Exercícios Resolvidos de Teoria Eletromagnética

Jason Alfredo Carlson Gallas, professor titular de física teórica,

Doutor em Física pela Universidade Ludwig Maximilian de Munique, Alemanha

Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul
91501-970 Porto Alegre, BRASIL

Matéria para a QUARTA prova. Numeração conforme a **quarta** edição do livro "Fundamentos de Física", Halliday, Resnick e Walker.

Esta e outras listas encontram-se em: *http://www.if.ufrgs.br/∼jgallas*

Conteúdo

Comentários/Sugestões e Erros: favor enviar para `jgallas @ if.ufrgs.br`
(`lista4.tex`)

36 Correntes Alternadas

36.1 Questões

Q 36-2. De que modo um fasor difere de um vetor? Sabemos, por exemplo, que fems, diferenças de potencial e correntes não são grandezas vetoriais. De que modo, então, se pode justificar construções como as da Fig. 36-6?

► A d.d.p., a fem e a corrente não são vetores e, portanto, não seguem as regras da soma vetorial. A utilização de fasores para descrever estas grandezas é útil em virtude da possibilidade da existência da diferença de fase entre a corrente e a tensão, a qual se traduz em efeitos físicos (lembre-se, por exemplo, de que o *fator de potência* é dado por $\cos\phi$, onde ϕ é a diferença de fase entre a corrente e a fem). A direção do *fasor* não corresponde a nenhuma direção no espaço. Contudo, a projeção do *fasor* sobre um eixo possui a mesma *fase* de grandeza física a ele associada. Um *diagrama de fasores* é muito útil porque ele indica as relações de fase entre as grandezas representadas por estes fasores.

Q 36-8. Suponha, como enunciado na Seção 36-4, que um dado circuito seja "mais indutivo que capacitivo", isto é, que $X_L > X_C$. **(a)** Isto significa, para uma freqüência angular fixa, que L é relativamente "grande" e C relativamente "pequeno" ou que L e C são relativamente "grandes"? **(b)** Para valores fixos de L e de C, significa que ω é relativamente "grande" ou relativamente "pequeno"?

► **(a)** $X_L > X_C$ significa que $\omega^2 LC > 1$. Para um valor de ω fixo, o produto LC deve se relativamente grande.
(b) Para L e C fixos, o valor de ω é que deve ser relativamente grande.

36.2 Problemas e Exercícios:

36.2.1 Três circuitos simples – (1/12)

E 36-1. Suponha que a Eq. 36-1 descreva a fem efetiva disponível na saida de um gerador de 60 Hz. Qual a freqüência angular ω correspondente? Como a companhia de energia elétrica estabelece essa freqüência?

►

E 36-2. Um capacitor de 1.5μ F está ligado, como na Fig. 36-4a, a um gerador de corrente alternada com $\mathcal{E}_m = 30$ V. Qual será a amplitude da corrente alternada resultante se a freqüência da fem for **(a)** 1 kHz; **(b)** 8 kHz?

► **(a)** Use o fato que $I = \mathcal{E}/X_c = \omega C\mathcal{E}$. Portanto

$$I = \omega C\mathcal{E}_m = 2\pi f C\mathcal{E}_m = 0.283 \text{ A}.$$

(b) Se f é 8 vezes maior, também o é a corrente:

$$I = 8 \times 0.283 = 2.26 \text{ A}.$$

E 36-3. Um indutor de 50 mH está ligado, como na Fig. 36-5a, a um gerador de corrente alternada com $\mathcal{E}_m = 30$ V. Qual será a amplitude da corrente alternada resultante se a freqüência da fem for **(a)** 1 kHz; **(b)** 8 kHz?

► **(a)** A amplitude da corrente é dada pela Eq. 36-18 com $\omega = 2\pi f$, onde $f = 1$ kHz:

$$I_L = \frac{V_L}{X_L} = \frac{\mathcal{E}_m}{(2\pi f L)} = 0.0955 \text{ A}.$$

(b) Para $f = 8$ kHz a reatância indutiva é 8 vezes maior e, portanto,

$$I_L = \frac{0.0955 \text{ A}}{8} = 0.0119 \text{ A}.$$

Observação: os números dados no final do livro estão errados.

E 36-4. Um resistor de 50Ω está ligado, como na Fig. 36-3a, a um gerador de corrente alternada com $\mathcal{E}_m = 30$ V. Qual será a amplitude da corrente alternada resultante se a freqüência da fem for **(a)** 1 kHz; **(b)** 8 kHz?

► As respostas dos itens (a) e (b) são idênticas pois para um resistor a corrente não depende da freqüência:

$$I = \frac{\mathcal{E}_m}{R} = \frac{30}{50} = 0.60 \text{ A}.$$

E 36-5.

