Exercícios Resolvidos de Teoria Eletromagnética

Jason Alfredo Carlson Gallas, professor titular de física teórica,

Doutor em Física pela Universidade Ludwig Maximilian de Munique, Alemanha

Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul
91501-970 Porto Alegre, BRASIL

Matéria para a TERCEIRA prova. Numeração conforme a **quarta** edição do livro "Fundamentos de Física", Halliday, Resnick e Walker.

Esta e outras listas encontram-se em: *http://www.if.ufrgs.br/∼jgallas*

Conteúdo

Comentários/Sugestões e Erros: favor enviar para `jgallas @ if.ufrgs.br`
(`lista3.tex`)

37 As Equações de Maxwell – [Capítulo 37, página 316]

37.1 Questões

Q 37-3.

Por que é tão fácil mostrar que "um campo magnético variável produz um campo elétrico", mas é tão difícil mostrar de um modo simples que "um campo elétrico variável produz um campo magnético"?

▶ Porque os campos magnéticos devidos a campos elétricos variáveis são extremamente fracos. Isto deve-se ao coeficiente $\mu_0\epsilon_0 \equiv \frac{1}{c^2}$ do termo $d\Phi_E/dt$ na lei de Ampère-Maxwell ser muito pequeno em relação ao outro termo da equação. A constante c representa a velocidade da luz.

37.2 Problemas e Exercícios

37.2.1 As Equações de Maxwell: Uma Lista Provisória – (1/2)

E 37-1.

Verifique o valor numérico da velocidade escalar da luz usando a Eq. 37-1 e mostre que a equação está dimensionalmente correta. (Veja o Apêndice B.)

▶ No Apêndice B, pág. 321, encontramos que

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 1.256\,637\,061\,43 \times 10^{-6} \quad \text{H/m}, \\ \varepsilon_0 &= 8.854\,187\,817\,62 \times 10^{-12} \quad \text{F/m}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0\epsilon_0}} = 2.997\,935 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

O Apêndice B informa que o valor experimental de c é

$$c = 2.997\,924\,58 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

Não deixe de fazer a análise dimensional pedida!

E 37-2.

(a) Mostre que $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 377\ \Omega$. (Esta grandeza é chamada de "impedância do vácuo".) **(b)** Mostre que a freqüência angular correspondente a 60 Hz é igual a 377 rad/s. **(c)** Compare os itens (a) e (b). Você acha que esta coincidência tenha influido ma escolha de 60 Hz para os geradores de corrente alternada? Lembre-se de que na Europa usam 50 Hz.

▶ **(a)**

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} &= \sqrt{\frac{1.256\,637\,061\,43 \times 10^{-6} \quad \text{H/m}}{8.854\,187\,817\,62 \times 10^{-12} \quad \text{F/m}}} \\ &= 376.730\,\Omega. \end{aligned}$$

(b) $f_{60} = 2\pi\,\omega = 2\pi\,60 = 376.991$ Hz. Por outro lado, $f_{50} = 314.159$ Hz.
(c) Espaço reservado para sua resposta:

37.2.2 Campos Magnéticos Induzidos – (3/5)

E 37-3.

Para a situação do Exemplo 37-1, quais as possíveis distâncias onde o campo magnético induzido se reduz à metade do seu valor máximo?

▶ Seja R o raio da placa do capacitor e r a distância a partir do eixo do capacitor. Para pontos tais que $r \leq R$ a magnitude do campo magnético é dada por

$$B(r) = \frac{\mu_0\epsilon_0 r}{2}\frac{dE}{dt}$$

enquanto que para $r \geq R$ ela é dada por

$$B(r) = \frac{\mu_0\epsilon_0 R^2}{2r}\frac{dE}{dt}.$$

O campo magnético máximo ocorre nos pontos em que $r = R$ sendo então seu valor dado por qualquer uma das fórmulas acima:

$$B_{\text{max}} = \frac{\mu_0\epsilon_0 R}{2}\frac{dE}{dt}.$$

Existem **dois** valores de r para os quais $B(r) = B_{\rm max}/2$: um menor do que R e um maior. O valor menor do que R pode ser encontrado resolvendo-se em termos de r a equação

$$B(r) = \frac{\mu_0\epsilon_0 r}{2}\frac{dE}{dt} = \frac{\mu_0\epsilon_0 R}{4}\frac{dE}{dt} \;\left(\equiv \frac{B_{\rm max}}{2}\right).$$

