Determinantes

- ***Definição:*** (usando os cofatores) Seja a matriz *A* quadrada de ordem *n*. Assim definimos usando a i-ésima linha (poderia ser também uma coluna):

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left[A_{ij} \right]$$

Propriedades do Determinante

P5) Filas paralelas iguais: Se a matriz *A* possui duas filas iguais então seu determinante é nulo.

Exercício: Demonstre.

P6) Teorema de Cauchy: A soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer de uma matriz A, de forma ordenada, pelos cofatores dos elementos de uma fila paralela é igual a zero.

Exercício: Demonstre.

Propriedades do Determinante

P7) Filas paralelas proporcionais: Se a matriz *A* possui duas filas paralelas proporcionais então seu determinante é nulo.

Exercício: Demonstre.

Propriedades do Determinante

P8) Adição de Determinantes**:** Uma fila da matriz A de ordem *n*, é constituída de uma soma de elementos, como abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_{1j} + c_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_{2j} + c_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & b_{3j} + c_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \dots & b_{(n-1)j} + c_{(n-1)j} & \dots & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_{nj} + c_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Propriedades do Determinante

Nessas condições temos que:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & c_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Exercício: Demonstre.

Propriedades do Determinante

P9) Teorema da Combinação Linear**:** Se uma matriz A possui uma fila que é combinação linear de outras duas então seu determinante é nulo.

Exercício: Demonstre.

Propriedades do Determinante

P10) <u>Teorema de Jacobi</u>**:** Se substituirmos uma fila da matriz *A* por uma combinação linear dela com outra fila qualquer então seu determinante não se altera.

Exercício: Demonstre.

P11) <u>Teorema de Binet</u>**:** Sejam *A* e *B* matrizes de ordem *n*. Então

$$\det(A.B) = \det(A).\det(B)$$

Propriedades do Determinante

P12) Matriz Triangular**:** Seja matriz triangular inferior *A* (ou superior) então seu determinante é o produto dos elementos da diagonal.

Exercício: Demonstre.