▶ **(a)** Use $X_L = \omega L = 2\pi f L$ para obter

$$f = \frac{X_L}{2\pi L} = \frac{1.30 \times 10^3}{(2\pi)(45 \times 10^{-3})} = 4.60 \times 10^3 \text{ Hz}.$$

(b) Use $X_C = (\omega C)^{-1} = (2\pi f C)^{-1}$ para obter

$$\begin{aligned} C = \frac{1}{2\pi f X_C} &= \frac{1}{2\pi(4.6 \times 10^3)(1.3 \times 10^3)} \\ &= 2.66 \times 10^{-8} \text{ F} \\ &= 26.6 \text{ nF}. \end{aligned}$$

(c) Como $X_L \propto f$ enquanto que $X_C \propto f^{-1}$, vemos que os novos valores serão:

$$\begin{aligned} X'_L &= 2\ X_L = 2.60 \times 10^3\ \Omega \\ X'_C &= X_L/2 = 6.50 \times 10^2\ \Omega. \end{aligned}$$

E 36-6.

▶ **(a)**

$$\begin{aligned} f = \frac{1}{2\pi C X_C} &= \frac{1}{2\pi(1.5 \times 10^{-6})(12.0)} \\ &= 8.84 \times 10^3 \text{ Hz} \\ &= 8.84 \text{ kHz}. \end{aligned}$$

(b) Dobrando-se a freqüência temos a reatância fica dividida por 2:

$$X'_C = \frac{X_C}{2} = 6\Omega.$$

E 36-7.

▶ **(a)** Para que as reatâncias sejam as mesmas devemos ter $X_L = X_C$ ou, equivalentemente, $\omega L = 1/(\omega C)$, ou seja $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Portanto, nesta situação encontramos

$$\begin{aligned} f = \frac{\omega}{2\pi} &= \frac{\omega}{2\pi\sqrt{LC}} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{(6 \times 10^{-3})(10 \times 10^{-6})}} \\ &= 650 \text{ Hz}. \end{aligned}$$

(b) $X_L = \omega L = 24\ \Omega$ e, obviamente $X_C = X_L$.
(c) Como a freqüência natural de oscilação é

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},$$

comparando f com f_0 vemos que ambas são idênticas.

P 36-10. A saída de um gerador de *CA* é dada por $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m$ sen $(\omega t - \pi/4)$, onde $\mathcal{E}_m = 30$ V e $\omega = 350$ rad/s. A corrente é dada por $i(t) = I$ sen $(\omega t - 3\pi/4)$, onde $I = 620$ mA. **(a)** Quando, após $t = 0$, a fem do gerador atinge pela primeira vez um máximo? **(b)** Quando, após $t = 0$, a corrente atinge pela primeira vez um máximo? **(c)** O circuito contém apenas um elemento além do gerador. Ele é um capacitor, um indutor ou um resistor? Justifique sua resposta. *(d)* Qual é o valor da capacitância, da indutância ou da resistência, conforme seja o caso?

▶ **(a)** A fem atinge o máximo para $\omega t - \pi/4 = \pi/2$, ou seja, para

$$t = \frac{3\pi}{4\omega} = 6.73 \text{ ms}.$$

(b) Analogamente, a corrente máximo ocorre quando $\omega t - 3\pi/4 = \pi/2$, ou seja,

$$t = \frac{5\pi}{4\omega} = 11.2 \text{ ms}.$$

(c) Comparando os itens (a) e (b) vemos que a corrente está atrasada de $\pi/2$ radianos em relação à fem, de modo que o elemento no circuito é certamente um *indutor*.
(d) A amplitude I da corrente está relacionada com a amplitude V da voltagem através da relação $V_L = IX_L$, onde $X_L = \omega L$ é a reatância indutiva. Como a diferença de fase é *exatamente* $\pi/2$ radianos, temos certeza que existe apenas *um* elemento no circuito que, como determinado acima, é um indutor. Assim sendo, a diferença de potencial através de tal elemento deve coincidir com a amplitude do gerador de fem, ou seja, $V_l = \mathcal{E}$. Portanto $\mathcal{E} = I\omega L$ e

$$L = \frac{\mathcal{E}_m}{I\omega} = \frac{30}{(620 \times 10^{-3})(350)} = 0.138 \text{ H}.$$

P 36-12.

▶

36.2.2 O circuito RLC série – (13/28)

P 36-13. (a) Calcule novamente todas as grandezas pedidas no Exemplo 36-3, pág. 298, supondo que o capacitor tenha sido retirado e todos os outros parâmetros tenham sido mantidos. (b) Desenhe em escala um diagrama de fasores semelhantes ao indicado na Fig. 36-6c para esta nova situação.