O resultado é $r = R/2 = 55/2 = 27.5$ mm. O valor que é maior do que R é obtido resolvendo-se para r a equação

$$B(r) = \frac{\mu_0\epsilon_0 R^2}{2r}\frac{dE}{dt} = \frac{\mu_0\epsilon_0 R}{4}\frac{dE}{dt}.$$

O resultado é $r = 2R = 2\times 55 = 110$ mm.

37.2.3 Corrente de Deslocamento – (6/15)

E 37-6.

Prove que a corrente de deslocamento num capacitor de placas paralelas pode ser escrita como

$$i_d = C\frac{dV}{dt}.$$

▶ A corrente de deslocamento é dada por

$$i_d = \epsilon_0 A\frac{dE}{dt},$$

onde A é a área de uma das placas e E é a magnitude do campo elétrico entre as placas. O campo entre as placas é uniforme, de modo que $E = V/d$, onde V é a diferença de potencial entre as placas e d é a separação das placas. Portanto

$$i_d = \frac{\epsilon_0 A}{d}\frac{dV}{dt} = C\frac{dV}{dt},$$

uma vez que $\epsilon_0 A/d$ é a capacitância C de um capacitor de placas paralelas "cheio de vácuo".

E 37-7.

Dispõe-se de um cacitor de placas paralelas de 1 μF. Como seria possível obter uma corrente de deslocamento (instantânea) de 1 A no espaço entre as placas?

▶ Para tanto basta variar o potencial entre as placas a uma taxa de

$$\frac{dV}{dt} = \frac{i_d}{C} = \frac{1\text{ A}}{10^{-6}\text{ F}} = 10^6 \text{ V/s}.$$

E 37-8.

Para a situação do Exemplo 37-1, mostre que a *densidade de corrente de deslocamento* J_d para $r \leq R$, é dada por

$$J_d = \epsilon_0\frac{dE}{dt}.$$

▶ Considere uma área A, normal a um campo elétrico **E**. A densidade de corrente de deslocamento é uniforme e normal à área. Sua magnitude é dada por $J_d = i_d/A$. Nesta situação temos

$$i_d = \epsilon_0 A\frac{dE}{dt},$$

de modo que

$$J_d = \frac{1}{A}\epsilon_0 A\frac{dE}{dt} = \epsilon_0\frac{dE}{dt}.$$

P 37-14.

Em 1929, M.R. Van Cauwenberghe conseguiu medir diretamente, pela primeira vez, a corrente de deslocamento i_d entre as placas de um capacitor de placas paralelas, submetido a uma diferença de potencial alternada, como está sugerido na Fig. 37-1. Ele usou placas circulares cujo raio efetivo era de 40 cm e cuja capacitância era de 100 pF. A diferença de potencial aplicada tinha um valor máximo V_m de 174 kV na freqüência de 50 Hz. **(a)** Qual foi a corrente de deslocamento máxima obtida entre as placas? **(b)** Por que foi escolhida uma diferença de potencial tão elevada? (A delicadeza destas medidas é tal que elas só foram realizadas diretamente mais de 60 anos depois de Maxwell ter enunciando o conceito de corrente de deslocamento!)

▶ **(a)** Use os resultados do Exercício 37-6, com $V = V_m\,\sin(2\pi f t)$. A derivada em relação ao tempo é $dV/dt = 2\pi f V_m \cos(2\pi f t)$, de modo que $i_d = 2\pi f C V_m \cos(2\pi f t)$, sendo a corrente de deslocamento máxima dada por

$$\begin{aligned} i_{d\,\rm max} &= 2\pi f C V_m \\ &= 2\pi(50)(100\times 10^{-12})(174\times 10^3) \\ &= 5.47\times 10^{-3}\text{A}. \end{aligned}$$

(b) A corrente de deslocamento máxima é diretamente proporcional à máxima diferença de potencial aplicada. Um valor grande de V_m produz um valor de $i_{d\,\rm max}$ mais facilmente mensurável do que com V_m menor.

