Profª Drª Emília de M. Rosa Marques
Departamento de Matemática

RAÍZES N-ÉSIMAS DE UM COMPLEXO

O problema de extrair as raízes *n*-ésimas $(z)^{1/n}$ de um número complexo $z \in C$ é o de resolver a equação $(z_0)^n = z$, para $z_0 \in C$, quando *z* e o número inteiro positivo *n* são dados. Seja $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, a forma polar de *z*, $z \neq 0$. Podemos escrever $z_0 = r_0(\cos\theta_0 + i \operatorname{sen}\theta_0)$, sendo r_0 e θ_0 as incógnitas. Assim reescrevendo a equação temos: $(r_0)^n(\cos n\theta_0 + i \operatorname{sen} n\theta_0) = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$. Conseqüentemente:

$$(r_0)^n = r,\ n\theta_0 = \theta \pm 2k\pi,\ k \in Z.$$

Temos portanto *n* soluções distintas da equação $(z_0)^n = z$, ou seja, existem *n* raízes do número complexo $z \in C$, a saber,

$$z_i = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right),$$ para

$0 \le k = i \le n-1$.

Quando $z = 0$, a equação $(z_0)^n = z$ tem uma única solução $z_0 = 0$. Isto é $0^{1/n} = 0$.

Sabemos que $1 = \cos 0 + i\operatorname{sen} 0$, assim as raízes *n*-ésimas de 1 (da unidade) podem ser descritas como:

$$z_i = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right),\ k = 0,1,\ldots,n-1.$$

Obs 01: Em particular, quando $k = 1$ denominamos a raiz correspondente por:

$$\omega = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

Tendo em vista a Fórmula de De Moivre, as raízes da unidade são: 1, $\omega, \omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^{n-1}$.

No plano complexo, as raízes *n*-ésimas da unidade são os vértices do polígono regular de *n* lados, inscrito no círculo $|z| = 1$, com um vértice no ponto $z = 1$.

Exercício 01: Desenhe as raízes 6-ésima da unidade.

Obs 02: Se $z_1 \in C$ é uma raiz *n*-ésima qualquer de $z \in C$, então $z_1, z_1\omega, z_1\omega^2, \ldots, z_1\omega^{n-1}$, são as *n* raízes de $z \in C$.

Obs 03: Sejam $m, n \in N$, sem fator comum, então $(z^m)^{1/n} = \sqrt[n]{r^m}\left(\cos\left(\frac{m\theta}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{m\theta}{n}\right)\right)\omega^h$

e $\left(z^{1/n}\right)^m = \left(\sqrt[n]{r}\right)^m\left[\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n}\right)\right)\omega^h\right]^m$,

$h = 0,1,2,\ldots,n-1$, são iguais, isto é, $(z^m)^{1/n} = \left(z^{1/n}\right)^m$, $\forall z \in C$.

Assim definiremos:

$$z^{m/n} = \sqrt[n]{r^m}\left(\cos\left[\frac{m}{n}(\theta + 2k\pi)\right] + i \operatorname{sen}\left[\frac{m}{n}(\theta + 2k\pi)\right]\right)$$

onde $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Exercício 02: Determine todos os valores das seguintes raízes:

a) $(2i)^{1/2}$

b) $(-i)^{1/3}$

c) $(-1)^{1/3}$