► **(a)** Supondo $X_C = 0$ e mantendo inalterados R e X_L temos

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{(160)^2 + (87.6)^2} = 182\,\Omega,$$

$$I = \frac{\mathcal{E}_m}{Z} = \frac{36}{182} = 0.198 \text{ A}$$

$$\begin{aligned}\phi &= \tan^{-1}\Big(\frac{X_L - X_C}{R}\Big)\\ &= \tan^{-1}\Big(\frac{86.7 - 0}{160}\Big) = 28.5^o.\end{aligned}$$

(b) Diagrama de fasores:

P 36-14. (a) Calcule novamente todas as grandezas pedidas no Exemplo 36-3, pág. 298, supondo que o indutor tenha sido retirado e todos os outros parâmetros tenham sido mantidos. (b) Desenhe em escala um diagrama de fasores semelhantes ao indicado na Fig. 36-6c para esta nova situação.

► **(a)** Supondo $X_L = 0$ e mantendo inalterados R e X_C temos

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{(160)^2 + (177)^2} = 239\,\Omega,$$

$$I = \frac{\mathcal{E}_m}{Z} = \frac{36}{239} = 0.151 \text{ A}$$

$$\begin{aligned}\phi &= \tan^{-1}\Big(\frac{X_L - X_C}{R}\Big)\\ &= \tan^{-1}\Big(\frac{0 - 177}{160}\Big) = -47.9^o.\end{aligned}$$

(b) Diagrama de fasores:

P 36-15. (a) Calcule novamente todas as grandezas pedidas no Exemplo 36-3, pág. 298, para $C = 70\ \mu$F, os outros parâmetros sendo mantidos inalterados. (b) Desenhe em escala um diagrama de fasores semelhantes ao indicado na Fig. 36-6c para esta nova situação e compare os dois diagramas.

► **(a)** A reatância capacitiva é

$$\begin{aligned}X_C &= \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}\\ &= \frac{1}{2\pi(60)(70\times 10^{-6})}\\ &= 37.9\,\Omega.\end{aligned}$$

A reatância indutiva continua sendo $86.7\ \Omega$, enquanto que a nova impedância passa a ser

$$\begin{aligned}Z &= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}\\ &= \sqrt{160^2 (37.9 - 86.7)^2} = 167\,\Omega.\end{aligned}$$

A amplitude de corrente é

$$I = \frac{\mathcal{E}_m}{Z} = \frac{36}{167} = 0.216 \text{ A}.$$

Finalmente, o novo ângulo de fase é

$$\begin{aligned}\phi &= \tan^{-1}\Big(\frac{X_L - X_C}{R}\Big)\\ &= \tan^{-1}\Big(\frac{86.7 - 37.9}{160}\Big) = 17^o.\end{aligned}$$

(b) As amplitudes de voltagem são

$$V_R = IR = (0.216)(160) = 34.6 \text{ V},$$

$$\begin{aligned} V_L &= IX_L = (0.216)(86.7) = 18.7 \text{ V}, \\ V_C &= IX_C = (0.216)(37.9) = 8.19 \text{ V}. \end{aligned}$$

Observe que $X_L > X_C$, de modo que $\mathcal{E}_m$ está à frente de I no diagrama de fasores mostrado aqui:

P 36-17.

▶ Da Fig. 36-11 vemos que as componentes da impedância são $Z_x = R$ e $Z_y = X_C - X_L$. Portanto

$$Z = \sqrt{Z_x^2 + Z_y^2} = \sqrt{R^2 + (X_C - X_L)^2}$$

e

$$\tan\phi = -\frac{Z_y}{Z_x} = \frac{X_L - X_C}{R},$$

que coincidem com as Eqs. 36-23 e 36-26.

P 36-18 A amplitude da voltagem através de um indutor num circuito RLC pode ser maior do que a amplitude da fem do gerador? Considere um circuito RLC em série com: $\mathcal{E}_m = 10$ V; $R = 10$ Ω; $L = 1$ H e $C = 1$ μF. Determine a amplitude da voltagem através do indutor na ressonância.

▶ A amplitude da voltagem através do indutor num circuito RLC em série é dada por $V_L = IX_L$, com $X_L = \omega L$. Na ressonância temos $\omega = 1/\sqrt{LC}$ e, portanto,

$$X_L = \frac{L}{\sqrt{LC}} = \frac{1.0}{\sqrt{(1.0)(1.0\times 10^{-6})}} = 1000\;\Omega.$$

Na ressonância temos $X_L = X_C$ que, de acordo com a Eq. 36-23, nos fornece uma impedância $Z = R$ e, conseqüentemente,

$$I = \frac{\mathcal{E}_m}{Z} = \frac{\mathcal{E}_m}{R} = 1 \text{ A}.$$

Assim, temos

$$V_L = IX_L = (1.0)(1000) = 1000 \text{ V}.$$

P 36-19.