P 37-15.

O capacitor na Fig. 37-8 consistindo em duas placas circulares de raio $R = 18$ cm está ligado a uma fonte de fem $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m$ senωt, onde $\mathcal{E}_m = 220$ V e $\omega = 130$ rad/s. O valor máximo da corrente de deslocamento é $i_d = 7.6\ \mu$A. Despreze a distorção do campo elétrico nas bordas das placas. **(a)** Qual é o valor máximo da corrente i? **(b)** Qual é o valor máximo de $d\Phi_E/dt$, onde Φ_E é o fluxo elétrico na região entre as placas? **(c)** Qual é a separação d entre as placas? **(d)** Determine o valor máximo do módulo de $\mathbf{B}$ entre as placas a uma distância $r = 11$ cm do centro.

▶ **(a)** Para qualquer instante t, a corrente de deslocamento i_d existente no espaço entre as placas é igual à corrente condução i nos fios. Portanto $I_{\text{max}} = i_{d\ \text{max}} = 7.6\mu$A.

(b) Como $i_d = \epsilon_0(d\Phi_E/dt)$,

$$\left(\frac{d\Phi_E}{dt}\right)_{\text{max}} = \frac{i_{d\ \text{max}}}{\epsilon_0} = \frac{7.6\times10^{-6}\ \text{A}}{8.85\times10^{-12}\ \text{F/m}} = 8.59\times10^5\ \text{V·m/s}.$$

(c) De acôrdo com o Exercício 37-6

$$i_d = \frac{\epsilon_0 A}{d}\frac{dV}{dt}.$$

Na situação em questão, a diferença de potencial através do capacitor coincide em magnitude com a fem do gerador, de modo que $V = \mathcal{E}_m$ senωt e $dV/dt = \omega\mathcal{E}_m\cos\omega t$. Portanto

$$i_d = \underbrace{\frac{\epsilon_0 A\omega\mathcal{E}_m}{d}}_{\equiv\, i_{d\ \text{max}}}\cos\omega t.$$

donde se tira facilmente que

$$\begin{aligned} d &= \frac{\epsilon_0 A\omega\mathcal{E}_m}{i_{d\ \text{max}}} \\ &= \frac{(8.85\times10^{-12})\ \pi\ (0.18)^2(130)(220)}{7.6\times10^{-6}} \\ &= 3.39\times10^{-3}\ \text{m}, \end{aligned}$$

onde usamos o fato que $A = \pi R^2$.

(d) Use a lei de Ampère-Maxwell na forma $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I_d$, onde o caminho de integração é um círculo de raio r entre as placas, paralelo a elas. I_d é a corrente de deslocamento através da área limitada pelo caminho de integração. Como a densidade da corrente de deslocamento é uniforme entre as placas, temos $I_d = (r^2/R^2)i_d$, onde i_d é a corrente de deslocamento total entre as placas e R é o raio da placa. As linhas de campo são círculos no eixo das placas, de modo que $\mathbf{B}$ é paralelo ao vetor $d\mathbf{s}$. A magnitude do campo é constante ao longo da trajetória circular, de modo que $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = 2\pi r B$. Logo,

$$2\pi r B = \mu_0\left(\frac{r^2}{R^2}\right) i_d$$

dando

$$B = \frac{\mu_0 i_d r}{2\pi R^2}.$$

O campo magnético máximo é dado por

$$\begin{aligned} B_{\text{max}} &= \frac{\mu_0 i_{d\ \text{max}}\ r}{2\pi R^2} \\ &= \frac{(4\pi\times10^{-7})(7.6\times10^{-6})(0.11)}{2\pi(0.18)^2} \\ &= 5.16\times10^{-12}\ \text{T}. \end{aligned}$$

37.2.4 Equações de Maxwell: a Lista Completa – (16/20)

P 37-20.

