4ª LISTA DE EXERCÍCIOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III

Derivadas Parciais, Diferenciabilidade, Plano Tangente, Vetor Gradiente e Diferencial

Exercícios 4.5 – Livro: Cálculo B – Funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície (2ª Edição), Autoras: Mirian Buss Gonçalves e Diva Marília Flemming

Nos exercícios 1 a 5, calcular as derivadas parciais de 1ª ordem usando a definição:

1. $z = 5xy - x^2$.

2. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 10$.

3. $z = 2x + 5y - 3$.

4. $z = \sqrt{xy}$.

5. $f(x, y) = x^2y + 3y^2$.

6. Usando a definição 4.1.1, mostrar que $f(x, y) = x^{\frac{1}{5}} y^{\frac{1}{3}}$ tem derivadas parciais na origem, valendo $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

7. Usando a definição, determinar, se existirem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 2) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 2)$$

sendo $f(x, y) = \begin{cases} x^2y \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Nos exercícios 8 a 27, calcular as derivadas parciais de 1ª ordem.

8. $f(x, y) = e^{x^2y}$.

9. $f(x, y) = x \cos(y - x)$.

10. $f(x, y) = xy^2 + xy + x^2y$.

11. $f(x, y) = y^2 \ln(x^2 + y^2)$.

12. $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

13. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

14. $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

15. $g(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

16. $z = (x + y)e^{x+2y}$.

17. $z = \frac{x^2y}{x^2 + 2y^2}$.

18. $z = e^{x^2+y^2-4}$.

19. $z = 2xy + \operatorname{sen}^2 xy$.

20. $z = \ln(x + y) - 5x$.

21. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$.

22. $z = \sqrt{xy} - xy$.

23. $f(w, t) = w^2t - \frac{1}{t}$.

24. $f(u, v) = uv - \ln(uv)$.

25. $z = x^2y^2 - xy$.

26. $z = \sqrt{x^2 + y^2} - (x^2 + y^2)$.

27. $z = e^{x^2}(x^2 + y^2)$.

28. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

29. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{5xy^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Calcular

$$f(1, 2) - \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0).$$

30. Verificar se a função $z = x^3y^2$ satisfaz a equação

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{2}{3y}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \text{ para } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0.$$

31. Verificar se $z = \operatorname{sen}(x + y)$ satisfaz a equação $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

32. Uma placa de aço plana tem a forma de um círculo de raio a, como mostra a Figura 4.19. A temperatura em um ponto qualquer da chapa é proporcional ao quadrado da distância desse ponto ao centro da chapa, com uma constante de proporcionalidade $k > 0$.

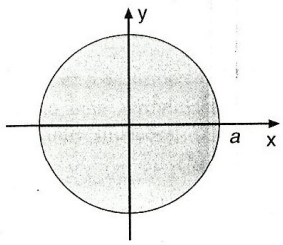

Figura 4.19

a) Se uma partícula localizada no ponto $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ se deslocar para a direita sobre o eixo dos x, sofrerá aumento ou diminuição de temperatura?

b) Qual a taxa de variação da temperatura em relação à variável y, no ponto $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$?

33. A função $T(x, y) = 60 - 2x^2 - 3y^2$ representa a temperatura em qualquer ponto de uma chapa. Encontrar a razão de variação da temperatura em relação à distância percorrida ao longo da placa na direção dos eixos positivos x e y, no ponto (1, 2). Considerar a temperatura medida em graus e a distância em cm.

34. Encontrar a inclinação da reta tangente à curva resultante da intersecção de $z = f(x, y)$ com o plano $x = x_0$ no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$.

a) $z = 5x - 2y$; $P(3, -1, 17)$

b) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$; $P(1, -1, 1)$

35. Seja $z = 3x^2 - 2y^2 - 5x + 2y + 3$. Encontrar a inclinação da reta tangente à curva resultante da intersecção de $z = f(x, y)$ com $y = 2$ no ponto $(1, 2, -3)$.

36. Dada a superfície $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, determinar a reta tangente às curvas de intersecção da superfície com:

a) o plano $x = 2$

b) o plano $y = \sqrt{5}$

no ponto $P(2, \sqrt{5}, 3)$.

37. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + 1} & \text{se } x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{se } x^2 + y^2 \geq 1. \end{cases}$

a) Esboçar o gráfico de f

b) Calcular, se existirem, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 1)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$

Nos exercícios 38 a 47, calcular as derivadas parciais de 1ª ordem.

38. $w = x^2y + xyz^2 + x^2z$.

39. $w = \dfrac{1}{z}\ln(x^2 + y^2)$.

40. $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 + y^2}{z}$.

41. $f(x, y, z) = 2xy^z$.

42. $f(x, y, z) = x \operatorname{sen} yz + y \operatorname{sen} xz$.

43. $f(x, y, z) = x^2yz - xz$.

44. $g(w, t, z) = \sqrt{w^2 + t^2 + z^2}$.

45. $h(u, v, w, t) = u^2 + v^2 - \ln(wt)$.

46. $T(x, y, z) = \dfrac{xyz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

47. $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \dfrac{E}{x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5}$

48. Usando a definição, verificar que as funções dadas são diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$:

a) $f(x, y) = 2x^2 - y^2$

b) $f(x, y) = 2xy$

49. Verificar se as funções dadas são diferenciáveis na origem:

a) $f(x, y) = \sqrt{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^5}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

c) $f(x, y) = x + y$

d) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y^4 + 3x^2y^2 + 2yx^3}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

e) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

50. Identifique a região de $\mathbb{R}^2$ onde as funções dadas são diferenciáveis:

a) $f(x, y) = x^2y + xy^2$ b) $z = e^{xy^2}$

c) $z = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$ d) $z = \ln(xy)$

e) $z = \operatorname{sen} \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

f) $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$

g) $f(x, y) = (x^2 + y^2)\operatorname{sen}(x^2 + y^2)$

h) $f(x, y) = \operatorname{arctg} 2xy$

i) $z = \dfrac{y}{x}$ j) $z = \dfrac{1}{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}$

k) $f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + 1}, & \text{se } x^2 + y^2 < 1 \\ 0, & \text{se } x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$

l) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

51. Dada a função

$f(x, y) = \begin{cases} 2x + y - 3, & \text{se } x = 1 \text{ ou } y = 1 \\ 3, & \text{se } x \neq 1 \text{ e } y \neq 1 \end{cases}$

a) Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$.

b) Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1)$.

c) f é diferenciável em $(1, 1)$?

52. Determinar, se existir, o plano tangente ao gráfico da funções dadas, nos pontos indicados:

a) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$; $P_1(0, 0, 1)$ e $P_2\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

b) $f(x, y) = xy$; $P_1(0, 0, 0)$ e $P_2(1, 1, 1)$

c) $z = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}$; $P_1(1, 1, 0)$ e $P_2(1, 2, 1)$

d) $z = 2x^2 - 3y^2$; $P_1(0, 0, 0)$ e $P_2(1, 1, -1)$

e) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $P_1\left(1, 1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $P_2(0, 1, 1)$

f) $z = x\,e^{x+y}$; $P_1(1, 1, f(1, 1))$ e $P_2(1, 0, f(1, 0))$.

53. Determinar o vetor gradiente das funções dadas nos pontos indicados:

a) $z = x\sqrt{x^2 + y^2}$; $P(1, 1)$

b) $z = x^2y + 3xy + y^2$; $P(0, 3)$

c) $z = \text{sen}(3x + y)$; $P(0, \pi/2)$

d) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$; $P(0, 0)$

e) $z = x^2 + y^2 - 3$; $P(0, 0)$

f) $z = xy - \text{sen}(x + y)$; $P(\pi/2, 0)$

g) $f(u, v, w) = u^2 + v^2 - w^2 + uvw$; $P(0, 1, 0)$

h) $z = (x^2 + y^2)\,\text{sen}\,(x^2 + y^2)$; $P(0, 0)$

i) $f(x, t) = (x + 2t)\ln(x + 2t)$; $P(e, 1)$

j) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 - x_1x_3 + x_4$; $P(2, 2, 1, 3)$.

