7ª LISTA DE EXERCÍCIOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III

Derivada Direcional. Gradiente. Fórmula de Taylor

Exercícios 6.6 – Livro: Cálculo B – Funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície (2ª Edição), Autoras: Mirian Buss Gonçalves e Diva Marília Flemming

1. Calcular, usando a definição, a derivada direcional do campo escalar $f(x, y)$ no ponto indicado e na direção $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$.

a) $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2$ em $P(1, 1)$.

b) $f(x, y) = 2x + y$ em $P(-1, 2)$.

c) $f(x, y) = e^{x+y}$ em $P(0, 1)$.

Nos exercícios 2 a 6, calcular, usando a definição, a derivada direcional no ponto e direção indicados:

2. $f(x, y) = x^2 - y^2$, $P(1, 2)$, na direção de $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$.

3. $f(x, y, z) = xy + z$, $P(2, 1, 0)$, na direção do eixo positivo dos z.

4. $f(x, y) = 2x + 3y$, $P(-1, 2)$, na direção da reta $y = 2x$.

5. $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$, $P(1, 1)$, na direção do vetor tangente unitário à curva $C : \vec{r}(t) = (t, t^2)$ em $P(1, 1)$.

6. $f(x, y, z) = 2x + 3y - z$, $P(1, 1, -1)$, na direção do eixo positivo dos y.

Nos exercícios 7 a 17, calcular o gradiente do campo escalar dado.

7. $f(x, y, z) = xy + xz + yz$.

8. $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2$.

9. $f(x, y) = 3xy^3 - 2y$.

10. $f(x, y, z) = \sqrt{xyz}$.

11. $f(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2}$.

12. $f(x, y) = e^{2x^2+y}$.

13. $f(x, y) = \text{arc tg}\, xy$.

14. $f(x, y) = \dfrac{2x}{x - y}$.

15. $f(x, y, z) = 2xy + yz^2 + \ln z$.

16. $f(x, y, z) = \sqrt{\dfrac{x + y}{z}}$.

17. $f(x, y, z) = ze^{x^2-y}$.

25. Seja $f(x, y) = 2x^2 + 5y^2$. Representar geometricamente $\nabla f(x_0, y_0)$, sendo (x_0, y_0) dado por

a) $(1, 1)$ b $(-1, 1)$

c) $\left(\dfrac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$.

26. Dados $A\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$ e $B\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$ e a função $f(x, y) = \ln xy$, determinar o ângulo formado pelos vetores $\nabla f(A)$ e $\nabla f(B)$.

28. Determinar e representar graficamente um vetor normal à curva dada no ponto indicado:

a) $2x^2 + 3y^2 = 8$; $P(1, \sqrt{2})$

b) $y = 2x^2$; $P(-1, 2)$

c) $x^2 + y^2 = 8$; $P(2, 2)$

d) $y = 5x - 2$; $P\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

29. Determinar um vetor normal à superfície dada no ponto indicado e representá-lo geometricamente:

a) $2x + 5y + 3z = 10$; $P\left(1, 2, \dfrac{-2}{3}\right)$

b) $z = 2x^2 + 4y^2$; $P(0, 0, 0)$

c) $2z = x^2 + y^2$; $P(1, 1, 1)$.

30. Traçar as curvas de nível de $f(x, y) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}y^2$ que passem pelos pontos $(1, 1)$, $(1, -2)$ e $(-2, -1)$.

Traçar os vetores $\nabla f(1, 1)$, $\nabla f(1, -2)$ e $\nabla f(-2, -1)$.

Nos exercícios 31 a 35, determinar uma equação para a reta normal à curva dada, nos pontos indicados:

31. $y = x^2$; $P_0(1, 1)$, $P_1(2, 4)$.

32. $x^2 - y^2 = 1$; $P_0(\sqrt{2}, 1)$.

33. $x - y^2 = -4$; $P_0(-3, 1)$.

34. $x + y = 4$; $P_0(3, 1)$.

35. $x^2 + y^2 = 4$; $P_0(2, 0)$.

41. Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial s}(x_0, y_0)$ na direção $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$:

a) $f(x, y) = 3x^2 - 2y^2$; $(x_0, y_0) = (1, 2)$

b) $f(x, y) = e^{xy}$; $(x_0, y_0) = (-1, 2)$

c) $f(x, y) = \dfrac{x + y}{1 - x}$; $(x_0, y_0) = \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

42. Calcular as derivadas direcionais das seguintes funções nos pontos e direções indicados:

a) $f(x, y) = e^{-x} \cos y$ em $(0, 0)$ na direção que forma um ângulo de 45° com o eixo positivo dos x, no sentido anti-horário.

b) $f(x, y, z) = 4x^2 - 3y^2 + z$ em $(-1, 2, 3)$ na direção da normal exterior à superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, no ponto $P(1, 1, \sqrt{2})$.

