5ª LISTA DE EXERCÍCIOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III

Regra da Cadeia e Derivação Implícita

Exercícios 4.10 – Livro: Cálculo B – Funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície (2ª Edição), Autoras: Mirian Buss Gonçalves e Diva Marília Flemming

1. Verificar a regra da cadeia

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

para as funções:

a) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$
$x = 2t + 1$
$y = 4t^2 - 5.$

b) $f(x, y) = \operatorname{sen}(2x + 5y)$
$x = \cos t$
$y = \operatorname{sen} t.$

c) $f(x, y) = xe^{2xy^2}$
$x = 2t$
$y = 3t - 1.$

d) $f(x, y) = 5xy + x^2 - y^2$
$x = t^2 - 1$
$y = t + 2.$

e) $f(x, y) = \ln xy$
$x = 2t^2$
$y = t^2 + 2.$

Nos exercícios 2 a 7, determinar $\frac{dz}{dt}$, usando a regra da cadeia.

2. $z = \operatorname{tg}(x^2 + y)$, $x = 2t$, $y = t^2$.

3. $z = x\cos y$, $x = \operatorname{sen} t$, $y = t$.

4. $z = \operatorname{arc\,tg} xy$, $x = 2t$, $y = 3t$.

5. $z = e^x(\cos x + \cos y)$, $x = t^3$, $y = t^2$.

6. $z = \frac{x}{y}$, $x = e^{-t}$, $y = \ln t$.

7. $z = xy$, $x = 2t^2 + 1$, $y = \operatorname{sen} t$.

8. Dada a função $f(x, y) = \frac{x}{y} + e^{xy}$, com $x(t) = \frac{1}{t}$ e $y(t) = \sqrt{t}$, encontrar $\frac{dh}{dt}$ onde $h(t) = f(x(t), y(t))$.

9. Seja $h(t) = f(e^{2t}, \cos t)$, onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável.

a) Determinar $h'(t)$ em função das derivadas parciais de f.

b) Sabendo que $\frac{\partial f}{\partial x}(e^{2\pi}, -1) = \frac{1}{e^{2\pi}}$, determinar $h'(\pi)$.

10. Sejam $z = f(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$. Obter a derivada $\frac{d^2h}{dt^2}$, sendo h a função composta $h(t) = f(x(t), y(t))$.

11. Verificar a regra da cadeia para as funções:

a) $z = u^2 - v^2$, $u = x + 1$, $v = xy$

b) $z = f(e^x, -y^2)$, $f(u, v) = 2u + v^2$

c) $z = \sqrt{u^2 + v^2 + 5}$, $u = \cos x$, $v = \operatorname{sen} y$

d) $f(u, v) = uv - v^2 + 2$, $u = x^2 + y^2$, $v = x - y + xy$

e) $f(x, y) = \ln xy$, $x = 2u^2 + v^4$, $y = 3u^2 + v^2$.

Nos exercícios 12 a 16, determinar as derivadas parciais $\frac{\partial z}{\partial u}$ e $\frac{\partial z}{\partial v}$, usando a regra da cadeia.

12. $z = \sqrt{x^2 + y^3}$, $x = u^2 + 1$, $y = \sqrt[3]{v^2}$.

13. $z = \ln(x^2 + y^2)$, $x = \cos u \cos v$, $y = \operatorname{sen} u \cos v$.

14. $z = xe^y$, $x = uv$, $y = u - v$.

15. $z = x^2 - y^2$, $x = u - 3v$, $y = u + 2v$.

16. $z = e^{x/y}$, $x = u\cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$.

17. Dada a função $f(x, y) = \frac{x}{y} + x^2 + y^2$ com $x = r\cos\theta$ e $y = r \operatorname{sen}\theta$, encontrar $\frac{\partial f}{\partial r}$ e $\frac{\partial f}{\partial \theta}$.

Nos exercícios 18 a 22, determinar as derivadas parciais $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

18. $z = \frac{r^2 + s}{s}$, $r = 1 + x$, $s = x + y$.