Uma longa barra cilíndrica condutora, de raio R, está centrada ao longo do eixo x como mostra a Fig. 37-11. A barra possui um corte muito fino em $x = b$. Uma corrente de condução i, aumentando no tempo e dada por $i = \alpha t$, percorre a barra da esquerda para a direita; α é uma constante de proporcionalidade (positiva). No instante $t = 0$ não existe cargas nas faces do corte próximo a $x = b$. **(a)** Determine o módulo da carga nessas faces em função do tempo. **(b)** Use a Eq. I da Tabela 37-2 para determinar E no intervalo entre as faces em função do tempo. **(c)** Esboce as linhas de $\mathbf{B}$ para $r < R$, onde r é a distância ao eixo x. **(d)** Use a Eq. IV da Tabela 37-2 para determinar $B(r)$ no intervalo entre as faces para $r \le R$. **(e)** Compare a resposta do item (d) com $B(r)$ na *barra* para $r \le R$.

▶ **(a)** No instante t a carga na face direita é dada por

$$q = \int_0^t i\ dt = \int_0^t \alpha t\ dt = \frac{1}{2}\alpha t^2.$$

Para o mesmo instante, o valor da carga na face esquerda é $-\alpha t^2/2$.

(b) Use uma superfície Gaussiana com a forma de um cilindro, concêntrica com a barra condutora, com um extremo dentro do intervalo onde existe o corte e o outro dentro da barra à esquerda do corte, (conforme ilustrado na figura à direita). O campo elétrico está na direção positiva do eixo x de modo que precisamos apenas considerar as faces do cilindro. A magnitude do campo elétrico na face esquerda é dado por ρJ, onde ρ é a resistividade da barra e J é a densidade de corrente.

Denotemos por E a magnitude do campo na face direita. Além disto, suponhamos que a densidade de corrente é uniforme na face esquerda e que o campo elétrico é uniforme na face direita. Neste caso,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = -\rho J A + EA,$$

onde A é a área de uma das faces. Nós supomos ainda que a resistividade é tão pequena que nos permita desprezar o termo acima no qual ela aparece. A lei de Gauss fica $EA = Q/\epsilon_0$, onde Q é a carga na barra e dentro da superfície Gaussiana. A área da face do cilindro Gaussiano é $A = \pi r^2$, onde r é o raio, e a carga englobada pela Gaussiana é $Q = (r^2/R^2)q$, onde q é a carga na face da barra. Portanto

$$E = \frac{q}{\pi \epsilon_0 R^2} = \frac{\alpha t^2}{2\pi \epsilon R^2},$$

onde o resultado obtido no item (a), $q = \alpha t^2/2$, foi usado.

(c) As linhas de campo magnético formam círculos que são concêntricos com o eixo da barra (eixo x), estando em planos paralelos às faces da barra.

(d) Use a lei de Ampère-Maxwell:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}.$$

Como caminho de integração escolha um círculo que coincida com uma linha de campo magnético. Suponha que o raio do caminho de integração seja r (com $r < R$) e que B seja a magnitude do campo para pontos sobre o caminho. Então $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B 2\pi r$. Na região do corte a corrente é zero e apenas a corrente de deslocamento contribui no lado direito da equação de Ampère-Maxwell. Como temos

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = A\frac{dE}{dt} = \pi r^2 \frac{\alpha t}{\pi \epsilon_0 R^2} = \frac{\alpha t r^2}{\epsilon_0 R^2},$$

a equação de Ampère-Maxwell nos fornece

$$B 2\pi r = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\alpha t r^2}{\epsilon_0 R^2}.$$

Portanto

$$B = \frac{\mu_0 \alpha t r}{2\pi R^2}.$$

O campo magnético dentro da barra, a uma distância r do seu eixo, é dado exatamente pela mesma expressão. Neste caso, somente a corrente de condução contribui no lado direito da lei de Ampère-Maxwell. Tome o caminho de integração como sendo um círculo centrado no eixo e paralelo às faces da barra. A corrente através do círculo é $(r^2/R^2)i$ e a equação de Ampère-Maxwell fornece

$$B 2\pi r = \mu_0 \frac{r^2}{R^2}\, i,$$

de modo que

$$B = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R^2} = \frac{\mu_0 \alpha t r}{2\pi R^2},$$

onde substituimos i por αt.