

CONJUNTO DE PONTOS NO PLANO COMPLEXO

- **Bola Aberta:** $B_r(z_0) = \{z \mid |z - z_0| < r\}$
- **Bola Fechada:** $B_r(z_0) = \{z \mid |z - z_0| \leq r\}$
- **Círculo:** $B_r(z_0) = \{z \mid |z - z_0| = r\}$

Definição 1: Um ponto $w \in A$ é chamado **ponto interior** do conjunto A se esse conjunto A contém um disco aberto de centro em w (o disco aberto deve estar todo contido no conjunto A).

Definição 2: Um conjunto qualquer A é dito **aberto** se todos os seus pontos são **pontos interiores**.

Definição 3: Um conjunto qualquer A é dito **fechado** se seu conjunto complementar, no plano, é um conjunto aberto, ou seja, A é fechado $\Leftrightarrow A^c$ é aberto.

Definição 4: Chama-se **fronteira** de um conjunto qualquer A ao conjunto de pontos z tais que qualquer disco aberto centrado em z contém pontos de A e de seu complementar.

Obs: A fronteira de um conjunto A é também fronteira do seu complementar A^c .

Definição 5: Um ponto $w \in A$ é dito **ponto de acumulação** de um conjunto A se qualquer disco aberto centrado em w contém infinitos pontos de A .

Definição 6: Um ponto $w \in A$ é dito **ponto isolado** de um conjunto A se esse ponto não é ponto de acumulação de A .

Definição 7: Um conjunto aberto A é dito **conexo** se e somente se quaisquer dois pontos de A podem ser ligados por um caminho todo contido no conjunto A .

Definição 8: Um conjunto aberto e conexo é chamado de **região do plano**.

Definição 9: Um conjunto A do plano complexo é **limitado** se existe um real positivo K tal que $|z| \leq K, \forall z \in A$.

Definição 10: Um conjunto fechado e limitado é chamado de **conjunto compacto**.

Exercícios

1. Verificar a veracidade de cada frase, justificando sua resposta:

- a. Os pontos interiores de um determinado conjunto **A** não podem ser pontos da fronteira de **A**.
- b. Alguns pontos específicos da fronteira de **A** podem ser também pontos interiores do conjunto ^a
- c. Um conjunto é aberto se e somente se ele não contém pontos de sua fronteira.
- d. Todo ponto de acumulação que não pertence ao conjunto é ponto de sua fronteira.
- e. Um conjunto é fechado se e somente se ele contém todos os seus pontos de acumulação.

2. Descreva e faça os gráficos de cada conjunto de pontos:

a) $\{z \mid |z - 3i| < 5\}$

c) $\{z \mid |z - \frac{1}{2} + i| \leq 2\}$

b) $\{z \mid |z + 3| > 7\}$

d) $\{z \mid |2z + 4 - 3i| \geq 5\}$

3. Represente graficamente cada um dos conjuntos abaixo:

a) $\operatorname{Re}(z) < -3$

e) $|z - 2i| > 2$

b) $|z + 1| \leq 2$

f) $1 < |z + 1 - 2i| \leq 2$

c) $\operatorname{Im}(z) \geq 1$

g) $|z| > 2, |\arg(z)| < \pi$

d) $z \neq 0, 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{3}$

h) $\operatorname{Re}(z^2) > 0$

4. Descreva e faça o gráfico do conjunto do plano dado pela seguinte equação:

$$z = \alpha + (\beta - \alpha)t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

5. Mostre que os conjuntos abaixo são retas:

a) $|z - 2| = |z - 3i|$

b) $|z + 3 - i| = |z - 4i|$

c) $|z - 1 + i| = |1 - i\sqrt{3} + z|$

6. Identifique cada um dos conjuntos de pontos dados abaixo e faça seu respectivo gráfico:

a) $|z - i| + |z + 2| = 3$

b) $|z - 2 + i| + |z| \leq 4$