2ª LISTA DE EXERCÍCIOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III

Limite

Exercícios 3.7 – Livro: Cálculo B – Funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície (2ª Edição), Autoras: Mirian Buss Gonçalves e Diva Marília Flemming

1. Identificar quais dos conjuntos seguintes são bolas abertas em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, determinando, em caso positivo, o centro e o raio.

a) $x^2 + y^2 - 2y < 3$

b) $x^2 + y^2 + z^2 + 6z < 0$

c) $x^2 + y^2 < z^2$

d) $x^2 + y^2 + 2x > (x-1)^2 + (y-2)^2$

e) $x^2 + y^2 - 1 > 0$

f) $x^2 + 4x + y^2 < 5$

g) $x^2 + y^2 + z < 2$.

2. Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 2 < x < 3$ e $-1 < y < 1\}$

a) Representar graficamente o conjunto A, identificando se A é aberto.

b) Determinar a fronteira de A.

3. Repetir o Exercício 2 para o conjunto

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 < x < 1, -1 < y < 1 \text{ e } -1 < z < 1\}$$

4. Identificar as afirmações verdadeiras:

a) A união de bolas abertas é uma bola aberta.

b) A união de bolas abertas é um conjunto aberto.

e) O conjunto $B = \{(x, y) | x^2 > y^2\}$ é aberto.

6. Dar a fronteira dos seguintes subconjuntos do $\mathbb{R}^2$. Representar graficamente.

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 < 4\}$

d) $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \dfrac{1}{x}\right\}$

7. Representar graficamente os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. Identificar os conjuntos abertos.

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4x + y^2 < 0\}$

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4x + y^2 \geq 0\}$

c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| < 3\}$

d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$

e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 2y - 3\}$

8. Seja

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 1} < 1\}.$$

Verificar se os pontos

a) $(0, -1/2)$ b) $(0, -1)$ c) $(-1, -1)$

d) $(1, 1)$ e) $(0, 0)$ f) $(3, 4)$

são pontos de acumulação de A.

9. Verificar se o conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in N\}$ tem ponto de acumulação.

10. Identificar as afirmações verdadeiras:

a) $P(0, 0)$ é ponto de acumulação do conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x\}$.

b) Os pontos $P(0, 4)$ e $Q(2, 2)$ pertencem à fronteira do conjunto $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 4 - x^2\}$.

c) $P(0, 0)$ é ponto de acumulação da bola aberta $B((0, 0), r)$, qualquer que seja $r > 0$.

d) O conjunto vazio é um conjunto aberto.

e) Toda bola aberta é um conjunto aberto.

f) $\mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto.

g) Todo ponto de acumulação de um conjunto A pertence a esse conjunto.

h) O conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x$ e y são racionais$\}$ não tem ponto de acumulação.

i) Todos os pontos de um conjunto aberto A são pontos de acumulação de A.

j) Se A é um conjunto aberto, nenhum ponto da fronteira de A pertence a A.

11. Usando a definição de limite, mostrar que:

a) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ y \to 2}} (5x - 2y) = -9$

b) $\lim\limits_{(x, y) \to (2, 3)} (3x + 2y) = 12$

c) $\lim\limits_{(x, y) \to (1, -1)} (3x - 2y) = 5$

d) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

e) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^2} = 0$

12. Dado $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, mostrar que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} y = y_0$.

