

Tópico: Equações Diferenciais Ordinárias - Problemas de Valores de Contornos

[C] Equações diferenciais regem todos os fenômenos físicos, além de poderem representar a dinâmica de sistemas econômicos, ecológicos, etc...

[C] Uma equação diferencial é uma equação que envolve derivadas de funções de uma ou mais variáveis independentes.

[E] Vejamos alguns exemplos:

$$(1) \quad x = x(t), \quad v = \frac{dx}{dt} = x', \quad a = \frac{d^2x}{dt^2} = x''.$$

A segunda Lei de Newton é:

$$F = ma = mx'' \Rightarrow x'' - \frac{F}{m} = 0$$

onde podemos ter $F = F(x, t)$, sendo t a variável independente e x a variável dependente.

$$(2) \quad U = U(x, t).$$

A equação de onda para a função U é:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (1D)$$

sendo que v é a velocidade da onda, x e t são as variáveis independentes e U é a variável dependente.

[C] Se uma equação diferencial tem apenas uma variável independente, como o ex. (1) acima, então ela é uma “equação diferencial ordinária” (EDO).

[C] Se a equação diferencial envolve mais de uma variável independente, como o ex. (2) acima, então ela é uma “equação diferencial parcial”.

[C] Uma “solução” de uma EDO é uma função da variável independente que satisfaça a equação.

[E] Exemplo de soluções:

$$(i) \quad \frac{dy}{dx} = y \Rightarrow y = ae^x, \quad a \in \mathfrak{R}.$$

$$(ii) \quad U''' = 0 \Rightarrow U \text{ é qualquer polinômio de } 2^\circ \text{ grau.}$$

[C] Uma equação diferencial possui uma família de soluções e não apenas uma solução.

[C] A “ordem” de uma equação diferencial é a mais alta ordem de derivação que aparece na equação.

[C] Em geral, uma equação de ordem n requer m condições adicionais a fim de ter uma única solução (dentro da família de soluções possíveis).

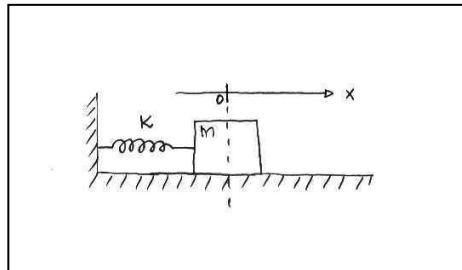
[C] Se, em problemas envolvendo EDOs de ordem m , $m \geq 2$, as m condições fornecidas para busca de uma solução única não são todas dadas num mesmo ponto (ou seja, para um mesmo valor da variável independente), então temos um “problema de valor de contorno” (PVC).

[E] Um exemplo de PVC é o de um objeto de massa M preso a uma parede por uma mola de constante K em que as $m=2$ condições para x (a variável dependente) são dadas para dois diferentes valores de t (a variável independente). Este exemplo é descrito pelo seguinte problema de contorno:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{K}{M} x = 0$$

$$x(0) = A$$

$$x(\tau/2) = -A$$



sendo que A é um número dado (portanto é um valor que se conhece), $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}$. x é a posição do objeto e t o tempo.

[E] O exemplo de PVC que veremos no tutorial é:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 4 \left(\frac{dy}{dx} \right) + 4 y = \frac{e^{2x}}{x^2}$$

$$y(1) = 0$$

$$y(e) = -e^{2e}$$

Agradecimento: ao Filipe Lima, que digitou a primeira versão deste texto.