ÁLGEBRA DAS MATRIZES – 4100A

AULA 04 – ESCALONAMENTO E INVERSÃO DE MATRIZES

Faculdade de Ciências - Depto de Matemática **Profª Drª Emília M. R. Marques**

MATRIZES ESCALONADAS

Definição: Uma matriz *A* é dita **matriz escalonada** (ou matriz da forma escada) se as condições abaixo são satisfeitas:

a) Todas as linhas nulas, caso haja alguma, estão na base da matriz, isto é, abaixo de todas as linhas não nulas.

b) O primeiro elemento não nulo da linha *i* está numa coluna anterior àquela do primeiro elemento não nulo da linha *j*, sempre que *i < j.*

$$\begin{pmatrix} ** & ** & ** & ** & ** & \dots & ** \\ 0 & 0 & ** & ** & ** & \dots & ** \\ 0 & 0 & 0 & ** & ** & \dots & ** \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & ** \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obs: O primeiro elemento não nulo de cada linha é chamado de **elemento principal** (pivô).

EQUIVALÊNCIA DE MATRIZES, POR LINHA:

Definição: Uma matriz *A* é dita **equivalente por linha** a uma matriz *B*, se a matriz *B* pode ser obtida da matriz *A*, por uma seqüência finita de operações elementares, listadas abaixo:

1. Permutação da linha *i* com a linha *j* . Notação: ($L_i \leftrightarrow L_j$).
2. Multiplicação da linha i por um escalar não nulo α . Notação: ($L_i = \alpha L_i$).
3. Substituição da linha *i* por α vezes a linha *i*, somada à linha *j.* Notação: ($L_i = \alpha L_i + L_j$).

Exercícios:

1. Utilizando as operações elementares transforme as matrizes abaixo em matrizes equivalentes escalonadas:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **c)** $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 3 & -5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Faculdade de Ciências - Depto de Matemática **Profª Drª Emília M. R. Marques**

Inversão de Matrizes:

Como já vimos, as matrizes inversíveis são matrizes quadradas, *m = n*. Desta forma temos que o produto de matrizes será sempre possível, resultando numa matriz quadrada de ordem *n*.

Teorema 01: O determinante de uma matriz inversível é diferente de zero.

Prova:

Se $A \in M_n(R)$ é inversível, então existe $A^{-1} \in M_n(R)$ tal que $A.A^{-1} = I_n$. Sabemos que $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$, logo $\det(A.A^{-1}) = \det(I) = 1$ e portanto

$\det(A).\det(A^{-1}) = 1 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Teorema 02: Uma matriz A é inversível se e somente se, é matriz equivalente da matriz identidade, isto é, $I_n \approx A$. Assim temos que, a mesma sucessão de operações elementares que transformam a matriz *A* na matriz identidade, transformam a matriz identidade na matriz inversa, $A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$.

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{L_3 = -L_1 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{L_3 = L_2 + L_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{L_3 = \frac{1}{3} L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right) \underset{\approx}{L_2 = -L_3 + L_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right) \underset{\approx}{L_1 = L_1 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

Portanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Faculdade de Ciências - Depto de Matemática **Profª Drª Emília M. R. Marques**

Exercícios:

1) Determine as matrizes inversas das matrizes dadas abaixo, caso seja possível:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

e) $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

f) $F = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

g) $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & x^2 \\ 2 & 2 & x^2 \end{pmatrix}$