▶ A resistência da bobina satifaz

$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R},$$

de onde se tira facilmente que

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\tan\phi}\Big(\omega L - \frac{1}{\omega C}\Big) \\ &= \frac{1}{\tan 75^o}\Big[2\pi(930)(0.088) \\ &\qquad - \frac{1}{2\pi(930)(0.94\times 10^{-6})}\Big] \\ &= 89\;\Omega. \end{aligned}$$

P 36-20.

▶ **(a)** A voltagem através do gerador é 36 Volts, por definição.
(b)

$$V_R = IR\cos\phi = (0.196)(160)\cos 29.4^o = 27.3 \text{ V}.$$

(c) Considere o diagrama de fasores abaixo:

deste diagrama vemos facilmente que

$$\begin{aligned} V_C &= IX_C \text{ sen } \phi \\ &= (0.196)(177) \text{ sen } 29.4^o \\ &= 17.0 \text{ V}. \end{aligned}$$

(d) Analogamente:

$$\begin{aligned} V_L &= -IX_L \text{ sen } \phi \\ &= -(0.196)(86.7) \text{ sen } 29.4^o \\ &= -8.3 \text{ V}. \end{aligned}$$

(e)

$$V_R + V_C + V_L = 27.3 + 17.0 - 8.3 = 36.0 \text{ V} \equiv \mathcal{E}_m,$$

de modo que a lei das malhas é satisfeita.

P 36-21 Num circuito RLC como o da Fig. 36-2, $R = 5\ \Omega$, $C = 20\ \mu$F, $L = 1.0$ H e $\mathcal{E}_m = 30$ V. **(a)** Para que freqüência angular ω_0 a corrente terá seu valor máximo, como nas curvas de ressonância da Fig. 35-6? **(b)** Qual é este valor máximo? **(c)** Quais são as duas freqüências angulares ω_1 e ω_2 para as quais a amplitude da corrente é igual à metade desse valor máximo? **(d)** Qual é a meia-largura fracional [$= (\omega_1 - \omega_2)/\omega_0$] da curva de ressoância?

▶ **(a)** Para uma dada amplitude $\mathcal{E}_M$ do gerador de fem, a amplitude I da corrente é

$$I = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}.$$

Para encontrar o valor máximo de I, resolveremos a equação $dI/d\omega = 0$, ou seja,

$$\frac{dI}{d\omega} = -\frac{\mathcal{E}_m}{Z^{3/2}}\left[\omega L - \frac{1}{\omega C}\right]\left[L + \frac{1}{\omega^2 C}\right] = 0.$$

O único fator que pode anular-se é $\omega L - 1/(\omega C)$ o que acontece para $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Para o circuito dado encontramos

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 224 \text{ rad/s}.$$

(b) Para tal valor (ressonância!) a impedância é $Z = R$ e o máximo da corrente é

$$I = \frac{\mathcal{E}_m}{R} = \frac{30}{5} = 6 \text{ A}.$$

(c) Queremos determinar os valores de ω para os quais $I = \mathcal{E}_m/(2R)$, ou seja, para os quais

$$\frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{\mathcal{E}_m}{2R},$$

ou seja,

$$R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = 4R^2.$$

Desta equação obtemos

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = 3R^2$$

que, após extrairmos a raiz quadrada e multiplicarmos por ωC, fornece

$$LC\,\omega^2 \pm \sqrt{3}\,CR\,\omega - 1 = 0,$$

onde $\pm$ indica os dois possíveis sinais da raiz quadrada. Como temos *duas* equações quadráticas, em princípio temos 4 raízes. Entretanto, somente admitimos raízes positivas o que nos fornece então duas soluções. A menor raiz é

$$\omega_2 = \frac{-\sqrt{3}\,CR + \sqrt{3C^2R^2 + 4LC}}{2LC} = 219 \text{ rad/s},$$

enquanto que a maior raiz é

$$\omega_1 = \frac{+\sqrt{3}\,CR + \sqrt{3C^2R^2 + 4LC}}{2LC} = 228 \text{ rad/s},$$

(d) Com isto tudo, a meia-largura fracional pode agora ser facilmente determinada:

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_0} = \frac{228 - 219}{224} = 0.039\ .$$

P 36-23

▶ **(a)** O ângulo de fase é

$$\begin{aligned}\phi &= \tan^{-1}\left(\frac{V_L - V_C}{V_R}\right)\\ &= \tan^{-1}\left(\frac{V_L - V_L/2}{V_L/2}\right)\\ &= \tan^{-1} 1.0 = 45^o\end{aligned}$$

(b) Como $\mathcal{E}_m \cos\phi = IR$, obtemos

$$R = \frac{\mathcal{E}_m \cos\phi}{I} = \frac{30\ \cos 45^o}{0.3} = 70.7\ \Omega.$$

P 36-26.

▶ Como a impedância do voltímetro é elevada, ele não irá afetar a impedância do circuito quando ligado em paralelo em cada um dos casos. Portanto, a leitura será 100 Volts em todos três casos.