Nos exercícios 43 a 47, determinar a derivada direcional da função dada:

43. $f(x, y, z) = 3x^2 + 4y^2 + z$, na direção do vetor $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

44. $f(x, y, z) = xy + xz + yz$, na direção de máximo crescimento de f.

45. $f(x, y) = x^2 + y^2$, na direção da semi-reta $y - x = 4, x \geq 0$.

46. $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$, na direção de máximo decrescimento de f.

47. $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$, na direção do vetor $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

48. A derivada direcional da função $w = f(x, y)$ em $P_0(1, 1)$ na direção do vetor $\overrightarrow{P_0 P_1}$, $P_1(1, 2)$, é 2, e na direção do vetor $\overrightarrow{P_0 P_2}$, $P_2(2, 0)$, é 4. Quanto vale $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ em P_0 na direção do vetor $\overrightarrow{P_0 0}$, onde 0 é a origem?

49. Em que direção devemos nos deslocar partindo de $Q(1, 1, 0)$ para obter a taxa de maior decréscimo da função $f(x, y) = (2x + y - 2)^2 + (5x - 2y)^2$?

50. Em que direção a derivada direcional de $f(x, y) = 2xy - x^2$ no ponto $(1, 1)$ é nula?

51. Em que direção e sentido a função dada cresce mais rapidamente no ponto dado? Em que direção e sentido decresce mais rapidamente?

a) $f(x, y) = 2x^2 + xy + 2y^2$ em $(1, 1)$

b) $f(x, y) = e^{xy}$ em $(2, -1)$.

52. Determinar os dois vetores unitários para os quais a derivada direcional de f no ponto dado é zero.

a) $f(x, y) = x^3y^3 - xy$, $P(10, 10)$

b) $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y}$, $P(3, 2)$

c) $f(x, y) = e^{2x+y}$, $P(1, 0)$.

53. Uma função diferenciável $f(x, y)$ tem, no ponto $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, derivada direcional igual a $\dfrac{2}{5}$ na direção $3\vec{i} + 4\vec{j}$ e igual a $\dfrac{11}{5}$ na direção $4\vec{i} - 3\vec{j}$. Calcular:

a) $\nabla f\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial s}\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ na direção $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$.

54. Determinar a derivada direcional da função $z = \dfrac{(y - 1)^2}{x}$ no ponto $P_0(1, \sqrt{2})$, na direção da normal exterior à elipse $2x^2 + 3y^2 = 8$ no ponto P_0.

Nos exercícios 55 a 58, encontrar o valor máximo da derivada direcional do campo escalar dado, nos pontos indicados:

55. $f(x, y) = xy^2 - (y - x)^2$; $P_0(1, 1)$

56. $f(x, y, z) = x^2 + 2xy + z^2$; $P_0(0, 0, 0)$ e $P_1(1, 2, 2)$

57. $f(x, y, z) = \cos x + \text{sen}\, y$; $P_0(x, y, z)$

58. $f(x, y) = \text{arc tg}\, \dfrac{y}{x}$, $P_0(-1, 1)$.

59. Dada a função $w = x^2 + y^2 + z^2$, determinar sua derivada direcional no ponto $P(1, 1, \sqrt{2})$, na direção da normal exterior à superfície $z^2 = x^2 + y^2$ em P.

Fórmula de Taylor

1- Encontre o polinômio de Taylor de ordem 2 associado a função *f* no ponto *(0,0)* em que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = xsen(x) + ysen(y)$

2- Encontre o polinômio de Taylor de ordem 2 associado a função g no ponto *(1,1)* em que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x, y) = e^{2x+3y}$

3- Encontre o polinômio de Taylor de ordem 2 da função $f(x, y) = sen(x^4 + y^4)$ em torno da origem.

4- Encontre o polinômio de Taylor de ordem 3 associado a função *f* no ponto *(0,0)* em que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = xsen(x) + ysen(y)$

5- Encontre o polinômio de Taylor de ordem 3 associado a função g no ponto *(1,1)* em que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x, y) = e^{2x+3y}$.