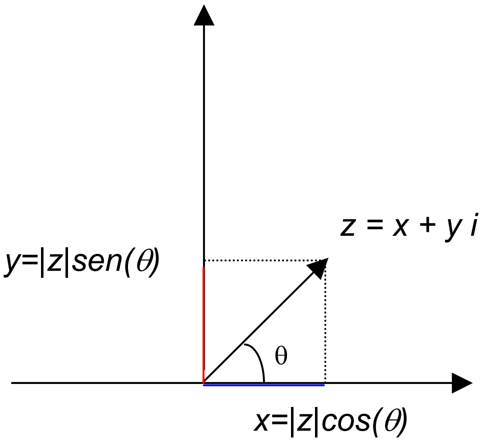
Profª Drª Emília de M. Rosa Marques
Departamento de Matemática

Representação Polar de Números Complexos

Representação Polar: observando a representação geométrica dos números complexos $z \neq 0$, definimos o ***argumento de z*** como sendo o ângulo θ formado pelo eixo **Ox** e o vetor **Oz**.



Obs: 1. Os ângulos são orientados considerando positivo o sentido anti-horário.

2. O argumento de *z* fica bem definido, não considerando os múltiplos inteiros de 2π.

3. Considerando as funções trigonométricas, seno e cosseno, temos que:

$$x = |z|\cos(\theta) \text{ e } y = |z|\operatorname{sen}(\theta).$$

Desta forma pode-se representar os números complexos através da seguinte equação:

$$z = r\left(\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)\right), \quad r = |z|;$$

onde *r* e *θ* designam as **coordenadas polares de *z***.

Produto e Quociente

Considere $z_1 = r_1\left(\cos(\theta_1) + i\operatorname{sen}(\theta_1)\right)$ e $z_2 = r_2\left(\cos(\theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_2)\right)$. a representação polar de dois números complexos quaisquer. Então temos:

$$a)\ z_1 z_2 = r_1 r_2\left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)\right]$$

$$b)\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

Exercício 01: Mostre que as **fórmulas** acima são verdadeiras.

Fórmula de De Moivre

Seja $z = r\left(\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)\right)$, $r = |z|$, um número complexo dado. Então são verdadeiras as equações abaixo:

a) $z^2 = r^2\left(\cos(2\theta) + i\operatorname{sen}(2\theta)\right)$,

b) $z^3 = r^3\left(\cos(3\theta) + i\operatorname{sen}(3\theta)\right)$,

c) $z^n = r^n\left(\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta)\right)$,

d) $z^{-n} = r^{-n}\left(\cos(-n\theta) + i\operatorname{sen}(-n\theta)\right)$

Profª Drª Emília de M. Rosa Marques
Departamento de Matemática

Exercícios:

1. Determine o argumento dos números complexos dados, escreva esses números na forma polar e represente-os geometricamente:

a) $z = -2 + 2i$

b) $z = 1 + i\sqrt{3}$

c) $z = -\sqrt{3} + i$

d) $z = \left(\dfrac{i}{1+i}\right)^5$

e) $z = \dfrac{1}{-1 - i\sqrt{3}}$

f) $z = 4 - i$

g) $z = \dfrac{-4}{\sqrt{3} - i}$

2. Determine as formas polares dos números complexos $z_1 z_2$ e $\dfrac{z_1}{z_2}$, sendo que:

a) $z_1 = \sqrt{3} + 3i$ e $z_2 = \dfrac{3 - i\sqrt{3}}{2}$

b) $z_1 = 1 - i$ e $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$

c) $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 2 + i$

d) $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = \sqrt{3} + i$

e) $z_1 = 1 - i$ e $z_2 = -1 + 2i$

3. Prove que se $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ e $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ então z_1, z_2 e z_3 são os vértices de um triângulo equilátero inscrito no círculo unitário de centro na origem.

Faça um gráfico.