6ª LISTA DE EXERCÍCIOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III

Exercícios 5.10 – Livro: Cálculo B – Funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície (2ª Edição), Autoras: Mirian Buss Gonçalves e Diva Marília Flemming

1. Encontrar, se existirem, os pontos de máximo e de mínimos globais das funções:

a) $z = 4 - x^2 - y^2$ b) $z = x^2 + y^2 - 5$

c) $z = x + y + 4$ d) $z = \sqrt{2x^2 + y^2}$

e) $z = \operatorname{sen} x + \cos y$ f) $f(x, y) = x^4 + y^4$

g) $z = \sqrt{-x^2 + 2x - y^2 + 2y - 1}$.

2. Verificar se o ponto (0, 0) é ponto crítico das funções:

a) $z = 2x^2 + 2y^2$

b) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

c) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{4x^2 + 2y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Nos exercícios 3 a 16, determinar os pontos críticos das funções dadas.

3. $z = x^4 - 2x^2 + y^2 - 9$.

4. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

5. $z = 2x^4 - 2y^4 - x^2 + y^2 + 1$.

6. $f(x, y) = \cos^2 x + y^2$.

7. $f(x, y) = \cos x$.

8. $z = 2y^3 - 3x^4 - 6x^2y + 5$.

9. $z = (x - 2)^2 + y^2$.

10. $z = e^{x-y}(y^2 - 2x^2)$.

11. $z = xe^{-x^2-y^2}$.

12. $z = y^3 - 3x^2y + 3y$.

13. $z = \cos(2x + y)$.

14. $z = y^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - x$.

15. $z = x^2 + y^2 + 8x - 6y + 12$.

16. $f(x, y) = \frac{1}{y} - \frac{64}{x} + xy$.

Nos exercícios 17 a 34, determinar os pontos críticos das funções dadas, classificando-os, quando possível.

17. $z = 10 - x^2 - y^2$.

18. $z = 2x^2 + y^2 - 5$.

19. $z = 4 - 2x^2 - 3y^2$.

20. $z = x^2 + y^2 - 6x - 2y + 7$.

21. $z = y + x \operatorname{sen} y$.

22. $z = x \operatorname{sen} 2y$.

23. $z = e^{(x^2+y^2)}$.

24. $z = 4xy$.

25. $z = 8x^3 + 2xy - 3x^2 + y^2 + 1$.

26. $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

27. $z = 4x^2 + 3xy + y^2 + 12x + 2y + 1$.

28. $z = x^4 + \frac{1}{4}y^5 + x + \frac{1}{3}y^3 + 15$.

29. $z = x^2 + y^2 - 2x - 8y + 7$.

30. $z = 4xy - x^4 - 2y^2$.

31. $z = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + 4}$.

32. $z = y \cos x$

33. $z = \frac{1}{3}y^3 + 4xy - 9y - x^2$.

34. $z = \dfrac{y}{x + y}$.

Nos exercícios 35 a 43, determinar os valores máximo e mínimo da função dada, na região indicada.

35. $f(x, y) = x + 2y$; no retângulo de vértices $(1, -2)$, $(1, 2)$, $(-1, 2)$ e $(-1, -2)$.

36. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$; no círculo $x^2 + y^2 \leq 1$.

37. $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y$; no triângulo de vértices $(0, 0)$, $(3, 0)$ e $(0, 3)$.

38. $z = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x + y)$; $0 \leq x \leq \pi$ e $0 \leq y \leq \pi$.

39. $z = xy$; no círculo $x^2 + y^2 \leq 1$.

40. $z = xy$; $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$.

41. $f(x, y) = 2 + x + 3y$; $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $x + y \leq 1$.

42. $z = x^3 + y^3 - 3xy$; $0 \leq x \leq 3$ e $-1 \leq y \leq 3$.

43. $z = y^3 - x^3 - 3xy$; $-1 \leq x \leq 1$ e $-2 \leq y \leq 2$.

44. Dada a função $z = ax^2 + by^2 + c$, analisar os pontos críticos, considerando que:

a) $a > 0$ e $b > 0$

b) $a < 0$ e $b < 0$

c) a e b têm sinais diferentes.