P 36-27. Mostre que a meia-largura fracional de uma curva de ressonância (veja o Problema 21) é dada aproximadamente por

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{3C}{L}}\,R,$$

onde ω é a freqüência angular na ressonância e $\Delta\omega$ é a largura da curva de ressonância na metade da amplitude máxima. Note que $\Delta\omega/\omega_0$ diminui com R, como mostra a Fig. 35-6. Use esta fórmula para conferir a resposta do Problema 21d.

▶ Usando ω_1 e ω_2 obtidos no Problema 21, determinamos que

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\omega}{\omega_0} &= \frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_0} = \frac{2\sqrt{3}\,CR\sqrt{LC}}{2LC} \\ &= R\sqrt{\frac{3C}{L}} \\ &= (5.0)\sqrt{\frac{3(20.0\times 10^{-6})}{1.0}} \\ &= 0.0387 \simeq 0.04\ .\end{aligned}$$

P 36-28*. O gerador de CA na Fig. 36-12 fornece 120 V (rms) a 60 Hz. Com a chave aberta, como no diagrama, a corrente está avançada de 20^o sobre a fem do gerador. Com a chave na posição 1, a corrente está atrasada de 10^o, sobre a fem do gerador. Quando a chave está na posição 2 a corrente é de 2 A (rms). Determine os valores de R, L e C.

▶ São pedidas três grandezas e são dadas três situações diferentes. A tarefa, portanto, consiste em usar as três posições da chave para obter um sistema com três equações e resolve-lo.

Chave aberta: Temos um circuito "série" contendo R, L e C, para o qual sabemos que

$$\tan\phi = \frac{V_L - V_C}{R} = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R} = \tan(-20^o). \tag{1}$$

Chave na posição 1: Neste caso continuamos a ter um circuito série, porém agora contendo um capacitor equivalente $C_{\text{eq}} = 2C$. Portanto

$$\tan\phi_1 = \frac{\omega L - 1/(\omega 2C)}{R} = \tan 10^o. \tag{2}$$

Chave na posição 2: Neste caso o circuito é um oscilador LC, para o qual temos, conforme a Eq. (36-22),

$$I = \frac{\mathcal{E}_m}{Z} = \frac{120}{\sqrt{(\omega L)^2 + 1/(\omega C)^2}} = 2. \tag{3}$$

Resolução das três equações: Usando as duas primeiras equações, vemos que

$$\begin{aligned} R\tan\phi_1 - R\tan\phi &= \frac{1}{2\omega C} \\ R\tan\phi_1 - \frac{1}{2}R\tan\phi &= \frac{\omega L}{2}.\end{aligned}$$

Tais expressões nos fornecem

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega C} &= 2R\Big(\tan\phi_1 - \tan\phi\Big) \equiv A\ R \\ \omega L &= 2R\Big(\tan\phi_1 - \frac{1}{2}\tan\phi\Big) \equiv B\ R,\end{aligned}$$

onde introduzimos as abreviações

$$\begin{aligned} A &\equiv 2\big(\tan\phi_1 - \tan\phi\big) \\ &= 2\big(\tan 10^o - \tan(-20^o)\big) = 1.08059 \\ B &\equiv 2\big(\tan\phi_1 - \frac{1}{2}\tan\phi\big) \\ &= 2\big(\tan 10^o - \frac{1}{2}\tan(-20^o)\big) = 0.71662\end{aligned}$$

As expressões acima nos mostram que assim que conhecermos R, conheceremos C e L também. Da equação (3) obtemos

$$\frac{\mathcal{E}_m^2}{I^2} = Z^2 = R^2\big(A^2 + B^2\big),$$

expressão da qual tiramos R facilmente:

$$R = \frac{\mathcal{E}_m}{I\sqrt{A^2+B^2}} = 46.27\ \Omega$$

Tendo o valor R, das expressões acima vemos que

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{\omega AR} = \frac{1}{(60)AR} = ???? \\ L &= \frac{BR}{\omega} = \frac{BR}{60} = ????\end{aligned}$$

Falta revisar e terminar o cálculo dos números... :-))

36.2.3 Potência em circuitos de corrente alternada – (29/43)

E 36-29. Qual o valor máximo de uma voltagem, num circuito de CA, cujo valor médio quadrático é de 100 Volts?

▶ Da Eq. (36-30) vemos que

$$V_{\text{max}} = \sqrt{2}\ V_{\text{rms}} = \sqrt{2}\ 100 = 141\ \text{V}.$$

E 36-30. Que corrente contínua produzirá, num certo resistor, uma quantidade de calor igual à produzida por uma corrente alternada cujo valor máximo é de 2.6 A.

