_2\, R_2 = 1 \times 10 = 10$ V.
(e) $V_L = -L\,\frac{di_2}{dt} = 0$ V.
(f) $\frac{di_2}{dt} = 0$ A/s.

P 33-28*.

No circuito mostrado na Fig. 33-20, a chave S é fechada no instante $t = 0$. A partir desse momento, a fonte de corrente constante, através da variação da sua fem, mantém uma corrente constante i saindo de seu terminal superior. **(a)** Deduza uma expressão para a corrente através do indutor em função do tempo. **(b)** Mostre que a corrente através do resistor é igual à corrente através do indutor no instante $t = (L/R)\ln 2$.

► **(a)** Suponha que i flui da esquerda para a direita através da chave fechada. Chame de i_1 a corrente no resistor, suposta fluindo para baixo. A lei dos nós fornece $i = i_1 + i_2$ enquanto que a lei das malhas dá $i_1 R - L(di_2/dt) = 0$.
De acordo com a lei dos nós, uma vez que $di/dt = 0$ pois i é constante, encontramos que $di_1/dt = -(di_2/dt)$. Substituindo este resultado na equação obtida pela lei das malhas segue

$$L\frac{di_1}{dt} + i_1\, R = 0.$$

Esta equação é semelhante à dada na secção 33-4, um pouco antes da Eq. 33-20, e sua solução é a Eq. 33-20:

$$i_1 = i_0 e^{-Rt/L},$$

onde i_0 é a corrente através do resistor em $t = 0$, imediatamente após a chave ser fechada. Imediatamente após o fechamento da chave o indutor age de modo a evitar o rápido crescimento da corrente na malha que o contém, de modo que naquele instante temos $i_2 = 0$ e $i_1 = i$. Portanto $i_0 = i$, de modo que

$$i_1 = i\ e^{-Rt/L}$$

e

$$i_2 = i - i_1 = i\Big[1 - e^{-Rt/L}\Big].$$

(b) Quando $i_2 = i_1$,

$$e^{-Rt/L} = 1 - e^{-Rt/L},$$

de modo que

$$e^{-Rt/L} = \frac{1}{2}, \qquad \text{ou seja,} \qquad t = \frac{L}{R}\,\ln 2.$$

33.2.4 Energia Armazenada num Campo Magnético – (29/37)

E 33-29.

A energia armazenada num certo indutor é 25 mJ quando a corrente é 60 mA. **(a)** Calcular a indutância. **(b)** Que corrente é necessária para a energia magnética armazenada ser quatro vezes maior?

► **(a)** Como $U_B = \frac{1}{2}Li^2 = 25$ mJ, obtemos facilmente

$$L = \frac{2U_B}{i^2} = \frac{2 \times 25 \times 10^{-3}}{(6 \times 10^{-3})^2} = 13.89 \text{ H}.$$

(b) Para que tenhamos $U'_B = 4U_B = 100$ mJ, precisamos de uma corrente igual a

$$\begin{aligned} i = \sqrt{\frac{2U'_B}{L}} &= \sqrt{\frac{2 \times 100 \times 10^{-3}}{13.89}} \\ &= 0.12 \text{ A} = 120 \text{ mA}. \end{aligned}$$

E 33-31.

Uma bobina com uma indutância de 2 H e uma resistência de 10 Ω é subitamente ligada a uma bateria de resistência desprezível com $\mathcal{E} = 100$ Volts. **(a)** Qual será a corrente de equilíbrio? **(b)** Que quantidade de energia estará armazenada no campo magnético quando esta corrente for atingida?

► **(a)** $i = \mathcal{E}/R = 10$ A.
(b)

$$U_B = \frac{1}{2}Li^2 = (0.5)(2)(10)^2 = 100 \text{ J}.$$

E 33-32.

Uma bobina com uma indutância de 2 H e uma resistência de 10 Ω é subitamente ligada a uma bateria de resistência desprezível com $\mathcal{E} = 100$ V. Após 0.1 s de a ligação ter sido feita, quais são as taxas com que **(a)** a energia está sendo armazenada no campo magnético, **(b)** a energia térmica está aparecendo e **(c)** a energia está sendo fornecida pela bateria?

