Sistemas Lineares

Definição 1: Dados $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta \in \mathbb{R}$, damos o nome de **Equação Linear Real** nas incógnitas $x_1,\ldots,x_n$ à equação dada por:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = \beta \qquad (1)$$

Definição 2: Uma **solução** da equação (1) é uma seqüência de *n* números reais (uma *n*-upla) indicada por $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ tal que a sentença seja verdadeira, isto é, a *n*-upla satisfaz a equação (1).

Sistemas Lineares

<u>Definição 3</u>: Um **Sistema de *m* Equações Lineares com *n* Incógnitas** é um conjunto com *m* equações lineares, cada uma delas com *n* variáveis (ou incógnitas) consideradas simultaneamente.

$$S:\begin{cases}\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n=\beta_1\\ \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\ldots+\alpha_{2n}x_n=\beta_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_{m1}x_1+\alpha_{m2}x_2+\ldots+\alpha_{mn}x_n=\beta_m\end{cases}$$

Sistemas Lineares

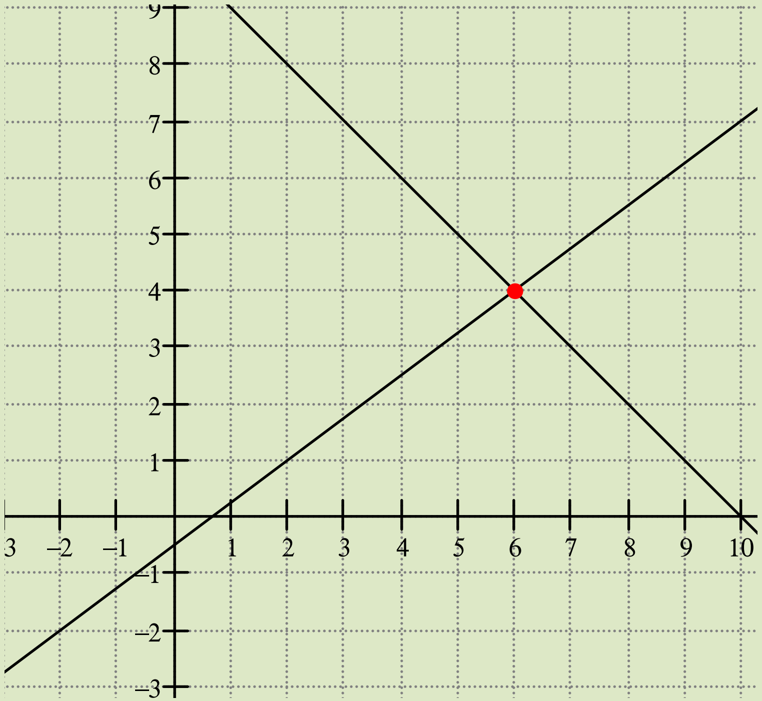
<u>Definição 4</u>: Uma **solução** para o sistema é uma *n*-upla real $(b_1, b_2, ..., b_n)$ que satisfaz todas as equações simultaneamente, isto é,

$$S:\begin{cases} \alpha_{11}b_1 + \alpha_{12}b_2 + \ldots + \alpha_{1n}b_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}b_1 + \alpha_{22}b_2 + \ldots + \alpha_{2n}b_n = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}b_1 + \alpha_{m2}b_2 + \ldots + \alpha_{mn}b_n = \beta_m \end{cases}$$

S é verdadeiro.

Sistemas Lineares

<u>Exemplo</u>: $S = \begin{cases} x + y = 10 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$



Solução: $S = \{(6,4)\}$

Sistemas Lineares

Exercício 01: Determine a solução do sistema linear a seguir:

$$S = \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$

Obs: Se os termos independentes são nulos então o sistema é chamado **homogêneo**.

$$S = \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

Classificação quanto à Solução:

1. **Sistema Incompatível:** quando não possui solução alguma.
2. **Sistema Compatível:** aquele que possui solução.

   A. **Determinado:** solução única

   B. **Indeterminado:** infinitas soluções

Representação Matricial de um Sistema Linear

$$S:\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

Matriz dos Coeficientes

Matriz das Variáveis

Matriz dos Termos Independentes

Sistemas Equivalentes

Definição 5: São aqueles que possuem o mesmo conjunto de soluções.

Proposição: As operações elementares aplicadas às equações de um sistema linear não altera seu conjunto de soluções.

Corolário: Dado um sistema linear sempre existe um outro sistema linear equivalente escalonado.

Notação: $S_1 \approx S_2$

Matriz Ampliada

<u>Definição</u>: Chamamos de **Matriz Ampliada** do sistema linear *S*, a matriz *A* dada abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{pmatrix}$$

Matriz dos Coeficientes

Coluna dos Termos Independentes

Resolver e Discutir

- **Resolver** um Sistema Linear é encontrar as soluções, sempre que isso for possível.
- **Discutir** um Sistema Linear é classificá-lo quanto ao número de soluções.
- Após o escalonamento da matriz ampliada de um sistema linear, temos a matriz ampliada de um sistema linear equivalente mais simples. Assim podemos classificá-lo rapidamente, conforme a discussão a seguir.

Discussão de um Sistema Linear Escalonado

Seja *S* um sistema linear com *m* equações e *n* variáveis. Após o escalonamento, e retiradas as equações todas nulas, suponha que restaram *p* equações. Então:

1. Se a última equação do sistema é do tipo:

$0=\beta_p$, com $\beta_p \neq 0$, temos um **Sistema Linear Incompatível (SI)**.

Discussão de um Sistema Linear Escalonado

2. Caso não existe equações como no caso anterior, então temos duas possibilidades:
   a) Se $p = n$ ele é um sistema **compatível determinado (SCD)**.

   b) Se $p < n$ ele é um sistema **compatível indeterminado (SCI)**.

Sistema de Cramer

O Sistema Linear é de **Cramer** se possui o mesmo número de equações e incógnitas (sistema quadrado), e se a matriz dos coeficientes é uma matriz inversível.

Sua solução é única (SCD) e dada por:

$$AX = B \Leftrightarrow \left(A^{-1}A\right)X = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

Exemplo:

$$S:\begin{cases} x & + & y & = & 1 \\ y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2z & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz Ampliada

O determinante dessa matriz é 3, logo esse é um sistema de Cramer. Sua solução é dada por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow V=\{(0,1,0)\}$$

Exercícios

Exercício 1: Discuta e resolva os sistemas:

a) $$S:\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 4 \\ 2x & + & 5y & - & 2z & = & 3 \\ 3x & + & 6y & - & z & = & 7 \end{cases}$$

b) $$S:\begin{cases} x & - & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & + & 5y & + & 6z & = & 0 \end{cases}$$

c) $$S:\begin{cases} x & + & y & = & 1 \\ 2x & - & 3y & = & 4 \\ -x & + & 4y & = & -3 \end{cases}$$

Exercícios

Exercício 2: Determine valores para *m*, tal que o sistema S abaixo seja :

a) Compatível determinado

b) Incompatível

c) Compatível Indeterminado

$$S:\begin{cases} x & + & y & = & 2 \\ 2x & - & my & = & 3 \\ 3x & + & (1-m) & = & 5 \end{cases}$$

Exercícios

Exercício 3: Considere o Sistema Linear abaixo:

$$S:\begin{cases} x - m_1 y = b_1 \\ x - m_2 y = b_2 \end{cases} \quad , \quad m_1, m_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$$

a) Mostre que o sistema tem uma única solução se $m_1 \neq m_2$.

b) Se $m_1 = m_2$, mostre que o sistema só será compatível, se $b_1 = b_2$.