▶ A potência média dissipada em R por uma corrente alternada é dada pela Eq. 36-29: $P_{\text{méd}} = I^2_{\text{rms}}R$. Como $I_{\text{méd}} = I/\sqrt{2}$, onde I é a amplitude de corrente, podemos escrever, de acordo com a Eq. 36-30, que $P_{\text{méd}} = I^2\,R/2$. A potência dissipada no mesmo resistor por uma corrente contínua i é $P = i^2R$ e, conseqüentemente, igualando-se os dois valores da potência e resolvendo para i obtemos

$$i = \frac{I}{\sqrt{2}} = \frac{2.6}{\sqrt{2}} = 1.84 \text{ A}.$$

E 36-34.

▶ **(a)** Da Eq. 36-23 obtemos

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = 12.1\,\Omega.$$

(b) Das Eqs. 36-31 e 36-32, temos:

$$P_{\text{méd}} = \frac{\mathcal{E}^2_{\text{rms}}}{Z}\,\cos\phi,$$

que, usando relações da Seção 36-5, fornece

$$\cos\phi = \frac{R}{Z} = \frac{12}{12.1} = 0.9917.$$

Portanto,

$$P_{\text{méd}} = \frac{120^2}{12.1}(0.9917) = 1.18 \text{ kW}.$$

E 36-35.

▶

$$\begin{aligned} I_{\text{rms}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{rms}}}{Z} &= \frac{\mathcal{E}_{\text{rms}}}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \\ &= \frac{420}{\sqrt{(45)^2 + (32)^2}} \\ &= 7.61 \text{ A}. \end{aligned}$$

P 36-36. Mostre matematicamente, em vez de graficamente como na Fig. 36-8b, que o valor médio de $\text{sen}^2(\omega t - \phi)$ sobre um número inteiro de ciclos é igual a $1/2$.

▶ O valor médio pedido é

$$\begin{aligned} <\ \text{sen}^2 > &\equiv \frac{1}{nT/2}\int_0^{\frac{nT}{2}} \text{sen}^2(\omega t - \phi)dt \\ &= \frac{2}{nT}\int_0^{\frac{nT}{2}} \frac{1 - \cos(2\omega t - 2\phi)}{2}dt \\ &= \frac{2}{nT}\Big[\frac{t}{2} - \frac{1}{4\omega}\,\text{sen}(2\omega t - 2\phi)\Big]_0^{\frac{nT}{2}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\text{sen}(n\omega T - 2\phi) + \text{sen}(2\phi)}{2n\omega T}. \end{aligned}$$

Como $n\omega T = n\omega(2\pi/\omega) = 2n\pi$, é fácil ver que

$$\text{sen}(n\omega T - 2\phi) = \text{sen}(2n\pi - 2\phi) = -\,\text{sen}(2\phi),$$

e que, portanto, $\text{sen}(n\omega T - 2\phi) + \text{sen}(2\phi) = 0$, o que fornece, finalmente,

$$<\ \text{sen}^2 >= \frac{1}{2}.$$

P 36-39. Na Fig. 36-13 mostre que a taxa média com que a energia é dissipada na resistência R é máxima quando $R = r$, onde r é a resistência interna do gerador de CA. Até o momento, tínhamos considerado tacitamente que $r = 0$.

▶ Como

$$P_R = i^2R = \Big(\frac{\mathcal{E}_m}{r + R}\Big)^2 R,$$

para minimizar P_R precisamos igualar dP_R/dR a zero, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{dP_R}{dR} &= \frac{\mathcal{E}^2_m[(r + R)^2 - 2(r + R)R]}{(r + R)^4} \\ &= \frac{\mathcal{E}^2_m(r - R)}{(r + R)^3} = 0, \end{aligned}$$

o que fornece $R = r$.
Nota: certifique-se que $R = r$ realmente *maximiza* P_R, verificando que $d^2P_R/dR^2 < 0$.

P 36-40. A figura abaixo mostra um gerador de CA ligado a uma "caixa-preta" através de dois terminais. A caixa-preta contém um circuito RLC, possivelmente até mesmo um circuito com muitas malhas, cujos elementos e ligações não conhecemos. Medidas realizadas pela parte externa da caixa revelam o seguinte resultado:

$$\mathcal{E}(t) = (75\text{ V})\text{ sen }\omega t$$

$$i(t) = (1.2\text{ A})\text{ sen }(\omega t + 42^o).$$

(a) Calcule o fator de potência do circuito. **(b)** A corrente está atrasada ou adiantada em relação à fem? **(c)** No circuito da caixa-preta a predominância é indutiva ou capacitiva? **(d)** O circuito da caixa está em ressonância? **(e)** Deve haver um capacitor na caixa? um indutor? um resistor? **(f)** Qual é a potência que o gerador fornece para a caixa-preta? **(g)** Por que não se precisa saber o valor de ω para responder a todas estas questões?