13. Mostrar que os limites seguintes não existem:

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x - y}{2x + y}$ d) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

e) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{3xy}{4x^2 + 5y^2}$ f) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 - 4y^2}{x^2 + y^2}$

g) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^3}{x^3 + y^2}$

h) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{y^4 + 3x^2y^2 + 2yx^3}{(y^2 + x^2)^2}$

i) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \dfrac{(x-1)^2 y}{(x-1)^4 + y^2}$

14. Verificar se os seguintes limites existem:

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{2y}{x + y}$ b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{-x^2 y}{2x^2 + 2y^2}$

c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{x^3 + y^2}$ d) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{5y - x}{2x - y}$

e) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$

15. Verificar a existência dos limites das seguintes funções quando (x, y) tende ao ponto indicado:

a) $f(x, y) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$; $P(0, 0)$

b) $f(x, y) = \dfrac{x^2(y-1)^2}{x^4 + (y-1)^4}$; $P(0, 1)$

c) $f(x, y) = \dfrac{3xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $P(0, 0)$

d) $f(x, y) = \dfrac{x^6 + x^2}{x^2 + y^2}$; $P(0, 0)$

e) $f(x, y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^3 - y^3}$; $P(0, 0)$

17. Usando as propriedades, calcular os limites seguintes:

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} \left(2xy + x^2 - \dfrac{x}{y}\right)$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to -1}} \dfrac{x + y - 2}{x^2 + y^2}$

c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \sqrt{\dfrac{x - 1}{x^2y^2 + xy - 1}}$

d) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{xy})$

e) $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} \left(\dfrac{1}{x + y} - 10\right)$

f) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 1}} \dfrac{x^2 + y^2 - xy + 7}{x^3 + y^3 - 7}$

18. Calcular os seguintes limites de funções compostas:

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 1}} \ln(x^2 + y^2 + 10)$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} e^{\frac{1}{x+y}}$

c) $\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ y \to \frac{\pi}{2}}} \dfrac{\operatorname{sen}(x + y)}{x}$

d) $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ y \to 2}} \ln\left(\dfrac{x^2 + y^2}{x - y + 1}\right)$

19. Calcular os seguintes limites

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy\sqrt{x + y}}{x^2 + y^2}$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0^+ \\ y \to 0^+}} \sqrt{\dfrac{xy^2 + y^3 - xy^3}{x^2 + y^2}}$

c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

20. Calcular os seguintes limites envolvendo indeterminações:

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 3}} \dfrac{x^2y - 3x^2 - 4xy + 12x + 4y - 12}{xy - 3x - 2y + 6}$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ y \to 1}} \dfrac{y\sqrt{x} - 2y - \sqrt{x} + 2}{4 - x + x\sqrt{y} - 4\sqrt{y}}$

c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\sqrt{x + 3} - \sqrt{3}}{xy + x}$

d) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 1}} \dfrac{\sqrt[3]{xy} - 1}{\sqrt{xy} - 1}$

e) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 1}} \dfrac{y \operatorname{sen} x}{xy + 2x}$

f) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} (1 + x)^{\frac{1+xy}{x}}$

g) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{e^{xy} - 1}{xy}$

21. Calcular os limites seguintes:

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} (e^{xy} - e^y + 1)$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} x\sqrt{x^2 + y^2}$

c) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ y \to 2}} (x^3y^3 + 2xy^2 + y)$

d) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} (3x^2y + 2xy^2 - 2xy)$

e) $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ y \to 1}} \dfrac{xy^2 - 5x + 8}{x^2 + y^2 + 4xy}$

f) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 1}} \dfrac{x^2 + 3xy^2}{x^2 + y^2}$

g) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 1}} \dfrac{x^2 - yx}{x^2 - y^2}$

h) $\lim\limits_{(x, y) \to (1, 2)} \ln\left[\dfrac{xy - 1}{2xy + 4}\right]$

i) $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{y}$

j) $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$

k) $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} \cos\left[\dfrac{x^3}{x^2 + y^2}\right]$

l) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to -1}} \dfrac{x^3 - xy^2}{x + y}$

m) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$

n) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} \dfrac{yx^3 - yx^2 - yx + y + 2x^3 - 2x^2 - 2x + 2}{(x - 1)^2(y + 2)}$

o) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 1}} (xy - y) \operatorname{sen} \dfrac{1}{x - 1} \cos \dfrac{1}{y - 1}$

p) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 2}} \dfrac{x^3 - x^2y}{x^2 - y^2}$