► Durante a carga, a corrente é controlada pela equação

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\Big(1 - e^{-Rt/L}\Big) = 10\Big(1 - e^{-5t}\Big).$$

(a)

$$\begin{aligned} U_B(t) &= \frac{1}{2}L\,[i(t)]^2 \\ &= 100\Big(1 - e^{-5t}\Big)^2 \\ &= 100\Big(1 - 2e^{-5t} + e^{-10t}\Big). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{\text{campo}} &= \frac{dU_B}{dt}\Big|_{t=0.1\text{s}} \\ &= 100\Big(10\,e^{-5\times 0.1} - 10e^{-10\times 0.1}\Big) \\ &\simeq 238.651 \text{ J/s}. \end{aligned}$$

(b) A potência dissipada pela resistência em qualquer instante t é $P_R(t) = [i(t)]^2\,R$ e, portanto,

$$\begin{aligned} P_R(t = 0.1) &= \Big(10\big[1 - e^{-5\times 0.1}\big]\Big)^2 \times 10 \\ &\simeq 154.818 \text{ W}. \end{aligned}$$

(c) A potência fornecida pela bateria em qualquer instante t é $P_{\text{bat}}(t) = \mathcal{E}\,i(t)$. No instante $t = 0.1$ s temos

$$P_{\text{bat}}(t = 0.1) = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\Big(1 - e^{-5\times 0.1}\Big) \simeq 393.469 \text{ J/s}.$$

Tendo calculado este três valores, podemos verificar se existe ou não conservação da energia: $P_{\text{campo}} + P_R = P_{\text{bat}}$. Verificamos que realmente existe: $154.818 + 238.651 = 393.469$.

P 33-33.

Suponha que a constante de tempo indutiva para o circuito da Fig. 33-6 seja de 37 ms e que a corrente no circuito seja zero no instante $t = 0$. Em que instante a taxa de dissipação de energia no resistor é igual à taxa com que a energia está sendo armazenada no indutor?

► Dizer-se que a dissipação no resitor é igual à taxa de armazenamento de energia no indutor equivale a dizer-se que

$$R\,i^2 = \mathcal{E}_L\,i.$$

A corrente que obedece a condição inicial é

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}\Big(1 - e^{-Rt/L}\Big).$$

Como sabemos que $\mathcal{E}_L = L\, di/dt$, podemos re-escrever a primeira das equações acima, já tendo eliminado o fator i comum aos dois membros e lembrando que $\tau_L = L/R$, como

$$\begin{aligned} R\, i &= L\frac{di}{dt} \\ R\,\frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right) &= L\Big(\frac{-\mathcal{E}}{R}\Big)\Big(\frac{-R}{L}\Big)\, e^{-Rt/L} \\ 1 - e^{-Rt/L} &= e^{-Rt/L} \\ 1 &= 2\, e^{-t/\tau_L} \\ \ln\Big(\frac{1}{2}\Big) &= -\frac{t}{\tau_L}. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} t &= -\tau_L\, \ln\Big(\frac{1}{2}\Big) \\ &= -37 \times (-0.6931) = 25.6 \text{ ms}. \end{aligned}$$

P 33-34.

Uma bobina está ligada em série com um resistor de 10 kΩ. Quando uma bateria de 50 V é ligada ao circuito, a corrente atinge o valor de 2 mA após 5 ms. **(a)** Determine a indutância da bobina. **(b)** Que quantidade de energia está armazenada na bobina neste momento?

▶ **(a)** Se a bateria é aplicada no instante $t = 0$, a corrente é dada por

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}\,\Big(1 - e^{-t/\tau_L}\Big),$$

onde $\mathcal{E}$ é a fem da bateria, R é a resistência e $\tau_L = L/R$ é a constante de tempo indutiva. Portanto

$$e^{-t/\tau_L} = 1 - \frac{i\,R}{\mathcal{E}}$$

donde sai

$$-\frac{t}{\tau_L} = \ln\Big[1 - \frac{i\,R}{\mathcal{E}}\Big].$$

Numericamente temos

$$\begin{aligned} \ln\Big(1 - \frac{i\,R}{\mathcal{E}}\Big) &= \ln\Big(1 - \frac{(2\times 10^{-3})(10\times 10^{3})}{50}\Big) \\ &= -0.5108, \end{aligned}$$

fazendo com que a constante de tempo indutiva seja dada por $\tau_L = t/0.5108 = (5\times 10^{-3}\text{ s})/0.5108 = 9.79\times 10^{-3}$ s e, finalmente,

$$\begin{aligned} L = R\tau_L &= (9.79\times 10^{-3}\text{ s})(10\times 10^{3}\ \Omega) \\ &= 97.9 \text{ H}. \end{aligned}$$

(b) A energia armazenada na bobina é

$$\begin{aligned} U_B = \frac{1}{2}Li^2 &= \frac{1}{2}(97.9)(2\times 10^{-3})^2 \\ &= 1.96\times 10^{-4}\text{ J}. \end{aligned}$$

P 33-37.

