Profª Drª Emília de M. Rosa Marques
Departamento de Matemática

Números Complexos

São comumente estudados nos cursos que tratam de construções numéricas, tais como: números inteiros, racionais e reais. Nossa abordagem será do ponto de vista prático, sem maiores detalhes com a teoria.

Observe a seguinte equação do 2º grau: $ax^2 + bx + c = 0$.

Suas raízes são conhecidas e dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

As raízes são, efetivamente determinadas, no conjunto dos números reais se e somente se $b^2 - 4ac \geq 0$, sendo que a equação possui duas raízes distintas sempre que o valor acima for estritamente positivo.

Quando o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ é negativo, não é possível determinar raízes reais. Considere a seguinte equação: $x^2 - 6x + 13 = 0$. As raízes seriam dadas por: $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 4.1.13}}{2.1} = \dfrac{6 \pm \sqrt{-16}}{2}$.

Vamos operar formalmente , como se $\sqrt{-1}$ fosse um número real, então as raízes seriam $x = 3 \pm 2\sqrt{-1}$. Se substituirmos esses números na equação original teremos a confirmação de que tais números são as raízes da equação considerada.

Logo concluímos que é possível resolver a equação considerada, porém não no conjunto dos números reais. Definimos então a seguinte simbologia $i = \sqrt{-1}$, ou seja, $i^2 = -1$.

Assim temos que as raízes da equação considerada são $x = 3 + 2i$ e $x = 3 - 2i$.

Esse novo elemento é chamado unidade imaginária.

Chamamos de números complexos àqueles formados do seguinte modo: $z = a + bi$, sendo que ***a*** é a chamada **parte real de *z*** e ***b*** a **parte imaginária de *z***.

Assim denominamos conjunto dos números complexos o conjunto descrito da seguinte forma $C = \left\{ a + bi \;\middle|\; a, b \in R,\ i^2 = -1 \right\}$

Operações no Conjunto dos Complexos

Considere os seguintes números complexos $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ e $z_3 = f + gi$.

1) **Igualdade:** $z_1 = z_2 \Leftrightarrow$

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \quad e \quad b = d.$$

2) **Adição:** $z_1 + z_2 =$

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\, i.$$

3) **Multiplicação:**

$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\, i$$

4) **Multiplicação por escalar:**

$$\beta(a + bi) = \beta a + \beta b i,\ \beta \in R.$$

<u>Obs</u>: 1) O conjunto dos complexos com as operações (2) e (3) acima definidas é um corpo.

2) O conjunto dos números reais é então um subcorpo do corpo dos complexos. Basta que consideremos $z = a + bi$ com $b = 0$.

<u>Nomenclatura</u>: Sendo $z = a + bi$ então $\Re e(z) = a$ é parte real de *z* e $\Im m(z) = b$ é parte imaginária de *z*.

<u>O plano complexo</u>: Dado o número complexo $z = x + y\,i$, temos que $x = \Re e(z)\ e\ y = \Im m(z)$.

Chamamos de **plano complexo** o conjunto das representações de todos os números complexos *z* através dos pontos $P = (x, y)$ do plano cartesiano.

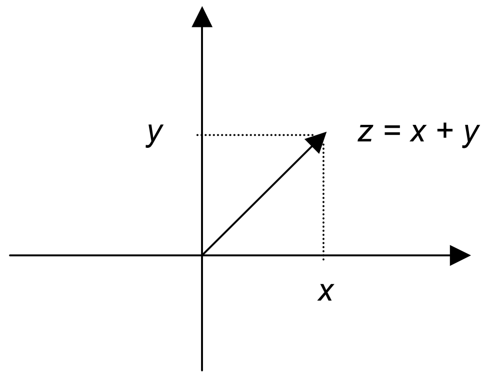
Identificamos os pontos $P = (x, y)$ do plano cartesiano com os números complexos $z = x + y\,i$ e definimos:

$$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c\ e\ b = d$$

$$(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$$

$$(a,b)(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$

<u>Obs</u>: Desta maneira temos que os números reais a são representados pelo par ordenado $(a,0)$ e que a unidade imaginária *i* é representada pelo par $(0,1)$.



No plano complexo temos 4 quadrantes, sendo que:

a) $z = x + y\,i \in Quadrante\ 1 \Leftrightarrow x > 0\ e\ y > 0$

b) $z = x + y\,i \in Quadrante\ 2 \Leftrightarrow x < 0\ e\ y > 0$

c) $z = x + y\,i \in Quadrante\ 3 \Leftrightarrow x < 0\ e\ y < 0$

d) $z = x + y\,i \in Quadrante\ 4 \Leftrightarrow x > 0\ e\ y < 0$

<u>Exercício 01</u>: Se z_1 é um número complexo do 1º quadrante e z_2, um número complexo do 2º quadrante, determine o(s) quadrante(s) onde está o número complexo dado pelo produto $z_1.z_2$.

<u>Exercício 02</u>: Considere o número complexo $z = 3 - 2i$. Represente no plano cartesiano os seguintes números complexos:

a) $w_1 = -\bar{z}$ b) $w_2 = zi$

c) $w_3 = z^2$ d) $w_4 = 2z + \bar{z}$

Profª Drª Emília de M. Rosa Marques
Departamento de Matemática

<u>Módulo de um número complexo</u>: também chamado de **norma de *z*** ou **valor absoluto de *z***, é definido da seguinte maneira: $\left| z \right| = \sqrt{x^2 + y^2}$, para o número complexo $z = x + y\,i$.

O módulo do número complexo representa a distância da origem do plano cartesiano ao ponto $P = (x, y)$ do referido plano.

<u>Número complexo conjugado de *z*</u>: Chamamos de complexo conjugado de $z = x + y\,i$ ao número complexo definido por $\bar{z} = x - y\,i$. Este número é o simétrico de $z = x + y\,i$, com relação ao eixo das abscissas (*eixo-x*).

<u>Propriedades:</u> (Mostre cada uma delas)

1) $z\,\bar{z} = \left| z \right|^2$

2) $\left| z \right| = \left| \bar{z} \right|$

3) $\Re e(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$

4) $\Im m(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2\,i}$

5) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

6) $\overline{z_1\,z_2} = \bar{z}_1\,\bar{z}_2$

7) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

<u>Exercício 03</u>: Reduza à forma $a + bi$ cada uma das expressões dadas abaixo e represente-as no plano cartesiano:

a) $(3 + 5\,i) + (-2 + i)$

b) $(3 - 5\,i)(-2 - 4\,i)$

c) $\left(\sqrt{3} + 2\,i\right) - i\left[2 - i\left(\sqrt{3} + 4\right)\right]$

d) $(4 - 2\,i)^2$

e) $\dfrac{1}{2 + 3\,i}$

f) $\dfrac{1 + i}{3 - 2\,i}$

g) $\dfrac{1 + i}{1 - i}$

h) $\dfrac{3 - i}{2i - 1}$

<u>Exercício 05</u>: Calcule:

a) $(x + y\,i)^2$

b) $(x - y\,i)^2$

c) $(x + y\,i)^2\,(x - y\,i)^2$

<u>Exercício 06</u>: Mostre que:

$$\Im m\left[\frac{\left(1 - i\sqrt{3}\right)^2}{i - 2}\right] = \frac{2\left(1 + 2\sqrt{3}\right)}{5}$$

Bom Trabalho!