► **(a)** $\phi = -42^o$, o que dá $\cos\phi = 0.743$;
(b) Como $\phi < 0$, temos que $\omega t - \phi > \omega t$ e, portanto, a corrente está na frente da fem;
(c) tg $\phi = (X_L - X_C)/R =$ tg $42^o = -0.49$. Portanto $X_C > X_L$, sendo o circuito predominantemente *CAPACITIVO*.
(d) Em ressonância teríamos $X_L = X_C$, implicando que tg $\phi = 0$, ou seja, que $\phi = 0$. Como $\phi \neq 0$, *não* existe ressonância;
(e) Como o valor da tangente de ϕ é negativo e finito, temos $X_C \neq 0$ bem como $R \neq 0$, o valor de X_L não precisa ser zero. Porém ele pode eventualmente ser zero. Se existir $X_L \neq 0$ então é necessário que $X_L < X_C$!!
(f)

$$\begin{aligned} P_{\text{méd}} &= \frac{1}{2}\mathcal{E}_m I \cos\phi \\ &= \mathcal{E}_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos\phi \\ &= \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{2}}\frac{I}{\sqrt{2}}\cos\phi \\ &= \frac{1}{2}\,75 \times (1.2) \times (0.743) \approx 33.4 \text{ W}. \end{aligned}$$

(g) É que as grandezas dependem de ω apenas através de ϕ, que é DADO. Se tivessem sido dados valores para R, L, C então sim iríamos precisar ter ω para calcular o fator de potência.

36.2.4 O transformador – (44/48)

$\boxed{\textbf{E 36-44.}}$ Um gerador fornece 100 V ao enrolamento primário, com 50 espiras, de um transformador. Sabendo-se que o enrolamento secundário possui 500 espiras, qual a voltagem no secundário?

► Use $V_s N_p = V_p N_s$ para obter

$$V_s = V_p\Big(\frac{N_s}{N_p}\Big) = 100\Big(\frac{500}{50}\Big) = 1000 \text{ Volts.}$$

$\boxed{\textbf{E 36-45.}}$ Um transformador possui 500 espiras no primário e 10 espiras no secundário. **(a)** Sabendo-se que V_p é 120 V (mrs), qual é o valors de V_s, supondo o circuito aberto? **(b)** Ligando-se o secundário a uma carga resistiva de 15 Ω, quais serão as correntes no primário e no secundário?

► **(a)**

$$V_s = V_p\Big(\frac{N_s}{N_p}\Big) = 120\Big(\frac{10}{500}\Big) = 2.4 \text{ V.}$$

(b)

$$I_s = \frac{V_s}{R_s} = \frac{2.4 \text{ V}}{15\ \Omega} = 0.16 \text{ A.}$$

e

$$I_p = I_s\Big(\frac{N_s}{N_p}\Big) = 0.16\Big(\frac{10}{500}\Big) = 3.2 \times 10^{-3} \text{ A.}$$

$\boxed{\textbf{E 36-46.}}$ A Fig. 36-17 mostra um "autotransformador". Ele é formado por uma única bobina (com um núcleo de ferro). Três "derivações" são estabelecidas. Entre as derivações T_1 e T_2 existem 200 espiras e entre as derivações T_2 e T_3 existem 800 espiras. Duas derivações quaisquer podem ser consideradas os "terminais do primário" e duas derivações quaisquer podem ser consideradas os "terminais do secundário". Escreva todas as relações pelas quais a voltagem primária pode ser transformada numa voltagem secundária.

► **Conexões que aumentam a voltagem:**
(1) Usando T_1T_2 como primário e T_1T_3 como secundário:

$$\frac{V_{13}}{V_{12}} = \frac{800+200}{200} = 5$$

.
(2) Usando T_1T_2 como primário e T_2T_3 como secundário:

$$\frac{V_{23}}{V_{12}} = \frac{800}{200} = 4$$

.
(3) Usando T_2T_3 como primário e T_1T_3 como secundário:

$$\frac{V_{13}}{V_{23}} = \frac{800+200}{800} = 1.25$$

.
Conexões que diminuem a voltagem:
Intercambiamdo-se o primário e o secundário para cada um dos casos acima obtemos os seguintes fatores de transformação: **(1)** $1/5 = 0.2$; **(2)** $1/4 = 0.25$; e **(3)** $1/1.25 = 0.8$.

P 36-47. Um gerador de CA fornece energia para uma carga resistiva numa fábrica longínqua através de uma linha de transmissão com dois cabos. Na fábrica, um transformador que reduz tensão diminui a voltagem (rms) da linha de transmissão do valor V_t para um valor menor, seguro e conveniente para ser usado na fábrica. A resistência da linha de transmissão vale 0.30 Ω/cabo e a potência é 250 kW. Calcular a queda de voltagem ao longo da linha de transmissão e a taxa em que a energia é dissipada na linha como energia térmica quando (a) $V_t = 80$ kV, (b) $V_t = 8$ kV e (c) $V_t = 0.8$ kV. Comente a aceitabilidade de cada escolha.