Prove que, quando a chave S da Fig. 33-5 é girada da posição a para a posição b, toda energia armazenada no indutor aparece como energia térmica no resistor.

▶ Suponha que a chave tenha estado na posição a por um tempo longo, de modo que a corrente tenha atingido seu valor de equilíbrio i_0. A energia armazenada no indutor é $U_B = Li_0^2/2$. Então, no instante $t = 0$, a chave é colocada na posição b. A partir de então a corrente é dada por

$$i = i_0 e^{-t/\tau_L},$$

onde τ_L é a constante de tempo indutiva, dada por $\tau_L = L/R$. A taxa com a qual a energia térmica é gerada no resistor é

$$P = i^2 R = i_0^2 R\, e^{-2t/\tau_L}.$$

Durante um período longo de tempo a energia dissipada é

$$\begin{aligned} E = \int_0^\infty P\,dt &= i_0^2 R\int_0^\infty e^{-2t/\tau_L}\,dt \\ &= -\frac{1}{2}i_0^2 R\tau_L e^{-2t/\tau_L}\Big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{2}i_0^2 R\tau_L. \end{aligned}$$

Substituindo-se $\tau_L = L/R$ nesta expressão tem-se

$$E = \frac{1}{2}Li_0^2,$$

que é idêntica à energia U_B originalmente armazenada no indutor.

33.2.5 Densidade de Energia de um Campo Magnético – (38/46)

E 33-38.

Um solenóide tem um comprimento de 85 cm e secção transversal de área igual a 17 cm^2. Existem 950 espiras de fio transportando uma corrente de 6.6 A. **(a)** Calcule a densidade de energia do campo magnético no interior do solenóide. **(b)** Determine, nessa região, a energia total armazenada no campo magnético. (Despreze os efeitos das extremidades.)

▶ **(a)** Em qualquer ponto, a densidade de energia magnética é dada por $u_B = B^2/(2\mu_0)$, onde B é a magnitude do campo magnético naquele ponto. Dentro do solenóide $B = \mu_0 n i$, onde n é o numero de espiras por unidade de comprimento e i é a corrente. No presente caso, $n = (950)/(0.85 \text{ m}) = 1.118 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$. A densidade de energia magnética é

$$\begin{aligned} u_B &= \frac{1}{2}\mu_0 n^2 i^2 \\ &= \frac{1}{2}(4\pi\times 10^{-7})(1.118\times 10^3)^2(6.6)^2 \\ &= 34.2 \text{ J/m}^3. \end{aligned}$$

(b) Como o campo magnético é uniforme dentro de um solenóide ideal, a energia total armazenada é $U_B = u_B V$, onde V é o volume do solenóide. V é igual ao produto da secção transversal pelo comprimento. Portanto

$$U_B = (34.2)(17\times 10^{-4})(0.85) = 4.94\times 10^{-2} \text{ J}.$$

E 33-39.

Um indutor toroidal de 90 mH delimita um volume de 0.02 m^3. Se a densidade média de energia no toróide for de 70 J/m^3, qual será a corrente que circula no indutor toroidal?

▶ A energia magnética armazenada no toróide pode ser escrita de dois modos distintos: $U_B = Li^2/2$ ou $U_B = u_B\, V$, onde u_B é a *densidade* média de energia e V o volume. Portanto, igualando as duas expressões obtemos

$$\begin{aligned} i = \sqrt{\frac{2u_B V}{L}} &= \sqrt{\frac{2(70 \text{ J/m}^3)(0.02 \text{ m}^3)}{90\times 10^{-3} \text{ H}}} \\ &= 5.58 \text{ A}. \end{aligned}$$

P 33-44.

(a) Determine uma expressão para a densidade de energia em função da distância radial para o toróide do Exemplo 33-1. **(b)** Integrando a densidade de energia por todo o volume do toróide, calcule a energia total armazenada no toróide; suponha $i = 0.5$ A. **(c)** Usando a Eq. 33-24, calcule a energia armazenada no toróide diretamente da indutância e compare o resultado com o do item *(b)*.