54. Determinar o vetor gradiente das seguintes funções:

a) $z = \dfrac{x^3}{y}$ b) $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$

c) $w = 2x^2y^5z$ d) $z = \cos(xy) + 4$

e) $f(u, v, w) = u\,v\,w + u^2 - v^2 - w^2$

f) $f(x, y, z) = x^2y^2z^2 + \text{sen}\,x$

55. Encontrar a equação da reta perpendicular à curva $y = \dfrac{1}{x}$, nos pontos $P_0(1, 1)$ e $P_1\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$.

56. Determinar o plano que contém os pontos $(1, 1, 0)$ e $(2, 1, 4)$ e que seja tangente ao gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$.

57. Dada a função $f(x, y) = x^2 + xy - y$, calcular

a) df b) Δf

Mostrar que $\Delta f = df + R(\Delta x, \Delta y)$ e que

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} R(\Delta x, \Delta y) = 0.$$

58. Calcular $df(1, 1)$ e $\Delta f(1, 1)$ da função $f(x, y) = x + y - xy^2$ considerando $\Delta x = 0{,}01$ e $\Delta y = 1$. Comparar os resultados obtidos.

Nos exercícios 59 a 62 calcular a diferencial das funções dadas nos pontos indicados:

59. $f(x, y) = e^x \cos y$; $P(1, \pi/4)$.

60. $z = \ln(x^2 + y^2)$; $P(1, 1)$.

61. $w = x \cdot e^{2z} + y$; $P(1, 2, 0)$.

62. $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $P(2, 1, 2)$.

Nos exercícios 63 a 69, calcular a diferencial das funções dadas:

63. $z = \text{sen}^2(x + y)$.

64. $z = x \cdot e^{x+y} - y$.

65. $f(u, v, w) = u^2 + \ln v - w^2$.

66. $f(x, y, z) = e^{xyz} - xy$.

67. $f(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_1 + x_2 + x_3}$.

68. $f(x, y, z) = e^{x+y-z^2}$.

69. $z = \text{arctg}\,\dfrac{y}{x} - \text{arctg}\,\dfrac{x}{y}$.

70. Determinar o erro decorrente de tomarmos a diferencial dz como uma aproximação do acréscimo Δz, para as seguintes situações:

a) $z = x^2 + y^2$; (x, y) passando de $(1, 2)$ para $(1{,}01; 2{,}01)$.

b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; (x, y) passando de $(1, 2)$ para $(1{,}01; 2{,}01)$.

c) $z = x^2y$; (x, y) passando de $(2, 4)$ para $(2{,}1; 4{,}2)$.

71. A energia consumida em um resistor elétrico é dada por $P = \dfrac{V^2}{R}$ watts. Se $V = 120$ volts e $R = 12$ ohms, calcular um valor aproximado para a variação de energia quando V decresce de 0,001 volt e R aumenta de 0,02 ohm.

72. Um terreno tem a forma retangular. Estima-se que seus lados medem 1.200 m e 1.800 m, com erro máximo de 10 m e 15 m, respectivamente. Determinar o possível erro no cálculo da área do terreno.

73. Usando diferencial, obter o aumento aproximado do volume de um cilindro circular reto, quando o raio da base varia de 3 cm para 3,1 cm e a altura varia de 21 cm até 21,5 cm.

74. Um material está sendo escoado de um recipiente, formando uma pilha cônica. Em um dado instante, o raio da base é de 12 cm e a altura é 8 cm. Usando diferencial, obter uma aproximação da variação do volume, se o raio da base varia para 12,5 cm e a altura para 7,8 cm. Comparar o resultado obtido com a variação exata do volume.

75. Considerar um retângulo com lados $a = 5$ cm e $b = 2$ cm. Como vai variar, aproximadamente, a diagonal desse retângulo se o lado a aumentar 0,002 cm e o lado b diminuir 0,1 cm?

76. Encontrar um valor aproximado para as seguintes expressões:

a) $(1{,}01e^{0{,}015})^7$

b) $(0{,}995)^4 + (2{,}001)^3$

c) $\sqrt{(3{,}99)^2 + (4{,}01)^2}$

d) $\sqrt{(3{,}99)^2 + (4{,}01)^2 + (1{,}99)^2}$

e) $1{,}02^{3{,}001}$

f) $\sqrt{(4{,}03)^2 + (2{,}9)^2}$.