▶ **(a)** A corrente rms no cabo é

$$I_{\text{rms}} = \frac{P}{V_t} = \frac{250 \times 10^{-3}}{80 \times 10^3} = 3.125 \text{ A}.$$

A queda rms de voltagem é

$$\Delta V = I_{\text{rms}} R = (3.125)(2)(0.30) = 1.9 \text{ V},$$

enquanto que a taxa de dissipação é

$$P_d = I_{\text{rms}}^2 R = (3.125)^2(2)(0.30) = 5.85 \text{ W}.$$

(b) Neste caso a corrente rms no cabo é

$$I_{\text{rms}} == \frac{250 \times 10^{-3}}{8 \times 10^3} = 31.25 \text{ A}.$$

de modo qe a queda rms de voltagem é

$$\Delta V = (31.25)(2)(0.30) = 19 \text{ V},$$

e a taxa de dissipação é

$$P_d = (31.25)^2(2)(0.30) = 0.585 \text{ kW}.$$

(c) Agora a corrente rms no cabo é

$$I_{\text{rms}} == \frac{250 \times 10^{-3}}{0.8 \times 10^3} = 312.5 \text{ A}.$$

de modo qe a queda rms de voltagem é

$$\Delta V = (312.5)(2)(0.30) = 0.19 \text{ kV},$$

e a taxa de dissipação é

$$P_d = (312.5)^2(2)(0.30) = 58.5 \text{ kW}.$$

Deste números fica claro que tanto a taxa de dissipação de energia quanto a queda de voltagem aumentam a medida que V_t decresce. Portanto, para minimizar estes efeitos, a melhor escolha dentre as três oferecidas é usar-se $V_t = 80$ kV.

P 36-48. *Casamento de Impedâncias.* Na Fig. 36-13, suponha que a caixa retangular da esquerda represente a saída de um amplificador de áudio (alta impedância) com $r = 1000$ Ω. Suponha que $R = 10$ Ω represente a bobina de um alto-falante (baixa impedância). Sabemos que que a transferência máxima de energia para a carga R ocorre quando $R = r$, mas isto não é verdadeiro neste caso. Entretanto, um transformador pode ser usado para "transformar" resistências, fazendo com que se comportem eletricamente como se fossem maiores ou menores do que realmente são. Projete as bobinas primária e secundária de um transformador que deve ser introduzido entre o "amplificador" e o "alto-falante", na Fig. 36-13, para que haja o "casamento das impedâncias". Qual deve ser a razão entre os números de espiras?

▶ Temos que o amplificador é conectado no primário do transformador enquanto que o resitor R é conectado no secundário. Sendo I_s a corrente rms no secundário, temos que a potência média fornecida ao resistor R é $P_{\text{med}} = I_s^2 R$. Sabemos que $I_s = (N_p/N_s) I_p$, onde N_p e N_s representam o número de voltas do primário e do secundário, respectivamente. I_p representa a corrente rms no primário. Portanto

$$P_{\text{med}} = \left(\frac{I_p N_p}{N_s}\right)^2 R.$$

Agora desejamos determinar a corrente no primário, que consiste de um gerador com duas resistências em série. Uma das resistências é a resitência r do amplificador, enquanto que a outra a resistência equivalente R_{eq} que representa o efeito do circuito secundário no circuito primário. Portanto, $I_p = \mathcal{E}/(r + R_{\text{eq}})$, onde $\mathcal{E}$ é a fem rms do amplificador. De acordo com a Eq. 36-38, $R_{\text{eq}} = (N_p/N_s)^2 R$, de modo que

$$I_p = \frac{\mathcal{E}}{r + (N_p/N_s)^2 R}$$

e

$$P_{\text{med}} = \frac{\mathcal{E}^2 (N_p/N_s)^2 R}{[r + (N_p/N_s)^2 \; R]^2}.$$

Desejamos encontrar o valor de N_p/N_s para o qual P_{med} seja mínimo. Introduzindo uma variável auxiliar $x = (N_p/N_s)^2$, temos

$$P_{\text{med}} = \frac{\mathcal{E}^2 x R}{(r + xR)^2}.$$

de modo que

$$\frac{dP_{\text{med}}}{dx} = \frac{\mathcal{E}^2 R (r - xR)}{(r + xR)^3},$$

que é zero para $x = r/R = 1000/10 = 100$. Observe que para x pequeno, P_{med} cresce linearmente com x e que para x grande P_{med} decresce proporcionalmente a $1/x$. Portanto $x = r/R$ é de fato um máximo, não um mínimo.

Como $x = (N_p/N_s)^2$, vemos que a potência máxima é alcançada para $(N_p/N_s)^2 = 1000$, ou seja, quando

$$\frac{N_p}{N_s} = 10.$$