▶ **(a)** A densidade de energia é dada pela Eq. 33-26, $u_B = B^2/(2\mu_0)$, sendo o campo magnético de um toróide dado pela Eq. 31-22: $B = \mu_0 i N/2\pi r$. Portanto

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{(\mu_0 i N/2\pi r)^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 i^2 N^2}{8\pi^2 r^2}.$$

(b) Calcule a integral $U_B = \int u_B\, dV$ sobre o volume do toróide. Considere como elemento de volume o volume compreendido entre dois toróides coaxiais de raios r e $r + dr$, com seus eixos coincidindo com o eixo do toróide dado. Neste caso temos então $dV = 2\pi r h dr$, de modo que

$$\begin{aligned} U_B &= \int u_B\, dV \\ &= \int_a^b \frac{\mu_0 i^2 N^2}{8\pi^2 r^2}\, 2\pi r h\, dr \\ &= \frac{1}{4\pi}\, \mu_0 i^2 N^2 h\, \ln\left(\frac{b}{a}\right). \end{aligned}$$

Explicitamente,

$$\begin{aligned} U_B &= \frac{(4\pi\times 10^{-7})(0.5)^2(1250)^2(13\times 10^{-3})}{4\pi} \times \\ &\quad \times \ln\left(\frac{95}{52}\right) \\ &= 3.06\times 10^{-4} \text{ J}. \end{aligned}$$

(c) A indutância L é fornecida pela Eq. 33-7:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\,\left(\frac{b}{a}\right).$$

Portanto, usando a Eq. 33-24, temos

$$U_B = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{\mu_0 N^2 i^2 h}{4\pi} \ln\,\left(\frac{b}{a}\right).$$

Como não poderia deixar de ser, esta expressão é idêntica a encontrada na parte *(b)*.

33.2.6 Indutância Mútua – (47/53)

E 33-47.

Duas bobinas estão em posições fixas. Quando na bobina 1 não há corrente e na bobina 2 existe uma corrente que cresce numa taxa constante de 15 A/s, a fem na bobina 1 vale 25 mV. **(a)** Qual é a indutância mútua destas bobinas? **(b)** Quando não há corrente na bobina 2 e a bobina 1 é percorrida por uma corrente de 3.6 A, qual é o fluxo através da bobina 2?

► **(a)** A indutância mútua M é dada por

$$\mathcal{E}_1 = M\frac{di_2}{dt},$$

onde $\mathcal{E}_1$ é a fem na bobina 1 devida à corrente que está variando na bobina 2. Portanto,

$$M = \frac{\mathcal{E}}{di_2/dt} = \frac{25\times 10^{-3}}{15} = 1.67\times 10^{-3}\text{ H}.$$

(b) O fluxo concatenado na bobina 2 é

$$\begin{aligned} N_2\Phi_{21} = Mi_1 &= (1.67\times 10^{-3})(3.6) \\ &= 6.01\times 10^{-3}\text{ Wb}. \end{aligned}$$

P 33-49.

Duas bobinas estão ligadas conforme mostra a Fig. 33-21. Suas indutâncias valem L_1 e L_2. O coeficiente de indutância mútua é M. **(a)** Mostre que a combinação pode ser substituída por uma única bobina de indutância equivalente dada por

$$L_{\text{eq}} = L_1 + L_2 + 2M.$$

(b) Como as bobinas da Fig. 33-21 deveriam ser ligadas para que a indutância equivalente fosse dada por

$$L_{\text{eq}} = L_1 + L_2 - 2M.$$

(Este problema é uma extensão do Problema 5, tendo sido eliminada a exigência de que a distância entre as bobinas deveria ser muito grande.)

► **(a)** Suponha que a corrente esteja variando a uma taxa di/dt e calcule a fem total através de ambas bobinas. Considere primeiro a bobina à esquerda. O campo magnético devido à corrente nesta bobina aponta para a esquerda. Também para a esquerda aponta o campo magnético devido à corrente na bobina 2. Quando a corrente aumenta ambos os campos aumentam e ambas variações no fluxo contribuem com fem na mesma direção. Portanto a fem na bobina 1 é

$$\mathcal{E}_1 = -(L_1 + M)\frac{di}{dt}.$$

O campo magnético na bobina 2 devido à corrente nela aponta para a esquerda, como também o faz o campo na bobina 2 devido à corrente na bobina 1. As duas fontes de fem estão novamente na mesma direção e a fem na bobina 2 é

$$\mathcal{E}_2 = -(L_2 + M)\frac{di}{dt}.$$

A fem total através de ambas bobinas é

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = -(L_1 + L_2 + 2M)\frac{di}{dt}.$$

Esta é exatamente a mesma fem que seria produzida se as bobinas fossem substituidas por uma única bobina com indutância $L_{\text{eq}} = L_1 + L_2 + 2M$.

