Variáveis Complexas – Aula 05

Profª Drª Emília de M. Rosa Marques
Departamento de Matemática

EXPONENCIAL

Da Análise Real temos que: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Na primeira equação, fazendo-se $x = 1$ temos: $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$

Se, porém, substituirmos formalmente o valor x pelo número imaginário puro $z = iy$, temos:

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \frac{(iy)^6}{6!} + \frac{(iy)^7}{7!} + \ldots = \\ &= 1 + iy - \frac{(y)^2}{2!} - i\frac{(y)^3}{3!} + \frac{(y)^4}{4!} + i\frac{(y)^5}{5!} - \frac{(y)^6}{6!} - i\frac{(y)^7}{7!} + \ldots = \\ &= \left(1 - \frac{(y)^2}{2!} + \frac{(y)^4}{4!} - \frac{(y)^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(y - \frac{(y)^3}{3!} + \frac{(y)^5}{5!} - \frac{(y)^7}{7!} + \ldots\right) = \\ &= \cos(y) + i\operatorname{sen}(y) \end{aligned}$$

Estes cálculos são formais, servem apenas como motivação para a seguinte **definição:**

$$\exp(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x\left(\cos(y) + i\operatorname{sen}(y)\right)$$

PROPRIEDADES DA EXPONENCIAL:

Utilizando as propriedades das funções reais *sen(x)*, *cos(x)*, $\exp(x) = e^x$ e a definição da função exponencial dada, obtemos as seguintes propriedades:

1) $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$;

2) $e^{-z} = 1/e^z$;

3) $\left(e^z\right)^n = e^{nz}$, n inteiro;

4) $e^z \neq 0, \forall z \in C$;

5) $\left|e^z\right| = e^{\operatorname{Re}(z)}$;

6) $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i$, k inteiro;

Exercícios: **1.** Demonstre cada uma das propriedades.

2. Reescreva, utilizando a definição de exponencial complexa, isto é, determine $w \in C$, tal que $z = exp(w)$.

a) $z = 1 + i$

b) $z = 1 - i$

c) $z = 1 - i\sqrt{3}$

d) $z = \sqrt{3} + i$

e) $z = \frac{i}{1+i}$

f) $z = -\sqrt{3} - i$