19. $z = uv^2 + v\ln u$, $u = 2x - y$, $v = 2x + y$.

20. $z = l^2 + m^2$, $l = \cos xy$, $m = \operatorname{sen} xy$.

21. $z = u^2 + v^2$, $u = x^2 - y^2$, $v = e^{2xy}$.

22. $z = uv + u^2$, $u = xy$, $v = x^2 + y^2 + \ln xy$.

23. Seja $z = f(x, y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$. Mostrar que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2.$$

24. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Mostrar que $z = f(x - y, y - x)$ satisfaz a equação

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

25. Dada $z = f(x^2 + y^2)$, f diferenciável, mostrar que

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

26. Supondo que $z = z(x, y)$ é definida implicitamente por $f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$, mostrar que $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$.

27. Determinar as derivadas parciais $\frac{\partial w}{\partial u}$ e $\frac{\partial w}{\partial v}$.

a) $w = x^2 + 2y^2 - z^2$, $x = 2uv$, $y = u + v$

b) $w = xy + xz + yz$, $x = u^2 - v^2$, $y = uv$, $z = (u - v)^2$.

28. Se $z = f(x, y)$, $x = r\cos\theta$ e $y = r \operatorname{sen}\theta$, onde f é uma função diferenciável, expressar $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ como funções de r e θ.

29. Supondo que a função diferenciável $y = f(x)$ é definida implicitamente pela equação dada, determinar sua derivada $\frac{dy}{dx}$:

a) $9x^2 + 4y^2 = 36$

b) $2x^2 - 3y^2 = 5xy$.

30. Supondo que a função diferenciável $z = f(x, y)$ é definida pela equação dada, determinar $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$:

a) $x^3y^2 + x^3 + z^3 - z = 1$

b) $x^2 + y^2 - z^2 - xy = 0$

c) $xyz - x - y + x^2 = 3$.

31. Supondo que as funções diferenciáveis $y = y(x)$ e $z = z(x)$, $z > 0$, sejam definidas implicitamente pelo sistema dado, determinar as derivadas $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = z^2 \\ x + y = 2. \end{cases}$

32. Determinar as derivadas parciais de 1ª ordem das funções $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ definidas implicitamente pelo sistema dado:

a) $\begin{cases} x^3 + u^2 + y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + v^2 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + u - v = 3 \\ y - 3uv + v^2 = 0. \end{cases}$

33. Pode-se garantir que a equação

$$x^3 + 2xy + y^3 = 8$$

define implicitamente alguma função diferenciável $y = y(x)$? Em caso positivo, determinar $\frac{dy}{dx}$.

34. Verificar que a equação dada define implicitamente pelo menos uma função diferenciável $y = y(x)$. Determinar $\frac{dy}{dx}$.

a) $e^{xy} = 4$

b) $x^3 + y^3 + y + 1 = 0$.

35. Escrever a regra da cadeia para

a) $h(x, y) = f(x, u(x, y))$

b) $h(x) = f(x, u(x), v(x))$

c) $h(u, v, w) = f(x(u, v, w), y(u, v), z(w))$.

36. Dadas as funções $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ definidas pelo sistema

$$\begin{cases} u = 2x^2 + y^2 \\ v = x - 2y \end{cases}$$

determinar as derivadas parciais de 1ª ordem de x e y em relação a u e v.

37. As equações

$$2u + v - x - y = 0 \text{ e}$$
$$xy + uv = 1$$

determinam u e v como funções de x e y. Determinar $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$.

38. Calcular o jacobiano $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$, para

a) $x = u\cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$

b) $x = u + v$, $y = \frac{v}{u}$

c) $x = u^2 + v^2$, $y = uv$.

39. Supondo que as funções diferenciáveis $y = y(x)$ e $z = z(x)$ sejam definidas implicitamente pelo sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x + y = 4. \end{cases}$$

determinar:

a) $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$.

b) Um par de funções $y = y(x)$ e $z = z(x)$ definidas implicitamente pelo sistema dado.