(b) Reverta os terminais da bobina 2 de modo que a corrente entre pela parte de trás da bobina em vez de entrar pela frente como mostrado no diagrama. Neste caso o campo produzido pela bobina 2 no local onde está a bobina 1 opõe-se ao campo gerado pela bobina 1. Os fluxos tem sinais opostos. Uma corrente crescente na bobina 1 tende a aumentar o fluxo nela mas uma corrente crescente na bobina 2 tende a diminui-lo. A fem através da bobina 1 é

$$\mathcal{E}_1 = -(L_1 - M)\frac{di}{dt}.$$

Analogamente, a fem na bobina 2 é

$$\mathcal{E}_2 = -(L_2 - M)\frac{di}{dt}.$$

A fem total através de ambas bobinas é agora

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = -(L_1 + L_2 - 2M)\frac{di}{dt}.$$

Esta é exatamente a mesma fem que seria produzida se as bobinas fossem substituidas por uma única bobina com indutância $L_{\text{eq}} = L_1 + L_2 - 2M$.

P 33-52.

A Fig. 33-24 mostra, em seção transversal, dois solenóides coaxiais. Mostre que o coeficiente de indutância mútua M para um comprimento ℓ desta combinação solenóide-solenóide é dado por

$$M = \pi R_1^2 \ell \mu_0 n_1 n_2,$$

onde n_1 é o número de espiras por unidade de comprimento do solenóide 1 e n_2 é o número de espiras por unidade de comprimento do solenóide 2. R_1 é o raio do solenóide interno. Explique por que M depende de R_1 mas não depende de R_2, o raio do solenóide externo.

▶ Assuma que a corrente no solenóide 1 é i e calcule o fluxo concatenado no solenóide 2. A indução mútua é igual a este fluxo dividido por i. O campo magnético dentro do solenóide 1 é paralelo ao eixo e tem magnitude $B = \mu_0 i n_1$ uniforme, onde n_1 é o número de espiras por unidade de comprimento do solenóide. A área da seção reta do solenóide é πR_1^2 e, como o campo é perpendicular a uma seção reta, o fluxo através da seção reta é

$$\Phi = AB = \pi R_1^2 \mu_0 n_1 i.$$

Como o campo magnético é nulo fora do solenóide, este é também o valor do fluxo através de uma seção do solenóide 2. O número de espiras num comprimento ℓ do solenóide 2 é $N_2 = n_2 \ell$ e o fluxo concatenado é

$$N_2 \Phi = n_2 \ell \pi R_1^2 \mu_0 n_1 i.$$

A indutância mútua é, portanto,

$$M = \frac{N_2 \Phi}{i} = \pi R_1^2 \ell \mu_0 n_1 n_2.$$

M não depende de R_2 porque não existe campo magnético na região entre os solenóides. Mudando R_2 não se altera o fluxo através do solenóide 2; mas mudando R_1, o fluxo altera-se.

▶ Usando a Eq. 33-33, $\varepsilon_2 = -M di_1/dt$. O fluxo entre o solenóide de dentro e o de fora é:

$$\Phi_{12} = \int \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{A}$$

onde B_1 é o campo gerado pela corrente i_1 do solenóide de dentro e a integral é sobre a área da seção transversal do solenóide de fora. Mas $B_1 = \mu_0 n_1 i_1$ dentro do solenóide 1 e zero do lado de fora. Assim, não existe contribuição para a integral na área entre os solenóides (e, portanto, o tamanho do solenóide 2 não importa); então,

$$\Phi_{21} = B_1(\pi R^2) = \mu_0 n_1 \pi R_1^2 i_1.$$

Como existem $n_2 \ell$ espiras no solenóide 2 num comprimento ℓ, segundo a Lei de Indução de Faraday, podemos escrever a seguinte relação:

$$\varepsilon_2 = -n_2 \ell \, \frac{d\Phi_{21}}{dt} = -n_2 \ell \; \mu_0 n_1 \pi R_1^2 \, \frac{di_1}{dt} = -M \, \frac{di_1}{dt}.$$

Portanto, comparando os coeficientes, obtemos

$$M = \mu_0 n_1 n_2 \pi R_1^2 \ell.$$