45. Um disco tem a forma do círculo $x^2 + y^2 \leq 1$. Supondo que a temperatura nos pontos do disco é dada por $T(x, y) = x^2 - x + 2y^2$, determinar os pontos mais quentes e mais frios do disco.

46. A distribuição de temperatura na chapa circular $x^2 + y^2 \leq 1$ é

$$T(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 5y - 10.$$

Encontrar as temperaturas máxima e mínima da chapa.

47. Encontrar as dimensões de uma caixa com base retangular, sem tampa, de volume máximo, com área lateral igual a 5 cm^2.

48. Entre todos os triângulos de perímetro igual a 10 cm, encontrar o que tem maior área.

49. Encontrar o ponto da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ mais próximo do ponto (3, 3, 3).

50. Em uma empresa que produz dois diferentes produtos, temos as funções de demanda

$$Q_1 = 40 - 2P_1 - P_2$$
$$Q_2 = 35 - P_1 - P_2$$

onde Q_i, $i = 1, 2$, representa o nível de produção do i-ésimo produto por unidade de tempo e P_i, $i = 1, 2$, os respectivos preços. A função custo é dada por

$$C = Q_1^2 + Q_2^2 + 10$$

e a função receita é dada por

$$R = P_1Q_1 + P_2Q_2.$$

a) Sabendo que lucro = receita − custo, encontrar a função lucro.

b) Encontrar os níveis de produção que maximizam o lucro.

c) Qual é o lucro máximo?

51. Determinar o ponto $P(x, y, z)$ do plano $x + 3y + 2z = 6$, cuja distância à origem seja mínima.

52. Determinar três números positivos cujo produto seja 100 e cuja soma seja mínima.

53. Uma firma de embalagem necessita fabricar caixas retangulares de 64 cm^3 de volume. Se o material da parte lateral custa a metade do material a ser usado para a tampa e para o fundo da caixa, determinar as dimensões da caixa que minimizam o custo.

54. Determine, pelo método dos mínimos quadrados, a reta que melhor se ajusta aos dados:

a) $(1, 2)$; $(0, 0)$ e $(2, 3)$.

b) $(0, 1)$; $(1, 2)$; $(2, 3)$ e $(2, 4)$.

55. Determinar as dimensões do paralelepípedo de maior volume que pode ser inscrito no tetraedro formado pelos planos coordenados e pelo plano $x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{2}z = 1$.

56. Precisa-se construir um tanque com a forma de um paralelepípedo para estocar 270 m^3 de combustível, gastando a menor quantidade de material em sua construção. Supondo que todas as paredes serão feitas com o mesmo material e terão a mesma espessura, determinar as dimensões do tanque.

Nos exercícios 57 a 61, determinar os pontos de máximo e/ou mínimo da função dada, sujeita às restrições indicadas:

57. $z = 4 - 2x - 3y$; $x^2 + y^2 = 1$.

58. $z = 2x + y$; $x^2 + y^2 = 4$.

59. $z = x^2 + y^2$; $x + y = 1$.

60. $z = xy$; $2x^2 + y^2 = 16$.

61. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x + y + z = 9$.

62. Determinar o ponto do plano $3x + 2y + 4z = 12$ para o qual a função

$$f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 5z^2$$

tenha um valor mínimo.

63. A reta t é dada pela intersecção dos planos

$$x + y + z = 1 \text{ e } 2x + 3y + z = 6.$$

Determinar o ponto de t cuja distância até a origem seja mínima.

64. Determinar a distância mínima entre o ponto (0, 1) e a curva $x^2 = 4y$.

65. Encontrar os valores extremos de $z = 2xy$ sujeitos à condição $x + y = 2$.

66. Determinar o ponto do plano $x + y - z = 1$ cuja distância ao ponto (1, 1, 1) seja mínima.

67. Mostrar que o paralelepípedo retângulo de maior volume que pode ser colocado dentro de uma esfera tem a forma de um cubo.

68. Calcular as dimensões de um retângulo de área máxima inscrito em uma semicircunferência de raio 2.